

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. Д. Глызин, А. О. Толбей

**ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС
ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Учебное пособие

Ярославль
ЯрГУ
2017

УДК 517.91
ББК В 161.6я73
Г 55

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2017 года.*

Рецензенты:

Ястребов А. В., доктор педагогических наук, профессор;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники Ярославского
государственного технического университета

Глызин, Сергей Дмитриевич.

Г 55 Практический курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное
пособие / С. Д. Глызин, А. О. Толбей ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. –
Ярославль : ЯрГУ, 2017. – 76 с.

ISBN 978-5-8397-1127-3

В пособии содержатся материалы по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Оно включает в себя краткое изложение методов решения, проиллюстрированное подробным разбором, ряд задач, а также задания для выполнения расчетно-графических работ по курсу.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям Прикладная математика и информатика и Прикладная математика в экономике, дисциплина «Дифференциальные уравнения» (блок ЕН), очной формы обучения.

Рис. 10. Библиогр.: 13 назв.

УДК 517.91
ББК В 161.6я73

ISBN 978-5-8397-1127-3

© Ярославский
государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2017

Оглавление

Введение	4
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	5
1.1. Уравнения с разделяющимися переменными	6
1.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	11
1.3. Уравнения в полных дифференциалах	15
2. Линейные дифференциальные уравнения и системы	18
2.1. Линейные дифференциальные уравнения старших порядков с посто- янными коэффициентами	18
2.2. Формула Остроградского–Лиувилля	24
2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами	25
2.4. Матричная экспонента и способы ее вычисления	34
3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений	37
3.1. Первый метод Ляпунова	38
3.2. Метод функций Ляпунова	42
3.3. Построение фазового портрета системы на плоскости	47
4. Последовательные приближения и метод малого параметра	53
4.1. Метод последовательных приближений Пикара	53
4.2. Разложение решений ОДУ в степенные ряды	54
4.3. Метод малого параметра	56
4.4. Краевые задачи	58
5. Расчетно-графическая работа	61
5.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	61
5.2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	63
5.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами	64
5.4. Устойчивость решений дифференциальных уравнений	67
5.5. Последовательные приближения и метод малого параметра	70
Литература	73

Введение

Пособие для практических занятий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» содержит подборку задач с решениями и кратким изложением необходимых теоретических сведений. Материал разделен на пять глав.

В первой из них обсуждаются уравнения первого порядка. Подробно рассматриваются уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, а также некоторые сводящиеся к ним.

Вторая глава посвящена линейным уравнениям старших порядков и системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В первую очередь и достаточно подробно рассмотрены уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Для неоднородных уравнений и систем изложен метод неопределенных коэффициентов и метод вариации произвольных постоянных. Для линейных уравнений с непостоянными коэффициентами рассмотрены способы понижения порядка уравнения с помощью теоремы Остроградского–Лиувилля в случае, когда известно какое-либо нетривиальное решение. В главе также обсуждаются методы построения матричной экспоненты.

Задачи по теории устойчивости и некоторые связанные с ними вопросы рассмотрены в третьей главе. В частности, обсуждаются практические аспекты применения первого и второго методов Ляпунова, приведены примеры использования критериев устойчивости многочленов. В главе также содержится сводка правил построения фазовых портретов линейных систем с постоянными коэффициентами на плоскости, приводится подборка рисунков, иллюстрирующих основные варианты качественного поведения фазовых траекторий.

В четвертой главе обсуждаются примеры построения приближенных решений начальной задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом последовательных приближений Пикара, с помощью разложений в степенные ряды и методом малого параметра. В последней части главы обсуждаются способы решения краевых задач и построения функции Грина, приводятся примеры определения решения различных краевых задач.

В последней главе пособия собраны задачи по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы как материал для расчетно-графической работы студентов и для формирования вариантов заданий контрольных работ. Глава разбита на пять пунктов в соответствии с числом работ, проводимых по курсу. Контрольные работы проводятся по результатам изучения материалов каждой из глав пособия, а по теме «линейные дифференциальные уравнения и системы», в силу ее важности, запланированы две работы.

Наша книга не ставит целью дать свод задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям, для этого имеется ряд специализированных сборников задач [1–6], среди которых в первую очередь следует отметить книгу А. Ф. Филипова, пережившую большое количество переизданий (см., например, [1, 2]) и сборник коллектива авторов (М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко) [3]. Пособие в большей степени предназначено для того, чтобы проиллюстрировать ряд ключевых проблем, изучаемых в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, и способствовать лучшему пониманию и усвоению соответствующего материала.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Значительная часть практических занятий по обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) посвящена уравнениям первого порядка. Ниже будет рассматриваться начальная задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция, $f(x, y)$ — непрерывная по совокупности переменных вместе с частной производной по y функция, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D — замкнутое ограниченное множество, содержащее (x_0, y_0) .

Решением задачи (1.1) будем называть непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, которая удовлетворяет начальному условию и на некотором интервале, содержащем x_0 , обращает (1.1) в тождество.

Иногда вместо уравнения (1.1) удобно рассматривать уравнение в форме дифференциалов

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1.3)$$

где $M(x, y)$, $N(x, y)$ — гладкие функции своих аргументов и не выделены зависимая и независимая переменные.

Довольно часто не удается найти непосредственный вид решения уравнения (1.1) или (1.3), поскольку оно записывается в виде какой-либо неявной функции. Если тем не менее от производных и дифференциалов удалось избавиться, будем использовать понятие общего интеграла уравнений (1.1) или (1.3). *Дифференцируемая по совокупности переменных, не равная тождественно константе функция $F(x, y)$ называется общим интегралом (1.1), если после подстановки в нее любого решения $y(x)$ уравнения (1.1) получается тождественная константа.*

Данное определение не конструктивно и не позволяет эффективно проверить, является ли некоторое полученное нами выражение интегралом. В связи с этим приведем следующее рассуждение.

Пусть $F(x, y)$ — общий интеграл, тогда по определению $F(x, y(x)) \equiv C$, где $y(x)$ — решение (1.1) или (1.3). Продифференцируем данное тождество по x , имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \equiv 0. \text{ Поскольку } y(x) \text{ — решение (1.1), получаем}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f(x, y) \equiv 0. \quad (1.4)$$

Для уравнения (1.3) соотношение (1.4) трансформируется в $\frac{\partial F}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y} M(x, y) \equiv 0$. Полученные равенства дают легко проверяемый признак того, что $F(x, y)$ является общим интегралом.

Уравнение (1.1) даже при условии, что функция $f(x, y)$ представляет собой суперпозицию элементарных функций, может оказаться не интегрируемым в квадратурах. В связи с этим особую ценность приобретают такие классы уравнений, для которых удается получить аналитическое решение или общий интеграл. В данной главе разобраны три таких класса ОДУ:

- уравнения с разделяющимися переменными,
- линейные дифференциальные уравнения,
- уравнения в полных дифференциалах.

Задачи для самостоятельного решения приведены в разделе 5.1.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

В этом разделе рассмотрим ОДУ первого порядка следующего специального вида:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \quad (1.5)$$

где $g(x)$ и $h(y)$ — достаточно гладкие функции с начальным условием (1.2).

Для решения данной задачи в уравнении (1.5) обычно переходят к дифференциалам

$$dy = g(x)h(y) dx,$$

а затем разделяют переменные

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx, \quad h(y) \neq 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что на этом шаге для дальнейших преобразований нужно предполагать, что $h(y) \neq 0$, а следовательно, необходимо рассмотреть и случай $h(y) = 0$, поскольку все корни этого алгебраического уравнения являются решениями (1.5). Обозначим независимую переменную в (1.6) x_1 и проинтегрируем по ней данное равенство от x_0 до x

$$\int_{x_0}^x \frac{dy(x_1)}{h(y(x_1))} = \int_{x_0}^x g(x_1) dx_1. \quad (1.7)$$

Выполним теперь в левой части (1.7) замену $y(x_1) \rightarrow y_1$, тогда, учитывая, что $y(x_0) = y_0$ и $y(x) = y$, получаем

$$\int_{y_0}^y \frac{dy_1}{h(y_1)} = \int_{x_0}^x g(x_1) dx_1. \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) представляет собой интеграл уравнения (1.5), удовлетворяющий начальному условию (1.2). Учитывая, что числа x_0, y_0 пока не фиксированы, выражение (1.8) совместно с корнями уравнения $h(y) = 0$ дает общий интеграл (1.5). Общее решение может быть получено, если интегралы в (1.8) вычисляются в классе элементарных функций, а затем удастся выразить функцию $y(x)$ из полученного соотношения.

Проиллюстрируем описанную схему действий на следующем примере.

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения

$$y' = y(y^2 - 1) \quad (1.9)$$

и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y(0) = 2$.

Решение. Это уравнение является, очевидно, уравнением с разделяющимися переменными, поскольку его правая часть не зависит от x . Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y(y^2 - 1)} = dx. \quad (1.10)$$

Вычислим в (1.10) интегралы от левой и правой частей. С учетом начальных условий имеем

$$\int_2^y \frac{dy_1}{y_1(y_1^2 - 1)} = \int_0^x dx_1. \quad (1.11)$$

Для подсчета интеграла в левой части (1.11) представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{y_1(y_1^2 - 1)} = \frac{A}{y_1} + \frac{B}{y_1 - 1} + \frac{C}{y_1 + 1}. \quad (1.12)$$

Приводя выражение в правой части к общему знаменателю, получаем

$$1 = A(y_1^2 - 1) + By_1(y_1 + 1) + Cy_1(y_1 - 1), \quad (1.13)$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях y_1 , имеем

$$A + B + C = 0, \quad B - C = 0, \quad -A = 1.$$

Тем самым,

$$A = -1, \quad B = C = \frac{1}{2}. \quad (1.14)$$

Заметим, что для определения A , B , C в данной ситуации можно было просто подставить в равенство (1.13) значения $y = 0$, $y = \pm 1$ и сразу получить (1.14).

Теперь, учитывая в уравнении (1.11) представление (1.12), после интегрирования получаем

$$\left(-\ln |y_1| + \frac{1}{2} \ln |y_1 - 1| + \frac{1}{2} \ln |y_1 + 1| \right) \Big|_2^y = x,$$

или после некоторых упрощений

$$\ln \left| \frac{y^2 - 1}{y^2} \right| - \ln \frac{3}{4} = 2x. \quad (1.15)$$

Следует отметить, что полученная формула содержит «лишние» решения и не все функции, удовлетворяющие (1.15), являются решениями нашей начальной задачи. Потенцируя выражение (1.15) и раскрывая модуль, получаем

$$\frac{y^2 - 1}{y^2} = \pm \frac{3}{4} e^{2x}. \quad (1.16)$$

Если в правой части выражения (1.16) взять знак минус, то соответствующая функция не будет удовлетворять в нуле начальному условию, а значит, подходит только выражение с плюсом, однако и это еще не все. Выразим из (1.16) функцию $y(x)$

$$y = \pm \sqrt{\frac{4}{4 - 3e^{2x}}}. \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) также дает две функции, из которых начальному условию удовлетворяет только имеющая знак плюс перед корнем. На рис. 1 изображен график

этого решения. Его вид определяется следующими обстоятельствами: во-первых, из формулы (1.9) следует, что $y' > 0$ при $y > 1$, то есть функция решения в данном диапазоне монотонно растущая, во-вторых, $y(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$, что дает горизонтальную асимптоту $y = 1$, наконец, в-третьих, $y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow (\ln 4 - \ln 3)/2$, что определяет вертикальную асимптоту $x = (\ln 4 - \ln 3)/2$.

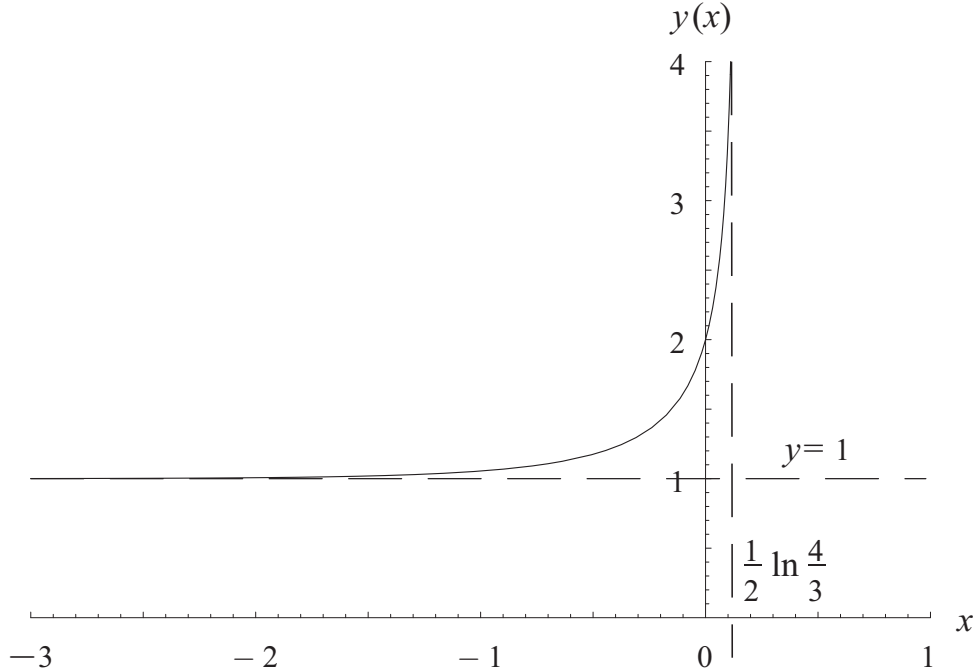


Рис. 1. График интегральной кривой

Отметим, что решение данной задачи определено не на всей числовой оси и уходит на бесконечность при конечном изменении x . $\square$

Перейдем теперь к задачам, сводящимся к уравнению с разделяющимися переменными. К таким относятся в первую очередь однородные уравнения.

Под однородными будем понимать уравнения, для которых функция правой части может быть представлена в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \equiv f_* \left(\frac{y}{x} \right). \quad (1.18)$$

В случае, если рассматривается уравнение (1.3), определение несколько модифицируется. Определим сначала понятие однородной функции. *Функция $M(x, y)$ называется однородной степени k , если для некоторого вещественного k и всех $\alpha > 0$ выполнено соотношение $M(\alpha x, \alpha y) \equiv \alpha^k M(x, y)$ для всех (x, y) и $(\alpha x, \alpha y)$ из области определения функции $M(x, y)$.*

В свою очередь, *уравнение (1.3) будем называть однородным, если $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные функции одной степени.*

Для однородного уравнения сведение к уравнению с разделяющимися переменными осуществляется путем замены

$$y = zx. \quad (1.19)$$

Так, уравнение (1.18) в результате замены (1.19) приводится к виду

$$\frac{dz}{dx} + z = f_*(z), \quad (1.20)$$

которое уже, очевидно, с разделяющимися переменными. Для уравнения (1.3) замена (1.19) дает

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(xdz + zdx) = 0,$$

откуда с учетом однородности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$ имеем уравнение

$$x^k M(1, z)dx + x^k N(1, z)(xdz + zdx) = 0,$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.2. Найти общее решение

$$(xy - x^2)dy - (2xy - y^2)dx = 0. \quad (1.21)$$

Решение. Это уравнение однородное, поскольку функции $M(x, y) = -2xy + y^2$, $N(x, y) = xy - x^2$ являются однородными функциями одной степени

$$M(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 M(x, y), \quad N(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 N(x, y).$$

Сведем однородное уравнение (1.21) к уравнению с разделяющимися переменными. Подставляя в уравнение замену $y = zx$ и учитывая, что $dy = zdx + xdz$, получаем

$$(x^2 z - x^2)(zdx + xdz) - (2x^2 z - x^2 z^2)dx = 0. \quad (1.22)$$

Разделим в (1.22) переменные

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - z}{z(2z - 3)} dz. \quad (1.23)$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей (1.23). Для подсчета интеграла в правой части подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1 - z}{z(2z - 3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z - 3}. \quad (1.24)$$

Приводя выражение в правой части к общему знаменателю, получаем

$$1 - z = A(2z - 3) + Bz,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , имеем

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}.$$

Подставляя найденные значения в (1.24), после интегрирования (1.23) находим

$$\ln |x| = \ln \left| \frac{1}{z^{1/3} |2z - 3|^{1/6}} \right| + \ln |C|, \quad C \neq 0.$$

Потенцируя последнее равенство, получаем $xz^{1/3}|2z-3|^{1/6} = C$. Заменяя теперь z на $\frac{y}{x}$ и возводя левую и правую части в шестую степень, будем иметь

$$x^3y^2(2y-3x) = C.$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения (1.22) на $x^3(2z^2 - 3z)$, поэтому могли потерять решения, которые обращают в нуль это произведение. Полагаем $x = 0$, $z = 0$, $z = 3/2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x$ — решения (1.21). Следует, впрочем, отметить, что все они входят в полученное выше множество решений, если отказаться от условия $C \neq 0$. $\square$

Приведем решение еще одной задачи, сводящейся, в свою очередь, к однородному уравнению.

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (1.25)$$

сводится к однородному (1.18) с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Пример 1.3. Найти общее решение

$$(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0.$$

Решение. В данном случае точка пересечения прямых

$$2y - x - 4 = 0,$$

$$2x - y + 5 = 0,$$

$x_* = -2$, $y_* = 1$. Полагая $x = u - 2$, $y = v + 1$, будем иметь однородное уравнение

$$(2v - u)du - (2u - v)dv = 0,$$

которое заменой переменных $v = tu$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{du}{u} = \frac{2-t}{t^2-1}dt$, откуда $\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{(t+1)^3}\right| + \frac{1}{2}\ln|C|$, $C \neq 0$. Потенцируя последнее равенство, имеем $u^2 = C\frac{t-1}{(t+1)^3}$. Возвращаясь к старым переменным x и y , получим

$$\frac{y-x-3}{(y+x+1)^3} = C.$$

Кроме того, имеется решение $x = -y - 1$, которое было потеряно при делении на $t+1$. Решение $x = y - 3$, получающееся при $t = 1$, входит в общее решение уравнения при $C = 0$. $\square$

Рассмотренный выше метод нельзя применить в случае параллельности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ и уравнение (1.25) может быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y),$$

и, следовательно, замена переменных $z = a_1x + b_1y$ преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.4. Найти общее решение

$$(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.$$

Решение. Полагая $z = x + y$, будем иметь

$$(2z - 1)(dz - dy) + (z - 2)dy.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{2z - 1}{z + 1}dz = dy, \quad 2z - 3 \ln |z + 1| = y + C,$$

$$3 \ln |x + y + 1| = 2x + y + C.$$

Остается проверить, что $z = -1$, то есть $y = -x - 1$ также является решением исходного уравнения. $\square$

1.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

В данном разделе рассматриваются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1.26)$$

где $a(x), b(x)$ — непрерывные на некотором промежутке, содержащем x_0 , функции. В правой части уравнения (1.26) выражение $a(x)y$ называется *однородной частью*, а $b(x)$ — *неоднородностью*.

Данную задачу будем решать в два этапа. На первом из них рассмотрим (1.26) с однородной правой частью (не путать с однородными дифференциальными уравнениями, рассмотренными в предыдущем пункте)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0. \quad (1.27)$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. уравнение (1.5)), после разделения в нем переменных x и y и интегрирования имеем

$$\int_{y_0}^y \frac{dy_1}{y_1} = \int_{x_0}^x a(\tau)d\tau,$$

откуда после вычисления интеграла в левой части и потенцирования имеем

$$y(x) = y_0 \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau)d\tau \right). \quad (1.28)$$

Формула (1.28) дает решение линейного однородного уравнения (1.27).

Второй этап решения линейного уравнения (1.26) связан с построением на основе формулы (1.28) такой замены переменных, чтобы уравнение (1.26) свелось к уравнению, способ решения которого нам известен. Выполним в (1.26) замену

$$y(x) = z(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau)d\tau \right). \quad (1.29)$$

После дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} z'(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \right) + z(x) a(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \right) = \\ = a(x) z(x) \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \right) + b(x). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Выразим в (1.30)

$$z'(x) = b(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \right)$$

и, полагая, что $z(x_0) = z_0$, найдем $z(x)$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x b(x_1) \exp \left(- \int_{x_0}^{x_1} a(\tau) d\tau \right) dx_1.$$

Вернемся с помощью формулы (1.29) к исходным переменным, при этом учтем, что $y(x_0) = y_0$, то есть $z_0 = y_0$ и, значит,

$$y(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(\tau) d\tau \right) \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(x_1) \exp \left(- \int_{x_0}^{x_1} a(\tau) d\tau \right) dx_1 \right).$$

Задача тем самым полностью решена. Изложенный способ построения решения уравнения (1.26) обычно называют *методом вариации произвольных постоянных*.

Пример 1.5. Найти общее решение

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$$

Решение. Для интегрирования неоднородного уравнения применим метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее однородное уравнение

$$\begin{aligned} y' - y \operatorname{ctg} x &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= \operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{d \sin x}{\sin x}, \\ \ln |y| &= \ln |\sin x| + \ln C, \quad y_{\text{од}} = C \sin x. \end{aligned}$$

Считаем C функцией x , тогда $y = C(x) \sin x$ и $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$. Подставляя замену в исходное уравнение, после упрощений получаем

$$\frac{dC}{dx} = 2x, \quad dC = 2x dx, \quad C(x) = x^2 + C_1.$$

Тем самым, общее решение имеет вид

$$y = (x^2 + C_1) \sin x.$$

□

Пример 1.6. Найти общее решение

$$y' = \frac{y}{x + 2y^3}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Решение. Для решения данной задачи перейдем к уравнению в дифференциалах

$$(x + 2y^3)dy = ydx$$

и заметим, что если в этом уравнении считать независимой переменной y , а x — функцией от y , то для $x(y)$ имеем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 2y^2, \quad x(y_0) = x_0. \quad (1.31)$$

Воспользуемся изложенным выше методом для решения задачи (1.31). Интегрирование однородного уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad x(y_0) = x_0$$

дает $x_{\text{од}} = \frac{x_0}{y_0}y$. Замена метода вариации произвольных постоянных $x = zy$ приводит к соотношению

$$z'y + z = z + 2y^2,$$

откуда $z(y) = z_0 + y^2$, тем самым, $x = (z_0 + y^2)y$. Учитывая начальное условие $x(y_0) = x_0$, имеем $z_0 = \frac{x_0}{y_0} - y_0^2$. Решение начальной задачи Коши для уравнения (1.31) имеет вид

$$x = \left(\frac{x_0}{y_0} + y^2 - y_0^2 \right) y. \quad (1.32)$$

Вместе с тем формула (1.32) представляет неявно заданное решение исходного уравнения. Выражение (1.32) не определено при $y_0 = 0$, однако нетрудно видеть, что $y \equiv 0$ удовлетворяет исходному уравнению и было потеряно при переходе к уравнению (1.31). $\square$

Далее рассмотрим уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям. Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1), \quad (1.33)$$

после деления обеих частей на y^n , заменой $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ сводится к линейному уравнению и интегрируется как линейное.

Пример 1.7. Найти общее решение

$$3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y' + \frac{y}{3x} = \frac{2}{3}y^{-2}$$

— это уравнение Бернулли вида (1.33), где $n = -2$. После замены

$$z = y^3, \quad z' = 3y^2y'$$

получаем линейное уравнение

$$z' + \frac{z}{x} = 2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 0, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}, \quad z_{\text{од}} = \frac{C}{x}.$$

Полагаем $C = C(x)$, $z' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$, тогда $C'(x) = 2x$, $C(x) = x^2 + C_1$.

Получаем общее решение $z = x + \frac{C_1}{x}$, а следовательно, $y^3 = x + \frac{C_1}{x}$. $\square$

Уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \quad (1.34)$$

в общем виде не интегрируется в квадратурах, но если известно хотя бы одно частное решение этого уравнения $y_*(x)$, то заменой переменных $y = y_* + z$ его можно свести к уравнению Бернулли

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_*(x)]z + q(x)z^2 = 0.$$

Пример 1.8. Найти общее решение

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, \quad y_* = \frac{1}{x}. \quad (1.35)$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Риккати (1.34). Полагаем

$$y = z + \frac{1}{x}, \quad y' = z' - \frac{1}{x^2},$$

подставляя замену в исходное уравнение (1.35), получим

$$z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}, \quad \text{или } z' - \frac{2z}{x} = z^2, \quad \text{которое является уравнением Бернулли.}$$

Полученное уравнение Бернулли приводим к линейному

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1, \quad u = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} - 1.$$

Решаем однородное уравнение

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln |u| = -2 \ln |x| + \ln C, \quad u = \frac{C}{x^2},$$

далее варьируем постоянную $C = C(x)$

$$u = \frac{C(x)}{x^2}, \quad \frac{C'(x)}{x^2} = -1, \quad C(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1, \quad u = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3}$$

и возвращаемся к исходным переменным

$$\frac{1}{z} = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C_2 - x^3}.$$

Учитывая, что еще на этапе решения уравнения Бернулли выполнялось деление на z и оказалось потеряно решение $z = 0$, добавим к полученному общему решению еще и решение $y = 1/x$, оно, впрочем, было известно нам по условию задачи (1.35). $\square$

1.3. Уравнения в полных дифференциалах

В этом разделе будем рассматривать уравнение (1.3) в форме дифференциалов, воспроизведем его еще раз

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1.36)$$

Предположим, что $F(x, y)$ представляет собой общий интеграл (1.36), т. е. на решениях уравнения (1.36) $F(x, y(x)) \equiv C$. Вычисляя дифференциал от левой и правой частей данного тождества, имеем

$$dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy. \quad (1.37)$$

Структура равенств (1.36) и (1.37), очевидным образом, одинакова, и если по известным функциям $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удастся найти такую $F(x, y)$, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y), \quad (1.38)$$

то $F(x, y) = C$ как раз и будет искомым общим интегралом уравнения (1.36). Уравнения, обладающие таким свойством, будем называть уравнениями в полных дифференциалах.

Выясним условия на $M(x, y)$ и $N(x, y)$, при которых уравнение (1.36) является уравнением в полных дифференциалах.

Предположим, что $F(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция. Продифференцируем первое из равенств (1.38) по y , а второе — по x , тогда

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Учитывая, что значение второй частной производной дважды непрерывно дифференцируемой функции $F(x, y)$ не зависит от порядка дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.39)$$

Выражение (1.39) представляет собой признак того, что уравнение (1.36) является уравнением в полных дифференциалах.

Построение общего интеграла для уравнения в полных дифференциалах опишем на примере.

Пример 1.9. Найти общее решение

$$(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах (1.36), если имеет место равенство $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Так как

$$\frac{\partial(x + y - 1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x},$$

левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$. Равенство $\frac{\partial F}{\partial x} = x + y - 1$ интегрируем по x при фиксированном y

$$F = \int (x + y - 1)dx = x^2 + xy - x + \varphi(y),$$

поэтому в качестве постоянной интегрирования ставим неизвестную функцию $\varphi(y)$. Подставляем выражение для F во второе равенство $\frac{\partial F}{\partial y} = x - y^2 + 3$. Имеем $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy - x + \varphi(y)) = x - y^2 + 3$, или $\varphi(y)' = -y^2 + 3$, откуда $\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C$ и $F(x, y) = x^2 + xy - x - \frac{y^3}{3} + 3y$, тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$x^2 + xy - x - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

□

Поскольку уравнения в полных дифференциалах довольно легко интегрируются, представляют интерес способы сведения (1.36) к уравнению в полных дифференциалах. Как оказывается (см., например, [7, 8]), всегда существует такая ненулевая гладкая функция $\gamma(x, y)$, что для функций $N_*(x, y) = \gamma(x, y)N(x, y)$ и $M_*(x, y) = \gamma(x, y)M(x, y)$ выполнены равенства (1.39). Функцию $\gamma(x, y)$ называют *интегрирующим множителем*. Естественно, регулярного метода получения интегрирующего множителя не существует.

Пример 1.10. Найти интегрирующий множитель для уравнения

$$-ydx + (x + 2y^3)dy = 0. \quad (1.40)$$

Решение. Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах (не выполнено условие (1.39)). Однако в примере 1.6 для него тем не менее найден общий интеграл (см. формулу (1.32)) $x = \left(\frac{x_0}{y_0} + y^2 - y_0^2\right)y$. Обозначив $C = \frac{x_0}{y_0} - y_0^2$ и выразив эту величину через x и y , получаем $C = \frac{x}{y} - y^2$, тем самым функция $F(x, y) = \frac{x}{y} - y^2$ представляет собой общий интеграл. Построим дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, соответствующее этому интегралу

$$\frac{1}{y}dx + \left(-\frac{x}{y^2} - 2y\right)dy = 0. \quad (1.41)$$

Сравнивая уравнения (1.40) и (1.41), замечаем, что для превращения (1.40) в (1.41) его необходимо разделить на $-y^2$. Таким образом, в данном случае интегрирующий множитель имеет вид $\gamma(x, y) = -\frac{1}{y^2}$. □

В некоторых случаях, когда уравнение (1.31) не является уравнением в полных дифференциалах, для нахождения подходящих замен можно попытаться выделить в

уравнении полные дифференциалы. При этом используются следующие простейшие формулы:

$$d(xy) = xdy + ydx, \quad d(y^2) = 2ydy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right), \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y}.$$

Пример 1.11. *Найти общее решение*

$$(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0.$$

Решение. Сведем исходное уравнение к уравнению в полных дифференциалах

$$xdx + ydy + x^2(x^2 + y^2)dx = 0, \quad \frac{d(x^2 + y^2)}{2} + x^2(x^2 + y^2)dx = 0,$$

делим уравнение на $x^2 + y^2$, имеем

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} + d\left(\frac{x^3}{3}\right) = 0.$$

Интегрируя, получаем решение

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2| + \frac{x^3}{3} = C.$$

□

2. Линейные дифференциальные уравнения и системы

В этой главе рассматриваются методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. При решении используется главное свойство линейных однородных систем и уравнений, состоящее в том, что их общее решение строится как сумма из n линейно независимых решений, где n — порядок соответствующего уравнения или системы.

2.1. Линейные дифференциальные уравнения старших порядков с постоянными коэффициентами

Объектом изучения данного раздела является уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (2.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные числа, $a_0 \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная функция. При решении линейных дифференциальных уравнений будем выделять три этапа:

1) решается однородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.2)$$

и определяется его общее решение $y_{\text{од}} = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$, где $\varphi_i(x)$, $j = 1, \dots, n$ — линейно независимые решения, $c_j \in \mathbb{R}$ — произвольные константы;

2) каким-либо способом находится частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (2.1);

3) общее решение (2.1) записывается как сумма

$$y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}.$$

Начнем применение указанной программы с рассмотрения однородного уравнения (2.2). Выполнение в (2.2) эйлеровой замены $y = ce^{\lambda x}$ приводит к равенству

$$a_0 c \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 c \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n c e^{\lambda x} = 0,$$

из которого получаем характеристическое уравнение

$$l(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.3)$$

Многочлен $l(\lambda)$ будем далее называть *характеристическим*. Как оказывается, если известны корни характеристического многочлена, то решение однородного уравнения записывается в соответствии со следующими тремя правилами:

1) пусть корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вещественны и различны, тогда решение уравнения (2.2) записывается в виде

$$y_{\text{од}} = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(\lambda_2 x) + \dots + c_n \exp(\lambda_n x);$$

2) пусть корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ имеют кратности $k_1, \dots, k_s$ ($k_1 + \dots + k_s = n$) соответственно, тогда решение уравнения (2.2) представляется в виде

$$y_{\text{од}} = (c_{11} + c_{12}x + \dots c_{1k_1}x^{k_1-1}) \exp(\lambda_1 x) + \dots + (c_{s1} + c_{s2}x + \dots c_{sk_s}x^{k_s-1}) \exp(\lambda_s x);$$

3) пусть $z(x) = u(x) + iv(x)$ — комплексное решение однородного уравнения (2.2) с вещественными коэффициентами, тогда $u(x)$ и $v(x)$ по отдельности также являются решениями уравнения (2.2).

Последнее из приведенных правил позволяет построить решения, соответствующие комплексно сопряженным корням характеристического многочлена. Пусть, например, корни $\lambda_{1,2} = \tau \pm i\omega$ имеют кратность k , тогда из правила 2) для этих корней имеем $2k$ комплексных решения вида $\exp((\tau \pm i\omega)x)$, $x \exp((\tau \pm i\omega)x)$, $\dots$, $x^{k-1} \exp((\tau \pm i\omega)x)$. Учитывая теперь правило 3), получаем $2k$ линейно независимых решения. Отметим, что комплексно сопряженным корням характеристического многочлена соответствуют и комплексно сопряженные решения однородного уравнения. Тем самым решение, соответствующее обсуждаемым корням, имеет вид

$$y_{\text{од}} = \exp(\tau x) \cos(\omega x) (c_{11} + c_{12}x + \dots c_{1k}x^{k-1}) + \exp(\tau x) \sin(\omega x) (c_{21} + c_{22}x + \dots c_{2k}x^{k-1}) + \dots$$

Перейдем ко второму этапу решения уравнения (2.1) и рассмотрим способы построения каких-либо решений неоднородного уравнения. Наилучшим из способов является, очевидно, метод «внезапного озарения», но, в силу плохой алгоритмизуемости, мы вынуждены пропустить его обсуждение. Остальные методы делятся на две группы: одна из них — методы, работающие для специфических правых частей и дающие ответы в каком-либо специальном классе функций (эти методы обычно позволяют свести решаемую задачу к какой-либо алгебраической); методы другого класса годятся для любой правой части, однако приводят к вычислению интегралов, которое может быть весьма трудоемким.

Метод неопределенных коэффициентов

Пусть функция правой части уравнения (2.1) представляется в виде суммы произведений многочленов и экспонент вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^k p_j(x) \exp(\alpha_j x), \quad (2.4)$$

где $p_j(x) = p_{0j}x^{m_j} + p_{1j}x^{m_j-1} + \dots + p_{m_jj}$, $j = 1, \dots, k$. Функцию в правой части (2.4) будем называть квазимногочленом. Нетрудно показать, что частное решение задачи (2.1) с функцией $f(x)$, представленной в виде (2.4), может быть записано как сумма

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_k,$$

где $\tilde{y}_j$ удовлетворяет уравнению

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = p_j(x) \exp(\alpha_j x). \quad (2.5)$$

Рассмотрим задачу построения частного решения уравнения (2.5). Как оказывается, $\tilde{y}_j$ можно искать в той же форме, что и неоднородность этого уравнения. Сформулируем общие правила построения решения (2.5).

- Пусть сначала $l(\alpha_j) \neq 0$, то есть α_j не является корнем характеристического уравнения (2.3), тогда частное решение уравнения (2.5) представляется в виде

$$\tilde{y}_j = q(x) \exp(\alpha_j x). \quad (2.6)$$

- Пусть теперь α_j — корень кратности s характеристического многочлена $l(\lambda)$, тогда частное решение может быть представлено как

$$\tilde{y}_j = x^s q(x) \exp(\alpha_j x). \quad (2.7)$$

Первый из этих двух случаев называют обычно нерезонансным, а второй — резонансным.

В обеих формулах (2.6) и (2.7) $q(x)$ — многочлен с не определенными пока коэффициентами той же степени, что и степень многочлена $p_j(x)$. Подстановка выражений (2.6) или (2.7) в уравнение (2.5) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x позволяет найти коэффициенты многочлена $q(x)$.

С методом неопределенных коэффициентов тесно связан метод нахождения частных решений уравнения (2.1) в ситуации, когда в формуле (2.4) содержатся в качестве сомножителей еще синусы и косинусы. Уравнение (2.5) в этом случае приобретает вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = p(x) \exp(\tau x) \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{array} \right\}. \quad (2.8)$$

Для сведения данной задачи к изложенному выше методу неопределенных коэффициентов заменим в (2.8) $\cos \omega x$ или $\sin \omega x$ на $\exp i\omega x$.

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = p(x) \exp(\tau x) \exp(i\omega x) \equiv p(x) \exp((\tau + i\omega)x). \quad (2.9)$$

Полученное уравнение (2.9) имеет вид, аналогичный (2.5), с той лишь разницей, что в (2.9) показатель экспоненты — комплексное число $\tau + i\omega$. Учитывая, что при решении (2.5) нигде не использовалась вещественность показателя экспоненты, задачу (2.9) можно решать методом неопределенных коэффициентов и найти частное решение $\tilde{z}$ уравнения (2.9). Предположим, что $\tilde{z} = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Подставим это выражение в (2.9) и выделим вещественную и мнимую части, тогда нетрудно видеть

$$\begin{aligned} a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u &= p(x) \exp(\tau x) \cos(\omega x), \\ a_0 v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + \dots + a_n v &= p(x) \exp(\tau x) \sin(\omega x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, для решения задачи (2.8) необходимо сначала перейти к задаче (2.9), а затем взять от полученного частного решения $\tilde{z}$ вещественную часть, если в уравнении (2.8) был $\cos(\omega x)$, и мнимую часть — в случае $\sin(\omega x)$. Для иллюстрации описанного метода рассмотрим следующую задачу.

Пример 2.1. Для уравнения

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega t, \quad (2.11)$$

где α, ω, ω_0 — положительные числа, найти амплитуду периодического решения.

Решение. Найдем корни характеристического многочлена $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega_0^2$ уравнения (2.11), которые в зависимости от знака дискриминанта $D = \alpha^2 - 4\omega_0^2$ имеют вид $\lambda_{1,2} = (-\alpha \pm \sqrt{D})/2$ при $D > 0$ и $\lambda_{1,2} = \alpha/2 \pm i\Omega$, $\Omega = \sqrt{-D}/2$ при $D < 0$. Общее решение однородной части уравнения (2.11) получается равным $x_{\text{од}} = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$ в первом и $x_{\text{од}} = \exp(-t\alpha/2)(c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t)$ — во втором случае. Следует отметить, что при $\alpha > 0$ и $t \rightarrow +\infty$, $x_{\text{од}}(t) \rightarrow 0$ для любых c_1, c_2 .

Перейдем к определению частного решения неоднородного уравнения. Заменим в правой части (2.11) $\cos \omega t$ на $\exp i\omega t$ и рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \omega_0^2 z = \exp i\omega t.$$

Найдем частное решение этого уравнения. Учитывая, что $i\omega$ не является корнем характеристического многочлена, решение будем искать в виде $\tilde{z} = A \exp i\omega t$. Подстановка дает $(-\omega^2 + \alpha i\omega + \omega_0^2)A \exp i\omega t = \exp i\omega t$, отсюда $A = (\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega)^{-1}$. Для удобства дальнейших преобразований представим A в виде $A = \rho \exp i\varphi$, где $\rho = ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2)^{-1/2}$, а $\varphi = \arctg \frac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Учитывая, что $\tilde{x} = \text{Re } \tilde{z}$, получаем $\tilde{x} = \text{Re } \rho \exp(i(\varphi + \omega t)) = \rho \cos(\varphi + \omega t)$. Общее решение задачи (2.11) имеет вид $x_{\text{общ}} = x_{\text{од}} + \tilde{x}$, причем, как нетрудно видеть, $x_{\text{од}}$ при ненулевых c_1, c_2 и $\alpha > 0$ — непериодическое, тем самым, уравнение (2.11) имеет единственное периодическое решение $x = \rho \cos(\varphi + \omega t)$ с амплитудой ρ . При фиксированных ω_0 и α определим максимум полученной функции при $\omega > 0$. Для этого найдем производную амплитуды $\rho'(\omega) = -((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2)^{-3/2}(\alpha^2 \omega - 2(\omega_0^2 - \omega^2)\omega)$ и приравняем ее к нулю с тем, чтобы найти точку возможного экстремума. Из равенства $\alpha^2 \omega - 2(\omega_0^2 - \omega^2)\omega = 0$, учитывая положительность ω , имеем $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2/2$. При $\alpha^2 < 2\omega_0^2$ в точке $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2/2}$ реализуется максимальное значение амплитуды периодического решения

$$\rho_{\max} = \rho(\omega^*) = 2\alpha^{-1}(\alpha^2 + (2\omega_0^2 - \alpha^2)^2)^{-1/2}. \quad (2.12)$$

□

Пример 2.2. Найти общее решение

$$y'' + 2y' + 17y = \exp(-x) + \sin 4x. \quad (2.13)$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' + 17y = 0, \quad (2.14)$$

для этого выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0,$$

корни которого равны $\lambda_{1,2} = 1 \pm 4i$. Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (2.14) имеет вид

$$y_{\text{од}} = (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) \exp(x).$$

Правая часть исходного уравнения (2.13) состоит из двух слагаемых, поэтому ищем частные решения двух уравнений

$$1) y'' + 2y' + 17y = \exp(-x), \quad (2.15)$$

здесь $\alpha = -1 \neq \lambda_{1,2}$, следовательно, $\tilde{y}_1 = A \exp(-x)$. Подставляя данное выражение в уравнение (2.15), находим $\tilde{y}_1 = \frac{1}{16} \exp(-x)$.

$$2) y'' + 2y' + 17y = \sin 4x. \quad (2.16)$$

В данной ситуации удобно воспользоваться методом комплексных амплитуд, для этого перейдем к уравнению

$$z'' + 2z' + 17z = \exp(4ix), \quad (2.17)$$

мнимая часть решений которого является решением уравнения (2.16), то есть $\tilde{y}_2 = \operatorname{Im} \tilde{z}$, где $\tilde{z}$ — частное решение (2.17). Поскольку $4i$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение (2.17) ищем в виде $\tilde{z} = A \exp(4ix)$. После подстановки в (2.17) получаем $A = \frac{1-8i}{65}$, а, значит, $\tilde{z} = \frac{1-8i}{65} \exp(4ix)$. Выделяя мнимую часть $\tilde{z}$, имеем

$$\tilde{y}_2 = -\frac{8}{65} \cos 4x + \frac{1}{65} \sin 4x.$$

Общее решение исходного уравнения (2.13) складывается из общего решения однородного уравнения и двух частных решений неоднородного $y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, то есть

$$y_{\text{общ}} = (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) \exp(x) + \frac{1}{16} \exp(-x) - \frac{8}{65} \cos 4x + \frac{1}{65} \sin 4x.$$

□

Пример 2.3. Найти общее решение

$$y''' + 2y'' = (x+1) \exp(-2x). \quad (2.18)$$

Решение. Характеристический многочлен однородного уравнения

$$y''' + 2y'' = 0 \quad (2.19)$$

записывается в виде $\lambda^3 + 2\lambda^2$ и имеет корень $\lambda_1 = 0$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$. Решение однородного уравнения (2.19) имеет, следовательно, вид

$$y_{\text{од}} = c_1 + c_2 x + c_3 \exp(-2x). \quad (2.20)$$

Правая часть уравнения (2.18)

$$p(x) \exp(\alpha x) = (x+1) \exp(-2x),$$

где степень многочлена p равна единице, а $\alpha = -2$ совпадает с корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение (2.18) отыскивается в виде

$$\tilde{y} = (Ax + B)x \exp(-2x).$$

Подставляя $\tilde{y}$ в дифференциальное уравнение (2.18) и приравнявая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения, находим

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Запишем общее решение уравнения (2.18) $y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}$ или

$$y_{06\text{ш}} = c_1 + c_2 x + c_3 \exp(-2x) + \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right) x \exp(-2x).$$

1

Метод вариации произвольной постоянной

Рассмотрим теперь ситуацию, когда функция $f(x)$ в правой части уравнения (2.1) не представляется в виде (2.4). Опишем метод вариации произвольной постоянной. В данной ситуации частное решение (2.1) отыскивается на основе решения однородного уравнения

$$y_{\text{од}} = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

где $\varphi_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$) — линейно независимые функции, полученные на предыдущем этапе решения задачи. Введем вместо констант c_j , $j = 1, \dots, n$ новые переменные $c_j(x)$ так, что

$$\tilde{y} = c_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x), \quad (2.21)$$

тогда их можно найти из следующей системы:

[illegible]

Полученная система, алгебраическая относительно $c'_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, имеет отличный от нуля определитель. Это определитель Вронского системы линейно независимых функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Учитывая, что система (2.22) не вырождена, нетрудно вычислить значения $c'_j(x)$. Интегрируя полученные выражения, с помощью формулы (2.21) находим частное решение $\tilde{y}(x)$.

Пример 2.4. *Найти общее решение*

$$\ddot{x} - x = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}. \quad (2.23)$$

Решение. Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

и выпишем общее решение однородного уравнения

$$x_{0\text{II}} = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t).$$

Линейное неоднородное уравнение (2.23) будем решать методом вариации постоянных. Для этого полагаем $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$ и решение (2.23) ищем в виде

$$\tilde{x} = c_1(t) \exp(t) + c_2(t) \exp(-t).$$

Функции $c_1(t), c_2(t)$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) \exp(t) + \dot{c}_2(t) \exp(-t) = 0, \\ \dot{c}_1(t) \exp(t) - \dot{c}_2(t) \exp(-t) = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \frac{t^2 \ln t + 1}{4t^2} \exp(-t), \quad \dot{c}_2(t) = \frac{-t^2 \ln t - 1}{4t^2} \exp(t), \\ c_1(t) &= \frac{1}{4} \int \frac{t^2 \ln t + 1}{t^2 \exp(t)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\ln t}{\exp(t)} dt + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 \exp(t)}, \\ \int \frac{\ln t}{\exp(t)} dt &= \left| \begin{array}{l} u = \ln t, \quad dv = \frac{dt}{\exp(t)}, \\ du = \frac{dt}{t}, \quad v = -\exp(-t) \end{array} \right| = -\frac{\ln t}{\exp(t)} + \int \frac{dt}{t \exp(t)}, \\ \int \frac{dt}{t^2 \exp(t)} &= \left| \begin{array}{l} u = \exp(-t), \quad dv = \frac{dt}{t^2}, \\ du = -\exp(-t) dt, \quad v = -\frac{1}{t} \end{array} \right| = -\frac{1}{t \exp(t)} - \int \frac{dt}{t \exp(t)}. \end{aligned}$$

Итак, $c_1(t) = -\frac{\ln t}{4 \exp(t)} - \frac{1}{4t \exp(t)} + c_3$. Аналогично

$$c_2(t) = \frac{\exp(t)}{4t} - \frac{\exp(t) \ln t}{4} + c_4.$$

Тем самым, общее решение уравнения (2.23) имеет вид

$$x_{\text{общ}} = c_3 \exp(t) + c_4 \exp(-t) - \frac{\ln t}{2}.$$

□

2.2. Формула Остроградского–Лиувилля

Рассмотрим линейно независимую на отрезке $[a, b]$ систему функций

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

имеющих все производные до порядка n включительно. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система линейного однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0. \quad (2.24)$$

Тогда имеет место формула Остроградского–Лиувилля

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau \right),$$

где

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

— определитель Вронского, $x_0 \in [a, b]$ — любое значение, на котором непрерывны коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ уравнения (2.24).

На примере линейного однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (2.25)$$

покажем, что при известном частном решении y_1 , это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка. Пользуясь формулой Остроградского–Лиувилля, имеем

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \exp \left(- \int p(x) dx \right), \quad p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad (2.26)$$

где y_2 — неизвестное пока решение уравнения (2.25). Формула (2.26) при известном y_1 , очевидным образом, приводит к линейному уравнению первого порядка относительно y_2

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C \exp \left(- \int p(x) dx \right) \text{ или } \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{C \exp(-\int p(x) dx)}{y_1^2}. \quad (2.27)$$

В общем случае использование формулы Остроградского–Лиувилля позволяет при известном решении y_1 понизить порядок решаемого уравнения на единицу.

Пример 2.5. Найти общее решение уравнения

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad (2.28)$$

отыскивая одно из его решений в виде $y_1 = \exp(mx)$.

Решение. Подставляя $y_1 = \exp(mx)$ в уравнение (2.28), получаем решение $y_1 = \exp(-2x)$. Далее воспользуемся формулой Остроградского–Лиувилля (2.27), в которой $p(x) = \frac{4x}{2x+1}$, а y_2 — линейно независимое с y_1 решение уравнения (2.28). Из (2.27) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{\exp(-2x)} \right)' &= \frac{C \exp(-\int \frac{4x}{2x+1} dx)}{\exp(-4x)} = C(2x+1) \exp(2x), \\ \frac{y_2}{\exp(-2x)} &= C \int (2x+1) \exp(2x) dx, \end{aligned}$$

откуда y_2 можно выбрать равным $y_2 = x$. Тем самым, общее решение исходного уравнения (2.28) имеет вид

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \exp(-2x) + c_2 x.$$

□

2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

В этом разделе рассмотрим линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x} = Ax + f(t). \quad (2.29)$$

- 1) решается линейная однородная система
$$\dot{x} = Ax, \quad (2.30)$$
и определяется ее общее решение
$$x_{\text{од}}(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t), \quad (2.31)$$
где $\varphi_j(t) \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимые решения (2.30), $c_j \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, $j = 1, \dots, n$;
- 2) каким-либо образом определяется любое частное решение неоднородной системы (2.29) $\tilde{x}(t)$;
- 3) общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.30)$$

и определяется ее общее решение

$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \quad (2.31)$$

где $\varphi_j(t) \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимые решения (2.30), $c_j \in \mathbb{R}$ — произвольные константы, $j = 1, \dots, n$;

2) каким-либо образом определяется любое частное решение неоднородной системы (2.29) $\tilde{x}(t)$;

3) общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$x_{\text{обш}}(t) = x_{\text{од}}(t) + \tilde{x}(t).$$

Начнем с решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений (2.30).

Если выполнить в ней эйлерову замену $x = \exp(\lambda t)h$, где λ — некоторое число, действительное или комплексное, $h \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор, то получится алгебраическое равенство $\lambda \exp(\lambda t)h = A \exp(\lambda t)h$. Избавляясь от $\exp(\lambda t)$, получаем стандартную задачу на собственные числа и собственные векторы

$$\lambda h = Ah.$$

Не обсуждая здесь способы вычисления собственных чисел матрицы A и соответствующих им цепочек собственных и присоединенных векторов, будем считать, что нами уже найдены все такие цепочки, то есть имеется полный набор линейно независимых собственных и присоединенных векторов

$$\begin{array}{l} h_1 \rightarrow p_{11} \rightarrow \dots \rightarrow p_{1k_1-1}, \\ \text{\scriptsize $\dots\dots\dots$} \\ h_s \rightarrow p_{s1} \rightarrow \dots \rightarrow p_{sk_s-1}, \end{array} \quad (2.32)$$

где $k_1 + \dots + k_s = n$, между которыми в каждой цепочке выполнены соотношения

$$(A - \lambda E)h_j = 0, \quad (A - \lambda E)p_{j1} = h_j, \quad \dots, \quad (A - \lambda E)p_{jk_{j-1}} = p_{jk_{j-2}}.$$

Выпишем методику построения решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Выделим, как и выше для уравнений, три ситуации.

1. Считаем, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — вещественны и различны, тогда каждому собственному числу соответствует единственный с точностью до умножения на константу собственный вектор. Будем обозначать их $h_1, \dots, h_n$, тогда общее решение системы (2.30) имеет вид

$$x_{\text{ol}}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) h_1 + \cdots + c_n \exp(\lambda_n t) h_n. \quad (2.33)$$

2. Пусть имеется полный набор линейно независимых собственных и присоединенных векторов (2.32). Отметим, что каждому из собственных значений может соответствовать несколько цепочек. Решение системы (2.30) в этом случае записывается как

$$x_{\text{од}}(t) = \exp(\lambda_1 t) \left(c_{11} h_1 + c_{12} (t h_1 + p_{11}) + c_{13} \left(\frac{t^2}{2} h_1 + t p_{11} + p_{12} \right) + \dots \right. \\ \left. + c_{1k_1} \left(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} h_1 + \frac{t^{k_1-2}}{(k_1-2)!} p_{11} + \dots + p_{1k_1-1} \right) \right) + \dots \\ + \exp(\lambda_s t) \left(c_{s1} h_s + \dots + c_{sk_s} \left(\frac{t^{k_s-1}}{(k_s-1)!} h_s + \dots + p_{1k_s-1} \right) \right).$$

3. Случай комплексных собственных чисел разбирается, как и выше, на основе следующего простого утверждения: *пусть $z(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные вектор-функции, является решением системы (2.30) с вещественными коэффициентами, тогда вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ являются вещественными решениями системы (2.30).* Данное утверждение позволяет действовать следующим образом: сначала на основе методов двух предыдущих пунктов строится набор линейно независимых решений (2.30) в комплексной форме, а затем из них выделяются вещественные и мнимые части.

В связи с последним пунктом стоит упомянуть только о том, что комплексно сопряженным собственным числам матрицы A соответствуют комплексно сопряженные друг другу цепочки собственных и присоединенных векторов, а, следовательно, множество линейно независимых решений, получаемое на основе сопряженных собственных чисел, одно и то же. Тем самым, и вычислять цепочки, по ним решения, а потом вещественные и мнимые части от решений нужно только для одного из пары комплексно сопряженных собственных чисел.

Пример 2.6. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет трехкратное собственное число $\lambda = 2$, которому отвечает собственный вектор $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 2, следовательно, число линейно независимых собственных векторов $m = n - r = 1$, где $n = 3$ — порядок системы, r — ранг матрицы. Присоединенный вектор определяется из системы $(A - \lambda E)p = h$,

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 = 1, \\ 3p_1 - p_2 - p_3 = 2, \\ p_1 - p_3 = 1. \end{cases} \quad \text{возьмем} \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим вектор, присоединенный к q ,

$$(A - \lambda E)q = p, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной цепочки выпишем общее решение

$$\begin{aligned} x(t) = c_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(2t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \\ + c_3 \exp(2t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

□

Пример 2.7. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 & -2 \\ 1 & 4 - \lambda & -1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 3)^3 = 0,$$

$\lambda = 3$ кратности 3. Определим число линейно независимых собственных векторов. Решается система

$$(A - \lambda E)h = 0, \tag{2.34}$$

матрица которой

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

имеет порядок три, ее ранг равен единице, следовательно, число линейно независимых собственных векторов равно двум. Выбираем их из условия

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0,$$

поскольку остальные уравнения системы (2.34) линейно зависимы с данным. Число линейно независимых собственных векторов определяет количество цепочек, соответствующих данному собственному числу, то есть цепочек — две, и, учитывая, что кратность собственного числа три, необходимо найти один присоединенный вектор. Отметим, однако, что нужно одновременно определить, какому из собственных векторов он соответствует. Тем самым, необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (A - \lambda E)h^{(1)} = 0 \\ (A - \lambda E)p^{(1)} = h^{(1)} \end{cases}.$$

В данном случае конкретный вид системы следующий:

$$\begin{cases} h_1^{(1)} + h_2^{(1)} - h_3^{(1)} = 0 \\ 2p_1^{(1)} + 2p_2^{(1)} - 2p_3^{(1)} = h_1^{(1)} \\ p_1^{(1)} + p_2^{(1)} - p_3^{(1)} = h_2^{(1)} \\ 3p_1^{(1)} + 3p_2^{(1)} - 3p_3^{(1)} = h_3^{(1)} \end{cases}.$$

Левые части уравнений со второго по четвертое пропорциональны друг другу, следовательно, для правых частей выполнены равенства

$$\begin{cases} 2h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \\ 3h_2^{(1)} = h_3^{(1)} \end{cases},$$

учитывая их, находим собственный вектор $h^{(1)} = (2, 1, 3)^T$. Для вычисления присоединенного вектора получаем одно уравнение

$$p_1^{(1)} + p_2^{(1)} - p_3^{(1)} = 1,$$

в соответствии с которым присоединенный вектор можно выбрать, например, следующим: $p^{(1)} = (0, 1, 0)^T$. Таким образом, найдена цепочка $h^{(1)} \rightarrow p^{(1)}$ длины два, остается найти вторую цепочку длины один. На ее роль подходит любой собственный вектор линейно независимый с вектором из найденной выше цепочки. Выбирая $h^{(2)} = (1, 0, 1)$, запишем общее решение системы

$$x(t) = c_1 \exp(3t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \exp(3t) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

□

Пример 2.8. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & -3 \\ 0 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 9) = 0$$

и найдем собственные числа матрицы $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$. По ним определим собственные векторы, нетрудно видеть, что $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор $h_1 = (1, 0, 0)^T$, а комплексному собственному числу $\lambda_2 = 1 + 3i$ соответствует собственный вектор $h_2 = (2 - 2i, 3 + 2i, 2 - 3i)^T$. Вещественному собственному числу соответствует решение $e^{3t}h_1$, а комплексному — решение $\exp((1 + 3i)t)h_2$. У комплексного решения выделим вещественную и мнимую части

$$e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 2 - 2i \\ 3 + 2i \\ 2 - 3i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 3t + 2 \sin 3t \\ 3 \cos 3t - 2 \sin 3t \\ 2 \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 2 \sin 3t - 2 \cos 3t \\ 3 \sin 3t + 2 \cos 3t \\ 2 \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Полученное разложение позволяет выписать общее решение задачи

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 3t + 2 \sin 3t \\ 3 \cos 3t - 2 \sin 3t \\ 2 \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 2 \sin 3t - 2 \cos 3t \\ 3 \sin 3t + 2 \cos 3t \\ 2 \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix}.$$

□

Перейдем к следующему этапу решения исходной системы (2.29) — описанию способов построения частных решений. Как и в предыдущем пункте, выделяются два способа нахождения таких решений. Первый из них — метод неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородных линейных систем

Данный метод работает только для неоднородностей вида

$$f(t) = \exp(\alpha t)P(t),$$

где $P(t) = t^m P_0 + \dots + P_m$, $P_j \in \mathbb{R}^n$ ($j = 0, \dots, m$) — векторный многочлен порядка m , считаем $P_0 \neq 0$. Как и ранее, выделим два случая — резонансный и нерезонансный.

В первом из них число α не является собственным числом. Частное решение системы (2.29) при этом отыскивается в виде

$$\tilde{x}(t) = \exp(\alpha t)Q(t),$$

где $Q(t) = t^m Q_0 + \dots + Q_m$, $Q_j \in \mathbb{R}^n$ ($j = 0, \dots, m$) — векторный многочлен с пока еще не определенными коэффициентами той же степени, что и $P(t)$.

В резонансном случае число α совпадает с некоторым собственным числом матрицы A , кратность которого будем считать равной k . В этой ситуации общий вид функции не меняется, меняется лишь степень векторного многочлена $Q(t) = t^{m+k} Q_0 + \dots + Q_{m+k}$, которая оказывается равной сумме степени многочлена $P(t)$ и кратности собственного числа α . Отметим, что в данной ситуации, в отличие от линейных уравнений n -го порядка, нельзя просто умножить многочлен $Q(t)$ степени m на t^k .

Вычисление коэффициентов многочлена $Q(t)$ выполняется, как и для уравнений, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t .

Следует обратить внимание на возникающую в резонансном случае дополнительную трудность, которая состоит в том, что алгебраическая система относительно коэффициентов многочлена $Q(t)$ будет вырожденной. Рассмотрим пример, иллюстрирующий это.

Пример 2.9. Найти общее решение линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{2.35}$$

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \exp(t).$$

Решение. Решим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая к нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

найдем собственные числа матрицы A . Они оказываются равными $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, и им соответствуют собственные векторы $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это позволяет выписать общее решение однородной системы

$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения частного решения $\tilde{x}(t)$ неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.35) воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. В задаче (2.35) неоднородность $f(t)$ имеет вид $f(t) = \exp(\alpha t)P(t)$, где $P(t)$ – векторный многочлен нулевого порядка, а $\alpha = 1$ совпадает с собственным числом матрицы A $\lambda_2 = 1$, то есть имеем резонансный случай. В этой ситуации отыскиваем решение в виде $\tilde{x}(t) = \exp(t)Q(t)$, при этом степень векторного многочлена $Q(t)$ равна сумме степени многочлена $P(t)$ и кратности корня λ_2 . Таким образом, частное решение $\tilde{x}(t)$ представляется в виде

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} \exp(t),$$

а величины a, b, c, d находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t . После подстановки $\tilde{x}(t)$ в исходную систему уравнений (2.35) имеем

$$\begin{cases} a + at + b = 2at + 2b - 4ct - 4d, \\ c + ct + d = at + b - 3ct - 3d + 3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a = b - 4d, \\ a = 4c, \\ c = b - 4d + 3, \end{cases}$$

откуда $a = -4$, $c = -1$ определяются однозначно, а для нахождения b и d остается одно уравнение

$$b - 4d = -4,$$

решение которого можно выбрать, например, следующим образом:

$$b = 0, \quad d = 1.$$

Общее решение задачи (2.35) в этой ситуации имеет вид

$$x_{\text{общ}}(t) = c_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \exp(t) \begin{pmatrix} -4t \\ -t + 1 \end{pmatrix}.$$

□

Пример 2.10. Найти общее решение линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{2.36}$$

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \sin t \end{pmatrix} \exp(t).$$

Решение. Собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ матрицы A определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

им соответствуют собственные векторы $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тем самым, общее решение однородной системы имеет вид

$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Остается найти частное решение $\tilde{x}(t)$ неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.36). Перейдем от исходной системы к системе вида

$$\dot{z} = Az + F(t), \quad \text{где} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \quad (2.37)$$

для которой частное решение ищем в виде

$$z_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \quad \text{причем} \quad \tilde{x} = \text{Im}(z_1).$$

Подставляя z_1 в систему (2.37), определяем $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$,

$$z_1 = \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 + 3i \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \quad z_1 = \exp(t) \left(\begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} \right),$$

отсюда частное решение системы (2.36) оказывается равным

$$\tilde{x}(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Поскольку общее решение системы (2.36) имеет вид $x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{од}}(t) + \tilde{x}$, имеем

$$x_{\text{общ}}(t) = c_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \exp(t) \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

□

Метод вариации произвольной постоянной

Второй способ получения частного решения неоднородной системы (2.29) называется методом вариации произвольной постоянной и состоит, как и для линейных уравнений первого порядка, в замене

$$x(t) = \Phi(t)z(t), \quad (2.38)$$

где $\Phi(t)$ — матрица-функция, столбцы которой представляют собой линейно независимые решения $\varphi_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) однородной системы (2.30). Матрица $\Phi(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (2.30) и удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\Phi} = A \cdot \Phi. \quad (2.39)$$

После подстановки замены (2.38) в (2.29) имеем

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)z(t)) = A\Phi(t)z(t) + f(t).$$

Дифференцируя выражение в левой части и учитывая соотношение (2.39), получаем

$$\Phi(t)\dot{z}(t) = f(t). \quad (2.40)$$

Учитывая, что матрица $\Phi(t)$ не вырождена, нетрудно найти

$$\dot{z}(t) = \Phi(t)^{-1}f(t),$$

а затем определить

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1}f(\tau) d\tau,$$

что позволяет получить формулу для решения системы (2.29) с начальным условием $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1}f(\tau) d\tau \right).$$

Важно отметить, что описанный способ получения решения неоднородной системы (2.29) сохраняется и в случае, если матрица A зависит от t . Требование только одно: необходимо найти набор из n линейно независимых решений $\varphi_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) однородной системы (2.30) или, иначе говоря, найти фундаментальную матрицу $\Phi(t)$.

Пример 2.11. Найти общее решение линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t),$$

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^{-1/2} \\ t^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Решение. Решим сначала однородную систему. Характеристическое уравнение ее матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3.$$

Нетрудно видеть, что нулевому собственному числу соответствует собственный вектор $h_1 = (1, 1)^T$, а $\lambda_2 = 3$ — собственный вектор $h_2 = (1, -2)^T$, откуда следует, что общее решение однородной системы имеет вид

$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что неоднородность не является квазимногочленом, применим метод вариации произвольной постоянной и будем искать частное решение в виде

$$\tilde{x}(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2.40) имеем

$$\dot{c}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{c}_2(t) \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1/2} \\ t^{-1/2} \end{pmatrix},$$

откуда вычисляем

$$\dot{c}_1(t) = t^{-1/2}, \quad \dot{c}_2(t) = 0.$$

Интегрируя последние равенства, имеем

$$c_1(t) = \sqrt{t} + c_1, \quad c_2(t) = c_2.$$

Тем самым, общее решение задачи приобретает вид

$$x_{\text{общ}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

□

2.4. Матричная экспонента и способы ее вычисления

Определение матричной экспоненты квадратной $n \times n$ матрицы A дается обычно в виде ряда

$$e^{tA} \stackrel{\text{def}}{=} E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (2.41)$$

Отметим несколько ее свойств, следующих из определения

- 1) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$;
- 2) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$, т. е. e^{tA} есть решение линейной однородной системы (2.30);
- 3) $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют. Следствием этого свойства является соотношение $e^{t_1A} \cdot e^{t_2A} = e^{(t_1+t_2)A}$ для любых действительных t_1, t_2 ;
- 4) пусть T — неособая $n \times n$ матрица, тогда $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$.

Для вычисления матричной экспоненты матрицы A обычно находят неособое преобразование T , приводящее матрицу A к жордановой форме, и в соответствии со свойством 4 вычисление матричной экспоненты сводят к нахождению матричной экспоненты жордановой формы матрицы.

Предположим, что $T^{-1}AT = J$, где $J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$, а жорданов блок имеет вид

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Учитывая, что $e^{tJ} = \text{diag}\{e^{tJ_1}, e^{tJ_2}, \dots, e^{tJ_s}\}$, остается лишь найти матричную экспоненту от единичного блока Жордана. Соответствующая формула имеет вид

$$e^{tJ_k} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, s. \quad (2.42)$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [7] (см. также [8]). Окончательный вид матричной экспоненты оказывается следующим:

$$e^{tA} = T \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_s} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где e^{tJ_k} ($k = 1, \dots, s$) определяются по формулам (2.42).

Опишем несколько иной способ нахождения матричной экспоненты, основанный на свойстве 2. Найдем общее решение системы (2.30) и составим из полученных n линейно независимых решений фундаментальную матрицу $\Phi(t)$. Учитывая, что для любой невырожденной матрицы B выражение $\Phi(t)B$ также является фундаментальной матрицей, выберем B так, чтобы эта матрица обращалась в единичную при $t = 0$. Из условия $\Phi(0)B = E$ имеем $B = \Phi(0)^{-1}$. Тем самым, матрица $\Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$ является фундаментальной и обращается в единичную матрицу в нуле. Тогда, в силу непосредственно следующего из определения матричной экспоненты условия $e^{0 \cdot A} = E$ и теоремы существования и единственности, имеем в случае постоянной матрицы A

$$e^{tA} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}.$$

Данный способ нахождения матричной экспоненты позволяет немного упростить процесс ее вычисления, особенно в случае комплексных собственных чисел матрицы A .

Пример 2.12. Построить матричную экспоненту матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.43)$$

Определим собственные числа и собственные векторы матрицы A . Характеристический многочлен $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поскольку они комплексно сопряженные, достаточно будет определить один собственный вектор (второй будет комплексно сопряженным). Для $\lambda = i$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -5 & -2-i \end{pmatrix} h = 0, \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix}.$$

Так как $\exp(it) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$,
то общее решение системы (2.43)

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Возьмем $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -2 \cos t - \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$, тогда $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,
 $X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и из равенства $e^{tA} = X(t)X^{-1}(0)$ имеем

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t & \sin t \\ -5 \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

□

Пример 2.13. Построить матричную экспоненту матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матричная экспонента для матрицы tA определяется разложением вида (2.41). Поскольку $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, имеем

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!}A = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}.$$

□

3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений

В этом разделе рассмотрим методы исследования устойчивости решений системы

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (3.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ — непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция векторного аргумента, для которой в некоторой области начальных условий выполнена теорема существования и единственности так, что решение единственным образом продолжается по t до бесконечности.

Будем называть выделенное предложение условием 1. Оно позволяет ввести понятие устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.1).

Определение 3.1. Решение $\varphi^*(t)$ системы (3.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых решений (3.1) с начальными условиями $\|x(t_0) - \varphi^*(t_0)\| < \delta$ выполнено $\|x(t) - \varphi^*(t)\| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.

Определение 3.2. Решение $\varphi^*(t)$ системы (3.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $r > 0$ такое, что для всех решений системы (3.1) с начальными условиями $\|x(t_0) - \varphi^*(t_0)\| < \delta$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \varphi^*(t)\| = 0.$$

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения линейной системы.

Пример 3.1. Исходя из определений 3.1, 3.2 доказать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x. \quad (3.2)$$

Решение. Способы нахождения общего решения задачи (3.2) описаны в предыдущей главе. В соответствии с ними найдем сначала собственные числа и собственные векторы матрицы системы. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, откуда $\lambda = -2$ кратности 2. Для определения собственных векторов имеем $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, что дает $h_1 = -h_2 = 1$, то есть $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найдем теперь присоединенный вектор $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, откуда $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Зная собственный и присоединенный векторы, легко выписать общее решение

$$x(t) = C_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-2t) \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

В нулевой момент времени имеем $x(0) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix}$. Для определенности будем считать норму в определении 3.1 евклидовой, тогда $\|x(0)\| = \sqrt{(C_1 + C_2)^2 + C_1^2}$. Учитывая, что $\|x(0)\| < \delta$, имеем

$$|C_1| < \delta \text{ и } |C_2| = |C_2 + C_1 - C_1| < |C_1 + C_2| + |C_1| < 2\delta. \quad (3.4)$$

Оценим теперь норму решения для $t > 0$

$$\|x(t)\| = \exp(-2t) \sqrt{(C_1 + C_2(t+1))^2 + (C_1 + C_2t)^2}.$$

Оценка подкоренного выражения с помощью неравенств (3.4) дает

$$\begin{aligned} (C_1 + C_2(t+1))^2 + (C_1 + C_2t)^2 &= (C_1 + C_2)^2 + C_1^2 + (4C_1C_2 + C_2^2)t + C_2^2t^2 < \\ < (C_1 + C_2)^2 + 2|C_1 + C_2|C_2t + C_1^2 + 2|C_1||C_2|t + C_2^2t^2 < \delta^2(2 + 8t + 4t^2). \end{aligned}$$

Дадим еще более грубую оценку, чтобы извлечь корень, получаем

$$\|x(t)\| < \exp(-2t)\delta(2t+1).$$

Выделим в правой части неравенства функцию $\varphi(t) = \exp(-t)(2t+1)$, которая в нуле равна единице, а при $t \rightarrow +\infty$ стремится к нулю. Вычисляя производную этой функции $\dot{\varphi}(t) = (-2t+1)\exp(-t)$, находим точку локального максимума $t = 0.5$. Значение в этой точке $\varphi(0.5) = 2e^{-1/2}$ ограничивает функцию $\varphi(t)$ сверху при $t > 0$. Заведомо огрубляя оценку, считаем $\varphi(t) < 2$, откуда

$$\|x(t)\| < \delta \exp(-t)\varphi(t) < 2\delta \exp(-t).$$

Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, тогда из получившегося неравенства для всех $t > 0$ $\|x(t)\| < \varepsilon$, что позволяет завершить обоснование устойчивости.

Для доказательства асимптотической устойчивости в предыдущих рассуждениях заменим δ на r , тогда при $\|x(0)\| < r$ получаем неравенство $\|x(t)\| < 2r \exp(-t)$, из которого при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$. $\square$

Приведенный пример показывает, что доказательство устойчивости непосредственно по определению — дело достаточно хлопотное. В то же время из вида решения (3.3) вполне понятно, что оно должно стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, весьма насущной и активно применяемой является следующая теорема, лежащая в основе так называемого первого метода Ляпунова.

3.1. Первый метод Ляпунова

Вернемся к системе (3.1), будем считать, что она имеет решение $\varphi^*(t)$ и выполнено сформулированное в начале раздела условие 1 о существовании и единственности решений и их продолжимости по t до $+\infty$. Выполним в (3.1) замену $x = \varphi^*(t) + u$ и выделим в функции правой части нулевой и первый по u члены в разложении в ряд Тейлора в нуле

$$\dot{\varphi}^*(t) + \dot{u} = F(t, \varphi^* + u) \equiv F(t, \varphi^*) + \left. \frac{DF}{dx} \right|_{x=\varphi^*} \cdot u + F_2(t, u).$$

Здесь

$$\left. \frac{DF}{Dx} \right|_{x=\varphi^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=\varphi^*}$$

— матрица Якоби вектор-функции F , а $F_2(t, u)$ — остаток. Поскольку $\varphi^*(t)$ — решение системы (3.1), имеем

$$\dot{u} = \left. \frac{DF}{Dx} \right|_{x=\varphi^*} \cdot u + F_2(t, u). \quad (3.5)$$

Учитывая, что устойчивость нулевого решения (3.5) эквивалентна устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.4), сформулируем теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 3.1 (Об устойчивости по первому приближению). *Предположим, что*

- 1) матрица $A = \left. \frac{DF}{Dx} \right|_{x=\varphi^*}$ постоянная;
- 2) для нелинейности равномерно по $t > 0$ выполнена оценка $\|F_2(t, u)\| \leq C\|u\|^2$, где C — некоторая константа.

Тогда нулевое решение системы (3.5) асимптотически устойчиво (неустойчиво), если собственные числа матрицы A лежат в левой комплексной полуплоскости (хотя бы одно справа).

Замечание 3.1. Условия 1, 2 теоремы 3.1 автоматически выполнены для автономных систем (правая часть (3.5) не зависит от t).

Пример 3.2. При каких значениях параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Решение. Поскольку для нелинейных членов $\psi_1(t, x, y) = x^2$, $\psi_2(t, x, y) = xy$ справедливы оценки $\|\psi_1\| \leq \|z\|^2$, $\|\psi_2\| \leq \|z\|^2$, где $\|z\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$, то будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Запишем характеристический многочлен соответствующей матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + (-a - 1)\lambda + a + 2 = 0.$$

Для асимптотической устойчивости квадратного трехчлена необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты были положительны. Отсюда получаем $-a - 1 > 0$ и $a + 2 > 0$ или окончательно $-2 < a < -1$. $\square$

Устойчивость многочленов

Применение первого метода Ляпунова так или иначе приводит к анализу расположения корней некоторых многочленов. Вычисление корней представляет собой достаточно сложную задачу, поэтому появилась необходимость в критериях устойчивости, с помощью которых о расположении корней можно судить по коэффициентам многочлена. *Многочлен*

$$l(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.6)$$

будем называть устойчивым, если все его корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

Критерий Рауса–Гурвица ставит устойчивость многочлена в зависимость от положительной определенности некоторой матрицы. Введем в рассмотрение матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Матрица Гурвица составляется по следующему правилу. По главной диагонали выписываются коэффициенты многочлена (3.6), начиная с a_1 и заканчивая a_n . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a_0 . Все остальные элементы матрицы a_i , отвечающие коэффициентам с индексами $i > n$ или $i < 0$, полагаются равными нулю.

Теорема 3.2 (Критерий Рауса–Гурвица). Пусть $a_0 > 0$, многочлен $l(\lambda)$ устойчив тогда и только тогда, когда матрица Гурвица положительно определена.

Отметим, что положительную определенность матрицы удобно проверять с помощью критерия Сильвестра, согласно которому необходимым и достаточным является условие положительности всех ее главных диагональных миноров.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \dots, \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0. \quad (3.8)$$

В случае, если дополнительно известно, что все $a_j > 0$ (это условие является необходимым, но не достаточным), можно воспользоваться критерием Лъенара–Шипара.

Критерий Лъенара–Шипара. Для устойчивости многочлена $l(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, ..., где Δ_i те же, что в (3.8).

Данные условия равносильны условиям Рауса–Гурвица.

Пример 3.3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b$?

Решение. Многочлен устойчив, если его корни лежат в левой комплексной полуплоскости, то есть $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Запишем условия Лъенара–Шипара: $a > 0$, $b > 0$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = a - b - a^2 > 0, \quad \text{откуда следует, что } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < a - a^2 \end{cases}.$$

Полученная область изображена на рис. 2.

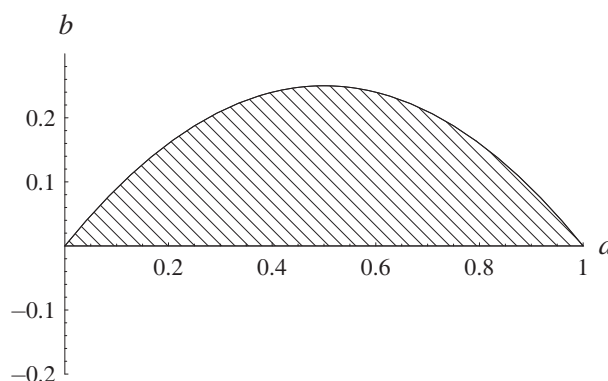


Рис. 2.

□

В некоторых случаях для проверки устойчивости многочленов можно пользоваться частотным критерием Михайлова. Его формулировка выглядит следующим образом.

Критерий Михайлова. Для устойчивости многочлена $l(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и чтобы корни многочленов

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \dots,$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \dots$$

были вещественными, положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1 , то есть

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$$

Пример 3.4. Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь критерием Михайлова

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0. \quad (3.9)$$

Решение. Составим характеристический многочлен уравнения (3.9) $l(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3$. В нашем случае $a_n = a_3 = 3 > 0$, $a_{n-1} = a_2 = 2 > 0$, многочлены $p(\xi) = 3 - 2\xi$, $q(\eta) = 2 - \eta$ имеют корни $\xi^* = 3/2$, $\eta^* = 2$. Значит, $0 < \xi^* < \eta^*$, по критерию Михайлова все корни многочлена $l(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части и нулевое решение уравнения (3.9) асимптотически устойчиво. □

3.2. Метод функций Ляпунова

Нетрудно видеть, что первый метод Ляпунова не работает, если, с одной стороны, не выполнены условия 1, 2 и, с другой — часть собственных чисел матрицы A лежит на мнимой оси, в то время как все остальные — в левой комплексной полуплоскости. Этим недостатком лишен второй метод Ляпунова. Учитывая, что задачу об устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.1) можно путем сдвига на это решение заменить задачей об устойчивости нуля, будем считать, что в (3.1) $F(t, 0) \equiv 0$. И ниже изучим вопрос об устойчивости нулевого решения (3.1).

Для формулировки второго метода введем понятие функции Ляпунова. *Под функцией Ляпунова будем понимать непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных в некоторой окрестности точки нуль функцию $V(x)$, которая положительно определена в этой области, то есть $V(x)$ неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $x = 0$. Определим, кроме того, производную функции $V(x)$ в силу системы (3.1)*

$$W(t, x) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot F_k(t, x). \quad (3.10)$$

Выполнены следующие две теоремы об устойчивости, составляющие основу второго метода Ляпунова.

Теорема 3.3 (Об устойчивости). Пусть $V(x)$ — положительно определенная в нуле непрерывно дифференцируемая функция, пусть ее производная в силу системы (3.1) неположительна

$$W(t, x) \leq 0$$

в некоторой окрестности нулевого решения системы (3.1). Тогда это решение устойчиво по Ляпунову.

Теорема 3.4 (Об асимптотической устойчивости). Пусть выполнены условия теоремы 3.3 и, кроме того, существует такая положительно определенная функция $W^*(x)$, что

$$W(t, x) \leq -W^*(x) \quad (3.11)$$

в некоторой окрестности точки нуль, тогда нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Прежде чем перейти к примерам, опишем способ выбора функции Ляпунова для линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.12)$$

в случае когда ее нулевое решение заведомо асимптотически устойчиво, т. е. при условии, что собственные числа матрицы A лежат в левой комплексной полуплоскости.

Будем предполагать, что собственные числа матрицы A простые или им соответствует столько собственных векторов, какова их кратность. Построим неособое преобразование T , состоящее из собственных векторов матрицы A , а в случае комплексно сопряженных собственных чисел — из вещественных и мнимых частей одного из комплексно сопряженных собственных векторов. В этом случае матрица

$J = T^{-1}AT$, либо имеет диагональный вид с вещественными собственными числами на главной диагонали, либо для комплексных собственных чисел $\tau \pm i\omega$ имеет блочно-диагональный вид с 2×2 блоками вида

$$\begin{pmatrix} \tau & \omega \\ -\omega & \tau \end{pmatrix}.$$

Выполним в (3.12) замену $x = Tz$, тогда для новых переменных имеем

$$\dot{z} = Jz, \quad (3.13)$$

где J — жорданова форма матрицы A . Построение функции Ляпунова для задачи (3.13) тривиально, поскольку функция

$$V(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2 \equiv (z, z)$$

очевидным образом подходит для исследования устойчивости этой системы. Производная $V(z)$ в силу системы (3.13) (см. формулу (3.10)) имеет вид

$$W(z) = 2z_1\dot{z}_1 + \dots + 2z_n\dot{z}_n = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(\lambda_j) z_j^2$$

и отрицательно определена в силу отрицательности вещественных частей собственных чисел матрицы A .

Возвращаясь к исходным переменным, нетрудно получить функцию Ляпунова и для системы (3.12)

$$V(x) = (T^{-1}x, T^{-1}x). \quad (3.14)$$

Рассмотрим два примера построения функции Ляпунова для линейных систем.

Пример 3.5. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x. \quad (3.15)$$

Решение. Для определения собственных чисел матрицы системы выпишем ее характеристический многочлен $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Корни многочлена комплексны и имеют вид $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Собственный вектор матрицы системы, соответствующий собственному числу $\lambda = -1 + 2i$, оказывается равен $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$. Выделяя вещественную и мнимую части полученного вектора, можно сформировать матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что матрица T является инволютивной, то есть обратной к самой себе $T^{-1} = T$. Это позволяет отыскивать функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = (T^{-1}x, T^{-1}x) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

Вычислим теперь производную полученной функции Ляпунова в силу системы (3.15)

$$W(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2).$$

Подстановка $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ из правых частей (3.15) и простые преобразования дают

$$W(x) = -2x_1^2 - 2(x_1 + x_2)^2.$$

Условие (3.11) отрицательной определенности функции $W(x)$ выполняется в данном случае очевидным образом, что влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.15). $\square$

Пример 3.6. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x. \quad (3.16)$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы системы (3.16) имеет вид $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, его корни оказываются равными $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Собственные векторы, соответствующие этим собственным числам, имеют вид $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ соответственно. Составим матрицу преобразования T из данных векторов $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ и найдем к ней обратную $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зная T^{-1} , нетрудно найти функцию Ляпунова:

$$V(x) = (T^{-1}x, T^{-1}x) = \left(\begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1 + x_2)^2 + (3x_1 + 2x_2)^2.$$

Вычисление производной функции Ляпунова в силу системы (3.16) приводит к равенствам

$$W(x) = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2(3x_1 + 2x_2)(3\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2)$$

или после преобразований

$$W(x) = -2(x_1 + x_2)^2 - 4(3x_1 + 2x_2)^2.$$

Полученная функция $W(x)$ отрицательно определена, что влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.16). $\square$

Рассмотрим теперь пример построения функции Ляпунова для нелинейной системы. Естественно, наибольший интерес вызывают задачи, для которых не работает первый метод Ляпунова.

Пример 3.7. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - (x + y)^3, \\ \dot{y} = x + y - (x + 2y)^3. \end{cases}$$

Решение. Выделяя в системе линейную часть и вычисляя собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем $\lambda_{1,2} = \pm i$, что означает неприменимость теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Выберем функцию Ляпунова так, чтобы избавиться от слагаемых линейной части, возьмем для этого положительно определенную функцию $V(x, y) = (x + y)^2 + y^2$. Ее производная в силу системы оказывается равной

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2(x + y)(-x - 2y - (x + y)^3) + 2(x + 2y)(x + y - (x + 2y)^3).$$

После преобразований имеем

$$W(x, y) = -2(x + y)^4 - 2(x + 2y)^4.$$

Таким образом, $V(x, y)$ положительно, а $W(x, y)$ отрицательно определены, что позволяет говорить об асимптотической устойчивости нулевого решения исследуемой системы. $\square$

Пример 3.8. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия уравнения математического маятника

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0. \quad (3.17)$$

Решение. Перейдем от уравнения (3.17) к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \end{cases} \quad (3.18)$$

Выделяя в ней линейную часть и вычисляя собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Это означает, что и в данном примере неприменима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Выберем функцию Ляпунова равной $V(x, y) = 2\omega^2(1 - \cos x) + y^2$. Нетрудно видеть, что эта функция положительно определена.

Ее производная в силу системы вычисляется по формулам

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2\omega^2 \sin x \cdot y + 2y \cdot (-\omega^2 \sin x)$$

и тождественно равна нулю. Таким образом, в соответствии с теоремой 3.3 нулевое решение системы (3.18) устойчиво по Ляпунову. Отметим, что построенная функция Ляпунова является первым интегралом системы (3.18). $\square$

Среди критериев неустойчивости выделим теорему Четаева [12] в одном из простейших вариантов (см. книгу [9]). Ниже будем обозначать $\omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \delta\}$ δ -окрестности начала координат.

Теорема 3.5 (Н. Г. Четаев). Пусть в некоторой окрестности точки нуль имеется непрерывно дифференцируемая функция $v(x)$ такая, что

- 1) в любой δ -окрестности ω_δ нуля существует точка x такая, что $v(x) > 0$, а значит, существует $\alpha > 0$ и подобласть данной окрестности, в которой $v(x) > \alpha$;
- 2) для любого $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что из условия $x \in \omega_\beta$ и $v(x) > 0$ следует неравенство $w(t, x) \geq \alpha$, справедливое для всех $t > 0$.

Тогда нулевое решение системы (3.1) неустойчиво.

В книге [2] (см. также [8]) предложен вариант теоремы Четаева, проверка условий которой осуществляется чуть проще, чем условия теоремы 3.5.

Теорема 3.6 (Н. Г. Четаев). Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ определена и непрерывно дифференцируема функция $v(x)$ так, что

- 1) точка нуль принадлежит границе области D ;
- 2) существует такое ε , что все точки $x \in \omega_\varepsilon$ такие, что $v(x) = 0$ принадлежат границе области D ;
- 3) в области D $v(x) > 0$ и производная в силу системы (3.1) $w(x) > 0$ для всех $t > 0$.

Тогда нулевое решение системы (3.1) неустойчиво.

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую условиям теорем 3.5 или 3.6, часто называют функцией Четаева.

Перейдем к примерам, иллюстрирующим последнее утверждение. В первую очередь рассмотрим линейную двумерную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.19)$$

с 2×2 матрицей A , имеющей одно положительное $\lambda_1 > 0$ и одно отрицательное $\lambda_2 < 0$ собственные значения, которым соответствуют собственные векторы h_1 и h_2 . Неустойчивость нулевого решения этой системы следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, в связи с этим требуется найти способ получения функции Четаева. Выполним, как и ранее, в системе (3.19) замену $x = Tz$, где 2×2 матрица T состоит из векторов-столбцов h_1 и h_2 , тогда для новых переменных имеем

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2. \end{cases}$$

Для полученной системы в качестве функции Четаева выберем следующее выражение: $v(z) = z_1^2 - z_2^2$, которое неотрицательно в области $|z_1| \geq |z_2|$ и обращается в нуль при $|z_1| = |z_2|$. Вычислим для нее производную в силу системы $w(z) = \lambda_1 z_1^2 - \lambda_2 z_2^2$. Эта функция в силу выбора знаков собственных чисел положительно определена, поэтому в области $D = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \geq |z_2|\}$ (как, впрочем, и в области $D = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \leq -|z_2|\}$) выполнены условия теорем 3.5 и 3.6. Отметим, что для получения функции Четаева исходной задачи (3.19) достаточно выполнить обратную замену переменных $z = T^{-1}x$.

Пример 3.9. Исследовать устойчивость нулевого решения с помощью второго метода Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Решение. Возьмем в этой задаче функцию Четаева вида $v(x, y) = xy$, тогда $w(x, y) = x^2 + y^2$. Проверим условия теоремы Четаева 3.6. Очевидно, что $v(x, y) > 0$ при $x > 0$ и $y > 0$. Выбирая в качестве области D любой из секторов, в котором $v(x, y) \geq 0$, $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ или $D = \{(x, y) | x \leq 0, y \leq 0\}$, убеждаемся, что внутри этих областей $v(x, y) > 0$, а на границе при $x = 0$ или $y = 0$ обращается в ноль. Вместе с тем, $w(x, y)$ положительно определена. Следовательно, нулевое решение задачи неустойчиво. □

Пример 3.10. С помощью второго метода Ляпунова исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

Решение. Возьмем функцию $v(x, y) = x^4 - y^4$, тогда

$$w(x, y) = 4x^3(x^5 + y^3) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8).$$

Проверим условия теоремы Четаева. Очевидно, что $v(x, y) > 0$ при $|x| > |y|$. Выбирая в качестве области D любой из секторов, в котором $v(x, y) \geq 0$, убеждаемся, что в этой области $v(x, y) > 0$ одновременно с $w(x, y) > 0$. Следовательно, нулевое решение задачи неустойчиво. □

3.3. Построение фазового портрета системы на плоскости

Рассмотрим задачу построения траектории двумерной линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Фазовой плоскостью системы (3.20) будем называть плоскость (x_1, x_2) , а траекториями на ней — кривые, параметрически заданные ее решением $(x_1(t), x_2(t))^T$. Алгоритм получения решения системы (3.20) изложен в предыдущей главе, построение решения в этой ситуации зависит от собственных чисел и собственных векторов матрицы системы. Классификацию фазовых портретов системы (3.20) выполним в зависимости от собственных чисел матрицы A .

I. Пусть λ_1, λ_2 — вещественные, различные, ненулевые собственные числа матрицы A . В этом случае общее решение системы (3.20) имеет вид

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) h_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) h_2,$$

где h_1, h_2 — собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2 . Величины

$$\xi_1 = C_1 \exp(\lambda_1 t), \text{ и } \xi_2 = C_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (3.21)$$

представляют собой координаты точки траектории в базисе h_1, h_2 . С помощью соотношений (3.21) выразим ξ_1 через ξ_2 :

$$\xi_1^{\lambda_2} = C_1^{\lambda_2} \exp(\lambda_1 \lambda_2 t), \quad \xi_2^{\lambda_1} = C_2^{\lambda_1} \exp(\lambda_1 \lambda_2 t)$$

$$|\xi_2| = C |\xi_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad (3.22)$$

где $C = \left(\frac{|C_2|^{\lambda_1}}{|C_1|^{\lambda_2}} \right)^{1/\lambda_1}$. В зависимости от знака показателя степени, формулы (3.22) дают кривые параболического или гиперболического типа.

1. Пусть $\lambda_2/\lambda_1 > 0$, тогда *фазовый портрет системы (3.20) называется узлом*. Будем выделять два случая:

- 1.а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ — неустойчивый узел;
- 1.б) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ — устойчивый узел.

Отметим еще, что при $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ фазовые траектории касаются прямой, соответствующей собственному направлению h_1 , а при $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| > 1$ — направлению h_2 .

На рисунке 3 представлен устойчивый узел в случае $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.

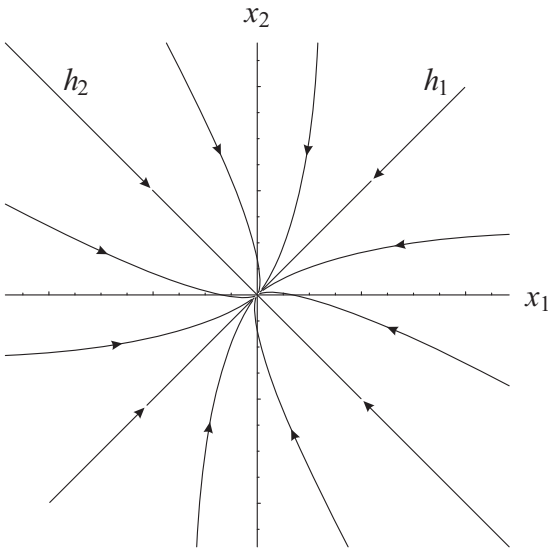


Рис. 3.

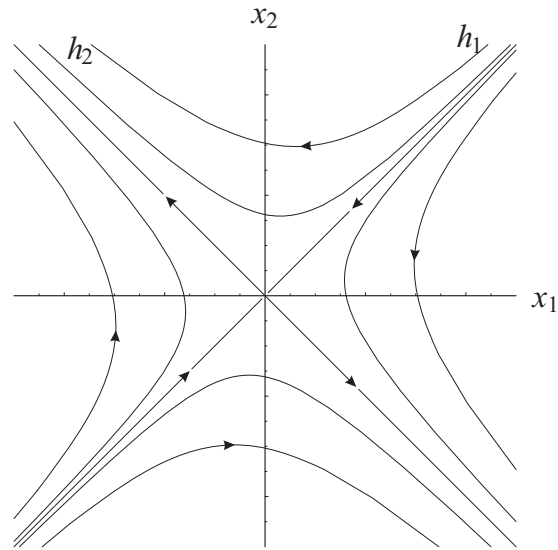


Рис. 4.

2. Пусть $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, тогда формулой (3.22) определяются кривые типа гипербол. Фазовый портрет системы (3.20) называется в этом случае седло. На рисунке 4 представлен схематический вид седлового состояния равновесия на плоскости.

II. Пусть теперь собственные числа матрицы A комплексно сопряжены, то есть $\lambda = \tau \pm i\omega$. Решение системы (3.20) строится в этом случае следующим образом: вычисляется собственный вектор $h = u + iv$, соответствующий собственному числу

$\tau + i\omega$, затем у комплексного решения $(u + iv) \exp[(\tau + i\omega)t]$ выделяются вещественная и мнимая части и общее решение выписывается в виде

$$x = C_1 \exp(\tau t)(u \cos \omega t - v \sin \omega t) + C_2 \exp(\tau t)(u \sin \omega t + v \cos \omega t). \quad (3.23)$$

Собирая коэффициенты при векторах u и v и заменяя $\rho = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\gamma = \arctg(C_2/C_1)$, преобразуем (3.23) к виду

$$x = \rho \exp(\tau t)[u \cos(\omega t - \gamma) - v \sin(\omega t - \gamma)]. \quad (3.24)$$

Выделим два случая:

1. $\tau = 0$. *Фазовый портрет* в этом случае называется *центр*.

Формула (3.24) дает замкнутые кривые в силу $2\pi/\omega$ — периодичности решений. Эти замкнутые кривые представляют собой концентрические эллипсы с главными осями u и v (покажите!). Величина ρ определяет размах колебаний, ее изменение приводит к переходу с одного эллипса на другой, изменение же параметра γ приводит лишь к сдвигу изображаемой точки в пределах одной и той же траектории. На рисунке 5 изображен пример фазового портрета типа центр. Для определения направления вра-

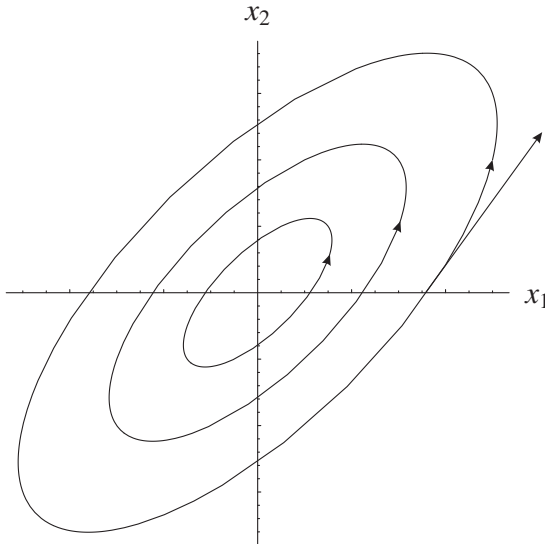


Рис. 5.

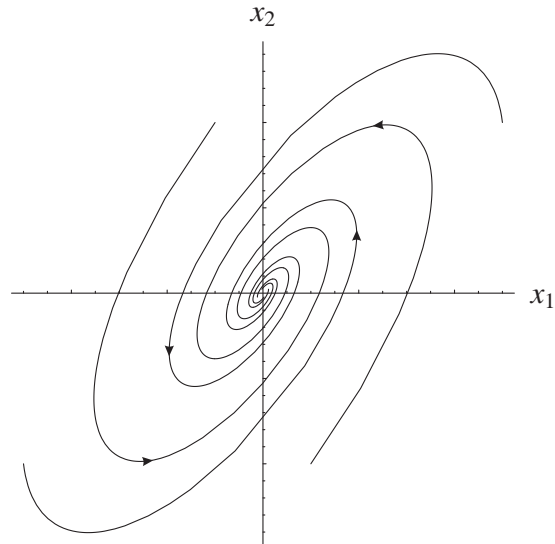


Рис. 6.

щения выбирается какая-либо точка на фазовой плоскости, например $(1, 0)^T$, тогда направление движения в этой точке вычисляется из (3.20) по формуле

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}.$$

2. Перейдем к ситуации, когда $\tau \neq 0$. *Фазовый портрет* в этом случае называется *фокусом*. Амплитуда колебаний, имеющая вид $\rho \exp(\tau t)$, растет, если $\tau > 0$, и убывает, если $\tau < 0$. В первом из этих случаев фокус называется неустойчивым, а во втором — устойчивым. На рисунке 6 представлен пример устойчивого фокуса. Направление вращения определяется здесь так же, как и для состояния равновесия центр.

Отдельно рассмотрим случай, когда одно из собственных чисел равно нулю (вырожденный узел), и случай вещественных кратных корней.

А. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, тогда решение системы (3.20) имеет, в силу (1.а), вид

$$x(t) = C_1 h_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) h_2.$$

Легко видеть, что при $C_2 = 0$ $x(t)$ — величина постоянная и вся прямая $C_1 h_1$ заполнена состоянием равновесия. Остальные траектории представляют собой параллельные прямые, движение вдоль которых происходит к некоторой точке на прямой $C_1 h_1$ при $\lambda_2 < 0$ и от этой прямой при $\lambda_2 > 0$. На рисунке 7 изображен этот фазовый портрет при $\lambda_2 < 0$.

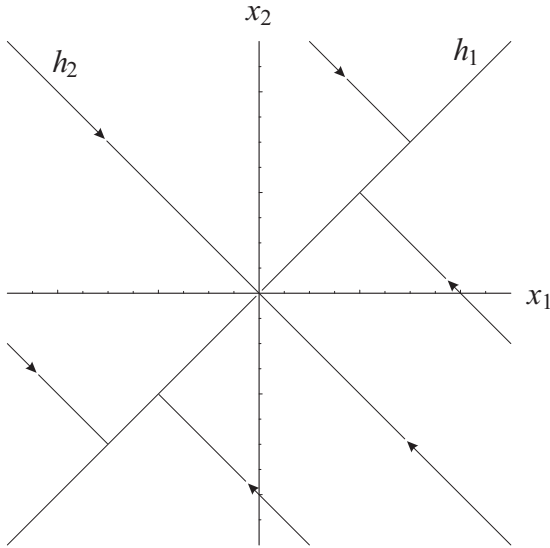


Рис. 7.

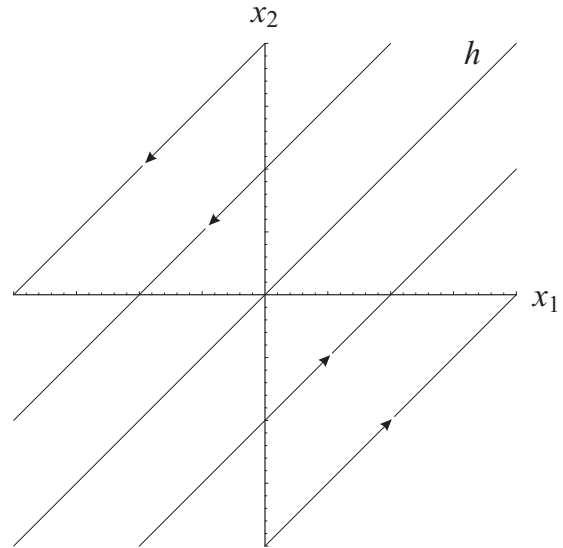


Рис. 8.

Б. Пусть теперь $\lambda_{1,2} = 0$, тогда необходимо рассмотреть два подслучая.

Первый из них возникает, если имеется два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному числу λ . Данный случай реализуется только при $A = 0$ — это означает, что все точки плоскости являются невырожденными точками для системы (3.20).

Второй подслучай реализуется, если имеется цепочка из собственного вектора h и присоединенного вектора. Решение системы (3.20) при этом имеет вид

$$x(t) = C_1 h + C_2 (th + p). \quad (3.25)$$

Из получившегося соотношения видно, что при $C_2 = 0$ имеем однопараметрическое множество неподвижных точек, заполняющее направление $C_1 h$, а при $C_2 \neq 0$ фазовый портрет системы представляет собой множество параллельных прямых, направление движений на которых определяется по тому же правилу, что и направление вращения для фокуса или центра.

Последним рассмотрим случай узла с кратными корнями. Как и для нулевого собственного числа, следует рассмотреть две ситуации. Обозначим λ — корень кратности 2 матрицы A .

Пусть сначала h_1 и h_2 — линейно независимые собственные векторы, тогда $x(t) = (C_1 h_1 + C_2 h_2) \exp(\lambda t)$, то есть любая прямая, проходящая через нуль, является собственным направлением. Схематический вид данного фазового портрета изображен на рисунке 9 при $\lambda < 0$.

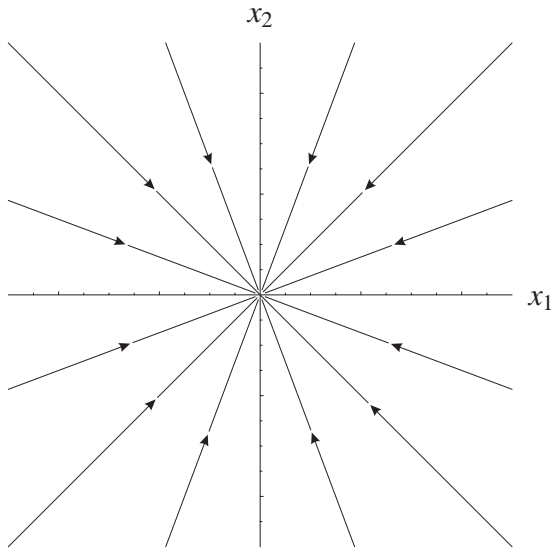


Рис. 9.

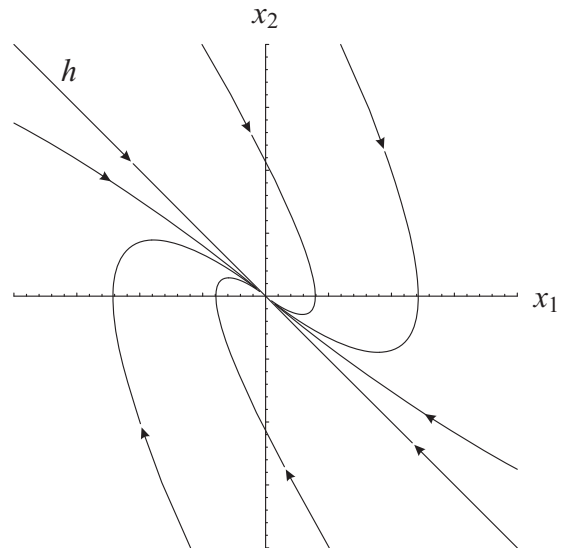


Рис. 10.

Пусть теперь собственному числу λ кратности 2 соответствуют собственный h и присоединенный p векторы, тогда решение линейной системы (3.20) имеет вид

$$x(t) = \exp(\lambda t)(C_1 h + C_2(th + p)).$$

Фазовый портрет в данном случае приведен на рисунке 10 в предположениях, что $\lambda < 0$.

Для того чтобы выяснить, по какую сторону относительно точки нуль траектории касаются собственного направления, удобно найти в какой-либо точке, не лежащей на этой прямой, вектор направления движения.

Пример 3.11. *Определить характер точки покоя системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \quad (3.26)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 + 6\lambda + 7 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -3 - \sqrt{2} < 0$, $\lambda_2 = -3 + \sqrt{2} < 0$ вещественные, различные и отрицательные (одного знака). Следовательно, точка покоя $(0, 0)$ системы (3.26) — устойчивый узел. $\square$

Пример 3.12. *Найти и исследовать особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases} \quad (3.27)$$

Решение. Приравнивая к нулю правые части системы (3.27), находим неподвижные точки $(-1, -1)^T; (1, 1)^T$. Рассмотрим первую из них. С помощью замен $x = -1 + \xi$, $y = -1 + \eta$ система (3.27) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi - \eta, \\ \dot{\eta} = -2\xi - 2\eta + \xi^2 + \eta^2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Линейная часть полученной системы имеет следующее характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$. Корни полученного квадратного трехчлена $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ — вещественны и имеют разные знаки. Это позволяет утверждать, что фазовый портрет окрестности нуля системы (3.28) — седло. Нелинейность $(0, \xi^2 + \eta^2)^T$ системы (3.28) не может изменить тип данной неподвижной точки. Отсюда можно сделать вывод, что $(-1, -1)^T$ также является седлом для исходной системы (3.27). Рассмотрим теперь точку $(1, 1)^T$. Выполняя замены $x = 1 + \xi$, $y = 1 + \eta$, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi - \eta, \\ \dot{\eta} = 2\xi + 2\eta + \xi^2 + \eta^2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Характеристическое уравнение линейной части полученной системы имеет вид $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$ комплексно сопряжены, при этом их вещественная часть положительна. Отсюда следует, что система, определяемая линейной частью системы (3.29), является неустойчивым фокусом. Учитывая, что, как и в рассмотренном выше случае, нелинейность не может изменить тип данной неподвижной точки, заключаем, что точка $(1, 1)$ также будет неустойчивым фокусом системы (3.27). $\square$

4. Последовательные приближения и метод малого параметра

В данной главе приводятся примеры построения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, с помощью разложений в степенные ряды и методом малого параметра. Кроме того, в конце главы обсуждаются способы решения краевых задач и построения функции Грина.

4.1. Метод последовательных приближений Пикара

Обоснование теоремы существования и единственности для начальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1)$$

обычно выполняется с помощью метода последовательных приближений Пикара (см. книги [7–11]). В (4.1) перейдем к эквивалентному ему интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (4.2)$$

На основе полученного уравнения (4.2) удобно строить последовательность функций

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_0) d\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau)) d\tau, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

В теореме существования и единственности доказывается равномерная сходимость данной последовательности к решению. Если удастся сосчитать интегралы в формулах (4.3), можно получить хорошее приближение решения.

Пример 4.1. Найти три последовательных приближения задачи Коши

$$y' = 2x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Для исходного уравнения на плоскости Oxy выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Построим последовательность функций $y_n(x)$, определяемых соотношениями

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

За нулевое приближение примем $y_0(x) \equiv 1$, тогда

$$\begin{aligned} y_0(x) &\equiv 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x (2\tau + y_0^2(\tau)) d\tau = 1 + x + x^2, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (2\tau + y_1^2(\tau)) d\tau = 1 + x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}. \end{aligned}$$

□

Пример 4.2. Найти три последовательных приближения решения системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= tx\end{aligned}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Решение. Построим последовательность вектор-функций $(x_n(t), y_n(t))^T$, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned}x_n(t) &= 1 + \int_0^t y_{n-1}(\tau) d\tau, \\ y_n(t) &= 2 + \int_0^t \tau x_{n-1}(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots$. В качестве нулевого приближения возьмем, естественно, вектор начальных условий $(x_0(t), y_0(t))^T = (1, 2)^T$. Тогда первое приближение вычисляется по формулам

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 1 + \int_0^t 2 d\tau = 1 + 2t, \\ y_1(t) &= 2 + \int_0^t \tau d\tau = 2 + t^2/2.\end{aligned}$$

Для второго приближения имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= 1 + \int_0^t (2 + \tau^2/2) d\tau = 1 + 2t + t^3/6, \\ y_2(t) &= 2 + \int_0^t (\tau + 2\tau^2) d\tau = 2 + t^2/2 + 2t^3/3,\end{aligned}$$

Наконец, для третьего приближения получаем

$$\begin{aligned}x_3(t) &= 1 + \int_0^t (2 + \tau^2/2 + 2\tau^3/3) d\tau = 1 + 2t + t^3/6 + t^4/6, \\ y_3(t) &= 2 + \int_0^t (\tau + 2\tau^2 + \tau^4/6) d\tau = 2 + t^2/2 + 2t^3/3 + t^5/30,\end{aligned}$$

□

4.2. Разложение решений ОДУ в степенные ряды

Если в начальной задаче Коши (4.1) функция $f(t, x)$ является аналитической в окрестности точки (t_0, x_0) , то есть раскладывается в сходящиеся степенные ряды по степеням $t - t_0$ и $x - x_0$, тогда решение начальной задачи (4.1) также является аналитическим (см., например, [9, 10]). Это позволяет искать ее решение в виде степенного ряда по степеням $t - t_0$. Из примеров 4.1 и 4.2 нетрудно видеть, что метод последовательных приближений Пикара дает в этих случаях как раз разложение в степенной ряд. Утверждение об аналитичности решения начальной задачи Коши может быть распространено на уравнение порядка n вида

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (4.4)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \quad (4.5)$$

Это позволяет искать решения таких уравнений в виде степенных рядов. Особенно эффективно это можно сделать для линейных дифференциальных уравнений порядка n с непостоянными коэффициентами

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0, \quad (4.6)$$

где $a_0(t_0) \neq 0$ и функции $a_j(t)$ ($j = 0, \dots, n$) — аналитические в окрестности точки t_0 . Как уже обсуждалось в разделе 2.1, для построения общего решения (4.6) достаточно найти n его линейно независимых решений, которые можно построить, выбирая начальные условия следующим образом:

$$x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0, \dots, x_j(t_0) = 1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (4.7)$$

Меняя индекс j в пределах от 0 до $n - 1$, получаем комплект из n линейно независимых решений, линейная комбинация которых дает общее решение уравнения (4.6).

Приведем несколько примеров разложения решений в степенные ряды.

Пример 4.3. Найти решение начальной задачи Коши

$$\dot{x} = x + t \exp(x), \quad x(0) = 0$$

в виде степенного ряда вплоть до четвертой степени включительно.

Решение. Учитывая, что $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$ разложение решения в степенной ряд будем искать в виде

$$x(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

Подставляя данное выражение в левую и правую части уравнения, получаем следующее соотношение для нахождения коэффициентов разложения:

$$a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots + t \exp(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots).$$

Раскладывая в последнем равенстве выражение для экспоненты в степенной ряд, получаем

$$\exp(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) = 1 + (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) + \frac{1}{2}(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots)^2 + \frac{1}{3!}(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots)^3 + \dots$$

Приравняв теперь коэффициенты при одинаковых степенях t и из этих соотношений найдем коэффициенты разложения. При t^0 имеем $a_1 = 0$, при t^1 получается $2a_2 = a_1 + 1$, то есть $a_2 = 1/2$, при t^2 выходит равенство $3a_3 = a_2 + a_1$, и, тем самым, $a_3 = 1/6$, наконец, при t^3 имеем $4a_4 = a_3 + a_2 + a_1^2/2$, что дает $a_4 = 1/6$. Найденные значения коэффициентов позволяют получить следующее степенное разложение решения:

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \dots$$

□

Пример 4.4. Найти общее решение уравнения Эйри

$$\ddot{x} - tx = 0 \quad (4.8)$$

в виде степенных рядов.

Решение. Для нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.8) достаточно найти для него два линейно независимых решения. Считая, что в точке $t = 0$ зафиксированы начальные условия $x(0) = a_0$ и $\dot{x}(0) = a_1$, на основании уравнения (4.8) построим разложение его решения в степенной ряд. Подстановка $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$ дает

$$2a_2 + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2} + \dots - t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots) = 0. \quad (4.9)$$

Приравнивание коэффициентов при t^n позволяет получить следующее рекуррентное соотношение:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0.$$

Учитывая, что a_0 и a_1 фиксированы и при t^0 в уравнении (4.9) получается $2a_2 = 0$, нетрудно найти все коэффициенты разложения a_n . Они разделяются на три группы a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} ($k = 0, 1, 2, \dots$). Поскольку $a_2 = 0$, все коэффициенты $a_{3k+2} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Для оставшихся двух групп имеем следующие формулы:

$$a_{3k} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \dots ((3k-1) \cdot (3k))}, \quad a_{3k+1} = \frac{a_1}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \dots ((3k) \cdot (3k+1))},$$

где $k = 1, 2, \dots$. Полученные формулы позволяют определить линейно независимые решения уравнения (4.8). Их можно принять равными

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2 \cdot 3) \dots (3k-1) \cdot (3k)}, \quad \varphi_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3 \cdot 4) \dots (3k) \cdot (3k+1)},$$

тем самым, общее решение уравнения (4.8) может быть представлено в виде

$$x(t) = a_0 \varphi_1(t) + a_1 \varphi_2(t). \quad (4.10)$$

Отметим, что под специальной функцией Эйри $Ai(t)$ (см., например, [13]) обычно понимают решение уравнения (4.8) с начальными условиями

$$Ai(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(2/3)}, \quad Ai'(0) = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma(1/3)}.$$

Разложение в степенной ряд этой функции легко получить по формуле (4.10), где $a_0 = Ai(0)$ и $a_1 = Ai'(0)$. □

4.3. Метод малого параметра

Для начальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = \psi(\mu) \quad (4.11)$$

при условии, что $f(t, x, \mu)$ и $\psi(\mu)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, удастся доказать утверждение, гарантирующее гладкость решения уравнения (4.11) по параметру μ . В этой ситуации можно попытаться построить разложение решения $x(t, \mu)$ в ряд по μ . Для определения коэффициентов этого разложения можно пользоваться следующим алгоритмом. (Не ограничивая общности, будем считать, что разложение выполняется в точке $\mu = 0$.)

Представим $x(t, \mu)$ в виде суммы

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + o(\mu^n) \quad (4.12)$$

и подставим формулу (4.12) в уравнение (4.11)

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) + \dot{\mu} x_1(t) + \dots &= f(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots, \mu), \\ x_0(t_0) + \mu x_1(t_0) + \dots &= \psi_0 + \mu \psi_1 + \dots, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\psi_0, \psi_1, \dots$ — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в нуле функции $\psi(\mu)$.

Разложим функцию в правой части (4.13) в ряд по μ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} f(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \mu) &= f(t, x_0(t), 0) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} (x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \dots) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mu} \right) \Big|_{\mu=0} + \\ &+ \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2} (x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \dots)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x \partial \mu} (x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} (2x_2(t) + 6\mu x_3(t) + \dots) + \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial \mu^2} \right) \Big|_{\mu=0} + \dots, \end{aligned}$$

где $(\cdot)$ обозначено $(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots, \mu)$, получаем для нулевого шага (коэффициент при μ^0)

$$\dot{x} = f(t, x_0(t), 0), \quad x_0(t_0) = \psi_0. \quad (4.14)$$

На первом шаге (коэффициент при μ^1) имеем

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial \mu}, \quad x_1(t_0) = \psi_1, \quad (4.15)$$

и, наконец, на втором шаге (коэффициент при μ^2) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x \partial \mu} x_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial \mu^2} \right), \quad x_2(t_0) = \psi_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Все выписанные задачи, кроме нулевого шага, представляют собой линейные дифференциальные уравнения первого порядка и могут быть решены стандартным способом, если удастся решить задачу (4.14). Далее, подставляя полученные решения в асимптотическое разложение (4.12), получаем приближенное решение задачи (4.1). Важно заметить, что асимптотические формулы (4.12) работают, вообще говоря, лишь на конечном промежутке изменения $t \in [t_0, T]$.

Для бесконечных промежутков следует применять другие асимптотические методы.

Пример 4.5. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$y' - \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = -\varepsilon.$$

Решение. Решение ищем в виде

$$y(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots$$

Подставим данное разложение в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим последовательность начальных задач Коши

$$\begin{aligned} v_0' &= \exp(v_0 - x), & v_0(0) &= 0, \\ v_1' &= v_0 + \exp(v_0 - x)v_1, & v_1(0) &= 1, \\ v_2' &= v_1 + \exp(v_0 - x)(v_2 + \frac{v_1^2}{2}), & v_2(0) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения и начального условия находим $v_0(x) = x$, подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$v_1' = x + v_1, \quad v_1(0) = -1.$$

Откуда

$$v_1(x) = -x - 1.$$

Подставляя найденные $v_0(x)$ и $v_1(x)$ в третье уравнение, получаем

$$v_2' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + v_2, \quad v_2(0) = 0.$$

Решив уравнение и воспользовавшись начальным условием, найдем

$$v_2(x) = \frac{1}{2}(-x^2 - 2x - 1 + \exp(x)).$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y(x) = x - \varepsilon(x + 1) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\exp(x) - x^2 - 2x - 1) + o(\varepsilon^2).$$

□

4.4. Краевые задачи

В данном разделе рассмотрим краевую задачу

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f(x), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$, $f(x)$ — непрерывные функции при $x \in [a, b]$, причем $a_0(x) \neq 0$, α_j , β_j , γ_j ($j = 1, 2$) — действительные числа такие, что $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$ ($j = 1, 2$).

Краевая задача (4.17), (4.18) может быть приведена к следующему виду

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f^*(x), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) &= 0, \\ \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $q(x)$ — непрерывная, а $p(x)$ — дифференцируемая функции, $p(x) \neq 0$. Отрезок $[a, b]$ сводится к промежутку $[0, 1]$ с помощью замены $x \rightarrow a + (b - a)x$, а от γ_1, γ_2 можно избавиться за счет линейной или квадратичной по x добавки. Наконец, само уравнение (4.17) можно свести к виду (4.19) после умножения уравнения (4.17) на

$$\gamma = \frac{1}{a_0} \exp \left(\int_0^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau \right)$$

и переобозначений $p = a_0\gamma$, $q = a_2\gamma$.

Будем предполагать, что задача (4.19), (4.20) при $f(x) \equiv 0$ однозначно разрешима. В этом случае неоднородная задача также однозначно разрешима, ее решение имеет вид

$$u(t) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

Опишем способ получения функции $G(x, s)$, которая называется функцией Грина. Введем определение.

Функция $G(x, s)$ называется функцией Грина, если она определена при $0 \leq x \leq 1$, $0 < s < 1$ и при каждом фиксированном s из интервала $(0, 1)$ обладает свойствами (как функция от x):

- 1) *при $x \neq s$ $LG(x, s) = 0$, то есть $G(x, s)$ — решение линейного однородного уравнения по переменной x ;*
- 2) *$G(x, s)$ удовлетворяет левому и правому краевым условиям по переменной x ;*
- 3) *$G(x, s)$ непрерывна в точке $x = s$;*
- 4) *производная по x функции $G(x, s)$ имеет скачок в точке s , то есть*

$$G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Для определения функции Грина необходимо найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = 0, \quad u_{\text{од}} = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

а затем отыскать функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, которые удовлетворяют левому и правому краевым условиям соответственно. Учитывая, что однородная задача имеет только нулевое решение, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы.

Функцию Грина будем искать в виде, удовлетворяющем условиям (4.19), (4.20)

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1(s) \varphi_1(x), & 0 \leq x < s, \\ C_2(s) \varphi_2(x), & s < x \leq 1. \end{cases}$$

Для определения $C_1(s), C_2(s)$ воспользуемся условиями 3, 4 определения, из которых имеем

$$\begin{cases} C_1(s)\varphi_1(s) - C_2(s)\varphi_2(s) = 0, \\ C_1(s)\varphi_1'(s) - C_2(s)\varphi_2'(s) = -\frac{1}{p(s)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Определителем системы (4.21) служит определитель Вронского линейно независимых решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, это означает, что он отличен от нуля и система (4.21) однозначно разрешима. Тем самым, функция Грина полностью определена.

Пример 4.6. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{u} = f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Решение. Для определения функции Грина выпишем решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$\ddot{u} = 0, \quad u_{\text{од}} = C_1x + C_2.$$

Теперь найдем функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, удовлетворяющие левому и правому краевым условиям соответственно. Функция Грина ищется в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1(s)x, & \text{если } 0 \leq x < s, \\ C_2(s)(x-1), & \text{если } s < x \leq 1. \end{cases}$$

Из условий 3, 4 определения однозначно находятся $C_1(s), C_2(s)$

$$\begin{cases} C_1(s)s - C_2(s)(s-1) = 0, \\ C_1(s) - C_2(s) = -1 \end{cases}$$

и выписывается функция Грина исходной краевой задачи

$$G(x, s) = \begin{cases} (s-1)x, & \text{если } 0 \leq x < s, \\ s(x-1), & \text{если } s < x \leq 1. \end{cases}$$

□

Пример 4.7. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{u} + u = f(x), \quad \dot{u}(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (4.22)$$

Решение. Выпишем сначала общее решение однородной части краевой задачи (4.22)

$$u_{\text{од}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из этой формулы найдем функцию $\varphi_1(x) = \cos x$, удовлетворяющую левому краевому условию, и $\varphi_2(x) = \sin(x-1)$ — правому условию. Функцию Грина будем искать в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1(s) \cos x, & \text{если } 0 \leq x < s, \\ C_2(s) \sin(x-1), & \text{если } s < x \leq 1, \end{cases}$$

из условий 3, 4 ее определения

$$\begin{cases} C_1(s) \cos s - C_2(s) \sin(s-1) = 0, \\ C_1(s) \sin s - C_2(s) \cos(s-1) = -1 \end{cases}$$

находим $C_1(s), C_2(s)$. Тем самым, функция Грина краевой задачи (4.22) имеет вид

$$G(x, s) = \cos^{-1}(1) \begin{cases} \sin(s-1) \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq s, \\ \cos s \sin(x-1), & \text{если } s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

□

5. Расчетно-графическая работа

5.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Вариант № 1

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = 2(x-2)(x+1)^2$, $x(0) = 1$.
2. Найти общее решение $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$.
3. Найти общее решение $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$.
4. Найти общее решение $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$, $y_* = \frac{1}{x}$.
5. Найти общее решение $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.

Вариант № 2

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = x(x-2)(x+1)$, $x(0) = 1$.
2. Найти общее решение $(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0$.
3. Найти общее решение $y' \cos x + y \sin x = 1$.
4. Найти общее решение $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0$.
5. Найти общее решение $(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0$.

Вариант № 3

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y^2(y-2)$, $y(0) = 1$.
2. Найти общее решение $(2x + 4y + 3)y' - x - 2y - 1 = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \sin t$.
4. Найти общее решение $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.
5. Найти общее решение $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

Вариант № 4

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y^2 - 1)(y - 2)$, $y(0) = 0$.
2. Найти общее решение $y' = \frac{x + y - 3}{y - x + 1}$.
3. Найти общее решение $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$.
4. Найти общее решение $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.
5. Найти общее решение $x dx + y dy + x dy + y dx = 0$.

Вариант № 5

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y^2 - 4)y$, $y(1) = 1$.
2. Найти общее решение $(3x - 4y - 3)y' - 3x + 4y + 2 = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} - 2x = t \exp(2t) \sin t$.
4. Найти общее решение $y' + 2y \exp(x) - y^2 = \exp(2x) + \exp(x)$ при условии, что имеется решение $y_* = \exp(x)$.
5. Найти общее решение $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{(y^2 - 3x^2) dy}{y^4} = 0$.

Вариант № 6

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y(y-1)(y-2)$, $y(0) = -1$.
2. Найти общее решение $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$.
3. Найти общее решение $y' + y = (x + 1) \exp(-x) \cos x$.

4. Найти общее решение $y' = \frac{y^2}{(y-x)x}$.
5. Найти общее решение $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$.

Вариант № 7

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y+1)(y^2-4)$, $y(0) = 3$.
2. Найти общее решение $x + y - 2 + (1-x)y' = 0$.
3. Найти общее решение $y' - y = \sin x$.
4. Найти общее решение $(y^2 + x^2 + 1)y' + xy = 0$.
5. Найти общее решение $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

Вариант № 8

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\frac{x'}{x+1} = x(x-2)$, $x(0) = -2$.
2. Найти общее решение $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$.
3. Найти общее решение $xy' - 2y = x^3 \cos x$.
4. Найти общее решение $2y'x \ln x + y = xy^{-1} \cos x$.
5. Найти общее решение $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$.

Вариант № 9

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$, $y(0) = 0$.
2. Найти общее решение $(4x + 2y + 1)y' + 8x + 4y + 1 = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos^3 t}$.
4. Найти общее решение $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.
5. Найти общее решение $ydx - (y^2 + x)dy = 0$.

Вариант № 10

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\frac{y'}{y+1} = y(y+2)$, $y(0) = 2$.
2. Найти общее решение $y' = \frac{x+y}{1-y-x}$.
3. Найти общее решение $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.
4. Найти общее решение $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$.
5. Найти общее решение $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$.

Вариант № 11

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\frac{y'}{y-1} = y^2$, $y(0) = -1$.
2. Найти общее решение $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$.
3. Найти общее решение $\dot{x} + t \exp(t)x = \exp[(1-t)\exp(t)]$.
4. Найти общее решение $2x(x^2 + y)dx = dy$.
5. Найти общее решение $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$.

Вариант № 12

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y(y+1)(y+2)$, $y(0) = -1$.
2. Найти общее решение $y' = -\frac{2x+3y-5}{3x+2y-5}$.
3. Найти общее решение $y' + 2y = x \exp(-2x) \cos x$.
4. Найти общее решение $(x-t)tdx - x^2dt = 0$.

5. Найти общее решение $\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0$.

5.2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

Вариант № 1

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + y = \exp(-x) + 1$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' + y' = x + \exp(-x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} + x = \frac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}}$.
4. Найти общее решение $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ при условии, что $y_1 = \exp(mx)$.

Вариант № 2

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 17y = \exp(-x)(1 + \sin 4x)$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' = x + x \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}}$.
4. Найти общее решение $(2x^2 + 3x)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 6$ при условии, что y_1 — многочлен.

Вариант № 3

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 10y = x \exp(-x) \sin 3x$.
2. Найти общее решение $y''' + 8y = x + x \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2}$.
4. Найти общее решение $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$ при условии, что $y_1 = \sin x$.

Вариант № 4

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x+1) \exp(-2x) \sin x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} + 4y'' = x + \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - x = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}$.
4. Найти общее решение $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ при условии, что $y_1 = x$.

Вариант № 5

1. Найти общее решение $y'' + 4y' + 13y = \exp(-2x) + \sin 3x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} - 4y'' = x + \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^3}$.
4. Найти общее решение $(x^2 + 1)y'' + xy' - y + 1 = 0$ при условии, что $y_1 = x$.

Вариант № 6

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 17y = \exp(-x) + \sin 4x$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' = (x+1) \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^3}$.
4. Найти общее решение $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0$ при условии, что $y_1 = \cos(\sin x)$.

Вариант № 7

1. Найти общее решение $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = t \exp(-2t) \sin 3t$.
2. Найти общее решение $y''' - 8y = x + (x+1) \exp(2x)$.
3. Найти общее решение $y'' - 2y' + y = \frac{\exp(x)}{x}$.
4. Найти общее решение $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 \exp(x)$ при условии, что $y_1 = \exp(x)$.

Вариант № 8

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x + 1) \exp(-x) \sin x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} - 4y'' = x + \exp(2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{4t^2 - 4t - 1}{4t\sqrt{t}}$.
4. Найти общее решение $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$ при условии, что $y_1 = 1/x$.

Вариант № 9

1. Найти общее решение $y'' - 2y' + y = (x + 2) \exp(x) + 1$.
2. Найти общее решение $y''' + y' = x \sin x$.
3. Найти общее решение $y''' + y'' = \frac{x - 1}{x^2}$.
4. Найти общее решение $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$ при условии, что $y_1 = \sin x$.

Вариант № 10

1. Найти общее решение $y'' + 2y' - 3y = (x + 1)(\exp(x) + 1)$.
2. Найти общее решение $y''' + 4y'' = x + x \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.
4. Найти общее решение $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$ при условии, что $y_1 = \exp(mx^2)$.

Вариант № 11

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 10y = \exp(x) \sin 3x$.
2. Найти общее решение $y''' - 8y = x(1 + \exp(-2x))$.
3. Найти общее решение $y'' + y = \frac{2 + x^2}{x^3}$.
4. Найти общее решение $y'' + y' + \exp(-2x)y = \exp(-3x)$ при условии, что $y_1 = \cos(\exp(-x))$.

Вариант № 12

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x + 1) \sin x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} + 4y'' = (x + 1) \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $x^2 y'' - xy' - 3y = \frac{1}{x}$.
4. Найти общее решение $2x(x + 2)y'' + (2 - x)y' + y = 0$ при условии, что y_1 — многочлен.

5.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами**Вариант № 1**

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \exp(-t)$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 2

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 t}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 3

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \exp(-t)$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант № 4

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 5

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = 2x - 2y + \exp(t), \\ y' = -x + y. \end{cases}$
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 6

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{t+1}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант № 7

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2\exp(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 8

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 9

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 10

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$.
4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант № 11

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8t \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант № 12

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(2t)$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4. Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Вариант № 1

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2 - \exp(x + y) - \cos x, \\ y' = \ln(1 + \sin(2x - 3y)). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + x^2y^2, \\ y' = x - 0.5y(1 + x^3). \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$.

5. При каких значениях параметров a и b ограничены на всей оси решения уравнения $y'' + ay' + by = \cos t$?

Вариант № 2

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-2x + y) + 1 - \cos x, \\ y' = \ln(1 + 2x - 3y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -3y - 2x^3, \\ y' = 2x - 3y^3. \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$.

5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

Вариант № 3

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2 - (8 - 3x + 6y)^{1/3}, \\ y' = -\sin(2x + y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -0.5x - y - 0.25x^3, \\ y' = x - 0.5y - 0.25y^3. \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 5$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4y - 6x. \end{cases}$
5. При каких значениях параметров a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \neq 0$, стремящееся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

Вариант № 4

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} x' = -10x + 4\exp(y) - 4\cos y^2, \\ y' = 2\exp(x) - 2 - y + x^4. \end{cases}$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = y + x^2y^2 - 0.25x^5, \\ y' = -2x - yx^3 - 0.5y^3. \end{cases}$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + 5\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$?
4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 2y - 4x. \end{cases}$
5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(\exp(-x))$ при $x \rightarrow +\infty$?

Вариант № 5

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} x' = \ln(3\exp(y) - 2\cos x), \\ y' = 2\exp(x) - (8 + 12y)^{1/3}. \end{cases}$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$
3. При каких значениях a устойчив многочлен $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a$?
4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$.
5. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2y = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

Вариант № 6

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-x + y), \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = -xy^4 - 2x^3 - y, \\ y' = 2x + 2x^2y^3 - y^7. \end{cases}$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda + 2$?
4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x$.
5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены при всех $x \geq 0$?

Вариант № 7

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} x' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}, \\ y' = 1 - \exp(2x + y). \end{cases}$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = x - y. \end{cases}$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + b$?
4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ являются периодическими функциями от x ?

Вариант № 8

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = 2.5x \exp(x) - 3y + \sin x^2, \\ y' = 2x + y \exp(-y^2/2) - y^4 \cos x. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = xy - x^3 + y, \\ y' = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - y - x = 0. \end{cases}$

5. Докажите, что среди всех решений уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \cos \omega t$ есть ровно одно периодическое.

Вариант № 9

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 1 - \exp(x - y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

3. При каких значениях a устойчив многочлен $\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -2x + \frac{5}{7}y, \\ y' = 7x - 3y. \end{cases}$

5. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \exp(i\omega t)$.

Вариант № 10

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)^{-1} - 1, \\ y' = \cos x - \exp(2x - y). \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -2y - x(x - y)^2, \\ y' = 3x - 1.5y(x - y)^2. \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -5x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$?

Вариант № 11

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-2x + y), \\ y' = 1 - (1 - x + y)^{1/3}. \end{cases}$$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -4x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \neq 0$, стремящееся к нулю при $x \rightarrow -\infty$?

Вариант № 12

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}. \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему

$$\begin{cases} x' = -3x - 2y, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2 + 5\lambda + 7$?
4. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$
5. При каких значениях параметров a и b ограничены на всей оси решения уравнения $y'' + ay' + by = \sin t$?

5.5. Последовательные приближения и метод малого параметра**Вариант № 1**

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = 2x + x^2 + t$, $x(0) = 1$.
2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $\ddot{x} - t^2x = 0$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$y' + \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = \varepsilon.$$
4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = f(x)$, $u(0) = \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} + u = \lambda u$, $u(0) = u(1) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 2

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши

$$\dot{x} = 2tx + x^3 + t - 1, \quad x(0) = 0.$$
2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $\ddot{x} - t\dot{x} - 2x = 0$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$y' + y^2 - \frac{6\varepsilon}{x} = 0, \quad y(1) = 1 + 3\varepsilon.$$
4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + 2y' + (1 + \varepsilon y^2)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} = f(x)$, $\dot{u}(0) = u(1) + \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} - u = \lambda u$, $\dot{u}(0) = u(1) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 3

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши

$$\dot{x} = 2x + \sin x + 1, \quad x(0) = 0.$$
2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда

$$(1 - t^2)\ddot{x} - 4t\dot{x} - 2x = 0.$$
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$xy' - \varepsilon x^2 - \ln(1 + y) = 0, \quad y(1) = 0.$$
4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + (4 + \mu(1 + y^2))y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} = f(x)$, $u(0) = 1, u(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} = \lambda u$, $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 4

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши

$$\dot{x} = 2(\ln x + x^2) - 1, \quad x(0) = 1.$$

2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда

$$(t^2 + 1)\ddot{x} + 5t\dot{x} + 3x = 0.$$

3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$y' - y^2 + \varepsilon xy^3 = 0, \quad y(0) = 1 - \varepsilon.$$

4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + (4 + \varepsilon t)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 4u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$

6. Для краевой задачи $\ddot{u} = \lambda u, \quad \dot{u}(0) = u(0) + u(1) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 5

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $y' = 2x + y^2, \quad y(0) = 1.$

2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда

$$(1 - t)\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0.$$

3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$y' + \varepsilon y - 1 + \sin(x - y) = 0, \quad y(0) = \varepsilon.$$

4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + 4xy^3 = 0, \quad y(0) = \mu, \quad y'(0) = 0.$$

5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = f(x), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$

6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi)$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 6

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x^2 - t^2 + 1, \quad x(0) = 1.$

2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда

$$(t^2 - t + 1)\ddot{x} + (4t - 2)\dot{x} + 2x = 0.$$

3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$\dot{x} = 6\varepsilon \frac{1}{t} - x^2, \quad x(1) = 1 + 3\varepsilon.$$

4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} = f(x), \quad u(0) + \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$

6. При каких λ и ω разрешима задача $\ddot{u} + \lambda u = \cos^2(\omega), \quad u(0) = u(1) = 0.$

Вариант № 7

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = 3t^2x + x^2 + 1, \quad x(0) = 1.$

2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $\ddot{x} - t\dot{x} + tx = 0.$

3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$x' = 1 - t + (1 - t + \varepsilon)x + \frac{x^2 + t^2}{2}, \quad x(0) = -\varepsilon.$$

4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} = f(x), \quad u(0) = \dot{u}(1) = 1.$

6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 8

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x^2 - t, \quad x(0) = 1.$

2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $\ddot{x} + x \sin t = 0.$

3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения

$$\dot{x} = \mu tx^3 + x^2, \quad x(0) = 1 + \mu.$$

4. Найти методом малого параметра три члена разложения

$$y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} = f(x), \quad u(0) + \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$

6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda^2 u = 0, \quad \dot{u}(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при

которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 9

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x + t + x^2$, $x(0) = 1$.
2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $t\ddot{x} + x \ln(1 - t) = 0$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $x' = \ln x + \varepsilon t$, $x(0) = 1 - \varepsilon$.
4. Найти методом малого параметра три члена разложения $y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + u = f(x)$, $u(0) = \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = \sin x$, $u(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при которых она разрешима.

Вариант № 10

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x + tx^3 - t$, $x(0) = 0$.
2. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенного ряда $y''' - xy'' + (x - 2)y' + y = 0$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $\dot{x} = 1 - \sqrt{1 + x} + \mu t$, $x(0) = \mu$.
4. Найти методом малого параметра три члена разложения $y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = f(x)$, $u(0) - \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} + \lambda^2 u = 0$, $\dot{u}(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 11

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
2. Найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данному начальному условию $\dot{x} = 2t + \cos x$, $x(0) = 0$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $y' = \frac{2}{y} - 5\mu x$, $y(1) = 2$.
4. Найти методом малого параметра три члена разложения $y'' - y = \cos(\mu y)$, $y(0) = y'(0) = 0$.
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} - \dot{u} = f(x)$, $u(0) = \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda^2 u = 0$, $u(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 12

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x^2 + 2t$, $x(0) = 1$.
2. Найти в виде степенного ряда решение, удовлетворяющее данному начальному условию $\dot{x} = t^2 + x^3$, $x(1) = 1$.
3. Найти методом малого параметра два-три члена разложения $xy' = \mu x^2 + \ln y$, $y(1) = 1$.
4. Найти методом малого параметра три члена разложения $y'' - y = 1 - \sin(\mu y)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
5. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} = f(x)$, $u(0) = \dot{u}(1) = 0$.
6. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = 0$, $\dot{u}(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ , при которых она имеет ненулевое решение.

Литература

1. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1979. – 128 с.
2. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – 240 с.
3. *Краснов, М. Л.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Высш. школа, 1978. – 288 с.
4. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко [и др.]. – М. : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.
5. *Матвеев, Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – Минск : Выш. шк., 1987. – 319 с.
6. *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.
7. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1976. – 331 с.
8. *Глызин, С. Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / С. Д. Глызин, П. Н. Нестеров. – Ярославль : ЯрГУ, 2016. – 192 с.
9. *Тихонов, А. Н.* Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1985. – 231 с.
10. *Эльсгольц, Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Едиториал УРСС, 2000. – 320 с.
11. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
12. *Четаев, Н. Г.* Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. – 3-е изд. – М. : Наука, 1965. – 176 с.
13. *Уиттекер, Э. Т.* Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М. : Едиториал УРСС, 2006. – 344 с.

Учебное издание

Глызин Сергей Дмитриевич

Толбей Анна Олеговна

**Практический курс
обыкновенных
дифференциальных уравнений**

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор, верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 16.10.2017. Формат 60×84/8.

Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 23 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.