

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

М. В. Ануфриенко, Г. В. Шабаршина

Кратные интегралы и ряды

Методические указания

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Фундаментальная информатика и информационные технологии*

Ярославль 2012

УДК 517.37(072)
ББК В161.12я73
А73

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года*

Рецензент:
кафедра дискретного анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова

Ануфриенко, М. В. Кратные интегралы и ряды: методические указания / М. В. Ануфриенко, Г. В. Шабаршина; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2012. – 36 с.

В методических указаниях собраны материалы, которые позволят организовать аудиторную и внеаудиторную самостоятельную подготовку студентов по курсу «Кратные интегралы и ряды».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению 010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии (дисциплина «Кратные интегралы и ряды», цикл Б2), очной формы обучения.

УДК 517.37(072)
ББК В161.12я73

© Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2012

Введение

Стратегическим направлением модернизации и оптимизации высшего образования является увеличение времени на самостоятельную работу студентов. И это понятно: современные условия диктуют необходимость непрерывного образования, когда от студентов и в дальнейшем от выпускников университета требуется постоянное совершенствование знаний. Выпускник должен быть ориентирован на большую инициативу и самостоятельность, должен обладать способностью работать в различных рабочих командах, иметь высокую мотивацию к переобучению.

Одними из основных факторов, обеспечивающих большую эффективность процесса обучения и позволяющих достигнуть более высокого качества обучения, являются сокращение аудиторной нагрузки и все возрастающая роль самостоятельной работы студентов вместо пассивного слушания лекций. Объем самостоятельной работы студентов определяется ФГОС и учебным планом направления подготовки 010300.62 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Дисциплина «Кратные интегралы и ряды» относится к математическому и естественно-научному циклам. Это обязательный курс для студентов 2-го курса, читается в 3-м семестре. На изучение дисциплины отводится 144 часа, из которых 36 часов лекционных и 36 часов практических занятий. Остальные часы так или иначе связаны с самостоятельной подготовкой. Объем информации по этой дисциплине (полный набор вопросов приведен в приложении) весьма значителен. Отсюда совершенно естественно следует, что большая часть работы переносится на самостоятельную подготовку.

В предлагаемых указаниях приводятся методические материалы по дисциплине «Кратные интегралы и ряды»: для каждой темы приведены необходимые теоретические сведения и примеры решения задач, представлены варианты контрольных заданий, список экзаменационных вопросов. Все эти материалы призваны оказать помощь в организации самостоятельной работы, облегчить и оптимизировать внеаудиторную самостоятельную работу.

1. Функциональные последовательности и ряды

Занятие 1. Пределная функция функциональной последовательности.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Функциональной последовательностью $f_n(x)$ называется последовательность, элементами которой являются функции. Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в точке x_0 .

Последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке $x \in E$, называют сходящейся на множестве E . В этом случае на множестве E определена функция f , значение которой в точке $x_0 \in E$ равно пределу последовательности $\{f_n(x_0)\}$. Эту функцию называют предельной функцией последовательности и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in E$.

Найдите предельную функцию функциональной последовательности:

Задача 1.1. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{nx} / n^2}{1 / \cancel{n^2} + x^2} = \frac{0}{0 + x^2} = 0$.

Задача 1.2. $f_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}} \right)$.

Решение. При вычислении воспользуемся следствием из второго замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x^{\frac{1}{n}} - 1) - (x^{\frac{1}{2n}} - 1)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2n}} - 1}{2 \cdot \frac{1}{2n}} = \ln x - \frac{\ln x}{2} = \frac{\ln x}{2}.$$

Задача 1.3. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $x \in [0; +\infty)$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$; $x \in [0; +\infty)$. Рассмотрим три случая.

Если $0 \leq x < 1$, то $x^n \rightarrow 0$, и $\sqrt[n]{1+x^n} \rightarrow \sqrt[n]{1} = 1$.

Если $x = 1$, то $x^n \rightarrow 1$, и $\sqrt[n]{1+x^n} = \sqrt[n]{2} \rightarrow 1$.

Если $x > 1$, то $x^n \rightarrow \infty$, и $\sqrt[n]{1+x^n} = \sqrt[n]{x^n(\frac{1}{x^n} + 1)} \rightarrow x$.

Таким образом, $f(x) = \begin{cases} 1; & \text{при } x \in [0; 1] \\ x; & \text{при } x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Задача 1.4. $f_n(x) = n \cdot \operatorname{arctg}(nx^2)$, $x \in (0; +\infty)$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg}(nx^2)$, $x \in (0; +\infty)$

Данный предел может быть вычислен с помощью правила Лопиталя:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} nx^2)'}{(1/n)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1 \cdot x^2}{1+n^2 x^4}}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x^2}{1+n^2 x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Задача 1.5. $f_n(x) =$

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n$, $x \in (0; +\infty)$.

Рассмотрим три случая:

при $x \in (0; 1)$ $x^n \rightarrow 0 \Rightarrow (x-1) \operatorname{arctg} x^n \rightarrow 0$,

при $x = 1$ $(x-1) \operatorname{arctg} x^n = 0 \cdot \frac{\pi}{4} = 0$,

при $x \in (1; +\infty)$ $x^n \rightarrow +\infty \Rightarrow (x-1) \operatorname{arctg} x^n \rightarrow \frac{\pi}{2}(x-1)$.

Окончательно:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & \text{при } x \in (0,1], \\ \frac{\pi}{2}(x-1); & \text{при } x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

Задача 1.6. $f_n(x) = n(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}})$, $x \in [0;+\infty)$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{x}{\sqrt{n}} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}})$, $x \in [0;+\infty)$.

Воспользуемся разложением по формуле Тейлора:

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t^2) \text{ при } t \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{x}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} o(\frac{1}{n}) \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n)}{1/n} = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0$, $x \in [0;+\infty)$.

Задача 1.7. $f_n(x) = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{n}$, $x > 0$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{n}$, $x > 0$.

Воспользуемся заменой на эквивалентную бесконечно малую: $\operatorname{arctg} t \sim t$ при $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\ln x}{n} = \ln x.$$

Задача 1.8. $f_n(x) = \frac{x}{n} \cdot \ln \frac{x}{n}$, $x > 0$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cdot \ln \frac{x}{n}$, $x > 0$.

Сделаем замену переменной $\frac{x}{n} = t$ и воспользуемся правилом

Лопиталя:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cdot \ln \frac{x}{n} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0.$$

Задача 1.9. $f_n(x) = n^2(1 - \cos \frac{1}{xn})$, $x > 0$.

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{xn})$, $x > 0$.

Воспользуемся разложением $\cos \frac{1}{xn}$ по формуле Тейлора:

$$\cos \frac{1}{xn} = 1 - \frac{1}{2x^2n^2} + o(\frac{1}{n^3}).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\frac{1}{2x^2n^2} + o(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{2x^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2x^2}.$$

Итак, $f(x) = \frac{1}{2x^2}$.

Задача 1.10. $f_n(x) = n^2(e^{x^n} - \cos x^n)$ $x \in [0;1)$

Решение. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(e^{x^n} - \cos x^n)$ $x \in [0;1)$.

Так как $x^n \rightarrow 0$, сделаем замену переменной $x^n = t$ и воспользуемся разложением по формуле Тейлора:

$$e^t - \cos t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)) = t + t^2 + o(t^2) \Rightarrow$$

$$e^{x^n} - \cos x^n = x^n - x^{2n} + o(x^{2n}) = x^n + o(x^n).$$

Следовательно, $e^{x^n} - \cos x^n \propto x^n$.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(\frac{1}{x})^n} = 0 \quad \text{при } x \in (0;1) \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.11. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1+nx}{x^2+n}, \quad x \in [0; +\infty).$

Задача 1.12. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot x^2 \cdot e^{-nx}, \quad x \in [0; +\infty).$

Задача 1.13. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x), \quad x \in (0; +\infty).$

Задача 1.14. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}, \quad x \in [0; +\infty).$

Задача 1.15. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$

Занятие 2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называют равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

В этом определении существенно, что номер N_ε не зависит от x .

Задача 2.1. Исследовать характер сходимости функциональной последовательности $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ на множестве $x \in [0; 1]$.

Решение. Воспользуемся достаточным условием равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве X .

Если существует такая числовая последовательность a_n , что $a_n \rightarrow 0$ и $\forall n \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, то f_n на X сходится равномерно к f .

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1 = f(x), 0 \leq x \leq 1,$

то $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{2} - 1 = a_n \rightarrow 0.$

Последовательность сходится на $[0,1]$ равномерно.

Задача 2.2. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0; +\infty).$

Решение. Предельная функция в этом случае равна 0.

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}} - 0 \right| = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n+x}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}} = a_n \rightarrow 0.$$

Следовательно, последовательность сходится равномерно на множестве $[0, +\infty).$

Применение производной при исследовании на равномерную сходимость часто дает возможность вычислить $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$

Задача 2.3. Рассмотрим пример: $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0;1].$

Решение. Предельная функция $f(x) = 0.$ Очевидно, что $f_n(x) > 0$ и $f(0) = f(1) = 0.$

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1) \cdot x^n = x^{n-1}(n - nx - x) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}.$$

Так как $f'_n(x) = 0$ при $x_n = \frac{n}{n+1},$ то

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \max_{[0,1]} f_n(x) = f_n(x_n) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Последовательность сходится равномерно на множестве $0 \leq x \leq 1.$

На следующем примере рассмотрим случай неравномерной сходимости.

Задача 2.4. $f_n(x) = x \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-nx^2}, \quad x \in [0, +\infty).$

Решение. Предельная функция $f(x) = 0$ (докажите).

$$f'_n(x) - f(x) = x \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-nx^2} \cdot (-2nx) + e^{-nx^2} \cdot \sqrt{n};$$

$$f'_n(x) - f(x) = e^{-nx^2} (x^2 \cdot \sqrt{n} \cdot (-2n) + \sqrt{n}) = 0.$$

Отсюда $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Нас интересует $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. В этой точке достигается максимальное отклонение функций последовательности от предельной функции.

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-n \cdot \frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Величина не является бесконечно малой, следовательно, на множестве $[0, +\infty)$ последовательность сходится неравномерно.

Задача 2.5. $f_n(x) = \sqrt{n} \cdot \sin \frac{x}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. При доказательстве неравномерной сходимости воспользуемся условием-отрицанием равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists \tilde{x} \in X \quad \left| f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \right| \geq \varepsilon.$$

Предельная функция $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{x}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0.$

Положим

$$\varepsilon = \sin 1 > 0.$$

Тогда при

$$x = n\sqrt{n} \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{n} \cdot \sin \frac{x}{n\sqrt{n}} - 0 \right| > \varepsilon.$$

То есть f_n на $\mathbb{R}$ сходится неравномерно.

Задача 2.6. $f_n(x) = \frac{n \cdot x^2}{n+x}, \quad x \in [1; +\infty).$

Решение. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x^2}{n+x} = x^2. & |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n \cdot x^2}{n+x} - x^2 \right| = \frac{x^3}{n+x} = \\ &= \frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x = n. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность сходится не равномерно.

Задания для самостоятельной работы

Найдите предельную функцию и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном множестве.

Задача 2.7. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$

Задача 2.8. $f_n(x) = \frac{n^2 \cdot x^2}{1 + n^2 \cdot x^4} \cdot \sin \frac{x^2}{\sqrt{n}}, \quad x \in [1; +\infty).$

Задача 2.9. $f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx^2}, \quad x \in [1; +\infty).$

Задача 2.10. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}, \quad x \in (0; 1].$

Задача 2.11. $f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad x \in [0; 1].$

Задача 2.12. $f_n(x) = n \cdot x(1-x)^n, \quad x \in [0; 1].$

Занятие 3. Функциональные ряды.

Множество сходимости функционального ряда

Функциональным рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ряд суммирующий функции. Функциональный ряд называется сходящимся в точке x_0 , если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если функциональный ряд сходится в каждой точке множества E , то он называется сходящимся на множестве E .

Найти множество сходимости функционального ряда.

Задача 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}.$

Решение. Для любого значения переменной x ряд является знакочередующимся. Воспользуемся признаком Лейбница.

$\frac{1}{n^{2x-1}}$ монотонно стремится к 0, если $2x+1 > 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$.

При остальных значениях x последовательность $\frac{1}{n^{2x-1}}$ не является бесконечно малой.

Задача 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x$

Решение. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^x = \frac{1}{2^x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-x}} < \infty$, если $-x > 1 \Rightarrow x < -1$. В данном случае был использован признак сравнения с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Задача 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \neq -1.$

Решение. Определим значения переменной x , при которых выполняется необходимое условие сходимости ряда:

$$\frac{1}{1+x^n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x| > 1. \text{ Воспользуемся признаком Коши.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{1+x^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|x^n| \cdot \left| \frac{1}{x^n} + 1 \right|}} = \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow |x| > 1.$$

Ряд сходится при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^x + 1}}$

Решение. Воспользуемся заменой на эквивалентную, так как ряд является положительным:

$$\frac{n}{\sqrt{n^x + 1}} \sim \frac{n}{n^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{x}{2}-1}}. \text{ Ряд сходится, если } \frac{x}{2} - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 4.$$

Задача 3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 \cdot (5x + 9)^{2n-1}}$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(x)|}{|c_n(x)|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{(n+1)^2 \cdot |(5x+9)^{2n+1}|} : \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 \cdot |(5x+9)^{2n-1}|} = \frac{1}{|5x+9|^2} < 1.$$

$$|5x+9| > 1 \Rightarrow \left|x + \frac{9}{5}\right| > \frac{1}{5} \Rightarrow x \in \left(-2; -\frac{8}{5}\right).$$

Исследуем точки, в которых признак Даламбера выдает 1.
При $x = -2$ получаем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 \cdot (5 \cdot (-2) + 9)^{2n-1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2} - \text{ряд расходится.}$$

При $x = -\frac{8}{5}$ ряд также расходится.

Функциональный ряд сходится при $x \in \left(-2; -\frac{8}{5}\right)$.

Задача 3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}.$

Решение. Воспользуемся теоремой сравнения:

$$\left| \frac{\cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \text{сходится. Множеством сходимости функцио-}$$

нального ряда является множество всех действительных чисел.

Задания для самостоятельной работы

Задача 3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2).$

Задача 3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot \cos nx}{\sqrt{n^x + 1}}.$

Задача 3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$

Задача 3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}.$

Занятие 4. Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд равномерно сходится на множестве E , если последовательность его частичных сумм является равномерно сходящейся функциональной последовательностью

$$\sum_{i=1}^n u_i(x) = S_n(x) \Rightarrow S(x) \text{ или остаток ряда равномерно сходится к } 0$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) = r_n(x) \Rightarrow 0.$$

Необходимым условием равномерной сходимости функционального ряда является равномерное стремление к нулю его общего члена $u_n(x) \Rightarrow 0$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда: если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно

указать такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех $n \geq n_0$

и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$.

В задачах 4.1–4.7 исследовать функциональные ряды на равномерную сходимость на заданных множествах.

Задача 4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3 \cdot x^3}, x \in (0; +\infty).$

Решение. Ряд сходится при всех допустимых значениях переменной x , так как $\frac{nx}{1+n^3 \cdot x^3} \sim \frac{1}{n^2 \cdot x^2}$.

Для доказательства неравномерной сходимости воспользуемся необходимым условием равномерной сходимости: у равномерно сходящегося ряда общий член является равномерно сходящейся к нулю последовательностью. В данном случае

$\frac{nx}{1+n^3 \cdot x^3} \rightarrow 0$ неравномерно, так как при

$$x = \frac{1}{n}, \quad \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^3 \cdot \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} < \varepsilon - \text{неверно.}$$

Ряд сходится неравномерно на множестве $x \in (0; +\infty)$.

Задача 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^3 \cdot x^3}, \quad x \in (1; +\infty)$.

Решение. Докажем равномерную сходимость ряда при $x \in [1; +\infty)$, используя признак Вейерштрасса:

$\frac{nx}{1 + n^3 \cdot x^3} = \frac{nx}{(1 + nx)(n^2x^2 - nx + 1)} < \frac{1}{n^2x^2 - nx + 1}$. Найдем минимум знаменателя с помощью производной:
 $nx = t; \quad (t^2 - t + 1)' = 2t - 1 = 0$.

$t = nx = \frac{1}{2}$ — локальный минимум. На промежутке $nx \in [1; +\infty)$ знаменатель строго возрастает и достигает минимума при $x = 1$.

$$\frac{nx}{1 + n^3x^3} < \frac{1}{n^2 - n + 1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} < \infty.$$

Общий член функционального ряда на промежутке $[1; +\infty)$ мажорируется общим членом сходящегося числового ряда. Следовательно, ряд сходится равномерно.

Задача 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n + \sqrt{x}}}; \quad x \geq 0$.

Решение. Ряд является знакочередующимся и сходящимся, так как $\frac{1}{\sqrt[3]{n + \sqrt{x}}} \rightarrow 0$ монотонно по n для $\forall x \geq 0$.

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся оценкой остаточного члена лейбницевского ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n$.

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \cdot c_k \right| \leq c_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n + \sqrt{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0.$$

Ряд сходится равномерно.

Задача 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx}; \quad x \in [0; +\infty).$

Решение. Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса. С этой целью приведем следующие вычисления:

$$(x^2 \cdot e^{-nx})' = x^2 \cdot e^{-nx} \cdot (-n) + 2x \cdot e^{-nx} = e^{-nx} \cdot x(-nx + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{n} \text{ — является точкой максимума, в которой достигается}$$

значение $\frac{4}{n^2 \cdot e^2}$. Следовательно, $\frac{x^2}{e^{nx}} \leq \frac{4}{n^2 \cdot e^2}$. А так как числовой ряд $\frac{4}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, наш функциональный ряд сходится равномерно на $[0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Задания для самостоятельной работы

Задача 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1 + n^6 \cdot x^2}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n \cdot \sqrt{n}}$ при $x \in [1; +\infty)$.

Задача 4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + nx)^2}$ при $x \in (0; +\infty)$.

2. Степенные ряды

Занятие 5. Степенные ряды.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Степенной ряд – это функциональный ряд вида:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$, где c_n – это числовая последовательность, назы-

ваемая общим членом степенного ряда, $x_0 \in R$ – центр степенного ряда. Интервал сходимости степенного ряда имеет вид $(x_0 - R, x_0 + R)$, где R – радиус сходимости, значение которого может быть вычислено по формуле Коши–Адамара.

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Задача 5.1. Найти множество сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}.$$

Решение. $c_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$, $x_0 = 1$. Находим радиус сходимости:

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2. \text{ Интервал сходимости имеет вид}$$

$(-1; 3)$. Исследуем поведение ряда в граничных точках интервала.

При $x = -1$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – знакопере-

дующийся, сходится по признаку Лейбница. При $x = 3$ ряд имеет

вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходящийся гармонический ряд ($\alpha = 1$).

Множеством сходимости степенного ряда является промежуток $[-1, 3)$.

Задача 5.2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \arctg x$ в окрестности точки 0.

Решение. Воспользуемся методом почленного интегрирования степенного ряда: $\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. При разложении подынтегральной функции в степенной ряд воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии: $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (-t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}.$$

Проинтегрируем почленно полученный степенной ряд.

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_0^x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Полученный степенной ряд сходится на отрезке $x \in [-1; 1]$.

Задача 5.3. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в окрестности точки -2.

Решение. Воспользуемся методом почленного дифференцирования ряда: $\frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)'$. а) Разложим в степенной ряд функцию

$f(x) = -\frac{1}{x}$ и б) полученный ряд продифференцируем.

$$\text{а) } -\frac{1}{x} = \frac{-1}{(x+2)-2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x+2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{x^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x+2)^n}{2^{n+1}} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (x+2)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Задача 5.4. Найдите сумму степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^n$.

Решение. Ряд сходится при $x \in (-2; 0)$. Для нахождения его суммы проинтегрируем степенной ряд:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^n &= (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x+1)^{n-1} = (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left((x+1)^n \right)' = \\ &= (x+1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \right]' = (x+1) \cdot \left[\frac{x+1}{1-(x+1)} \right]' = (x+1) \cdot \left(-1 - \frac{1}{x} \right)' = \frac{x+1}{x^2}. \end{aligned}$$

Задача 5.5. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

Решение. Ряд сходится при $x \in [-1; 1)$. Продифференцируем степенной ряд.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^n dx = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) dx = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot (-x - \ln|1-x|) = -1 - \frac{\ln|1-x|}{x}. \end{aligned}$$

Задача 5.6. Найдите сумму числового ряда. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}$.

Решение. Данный числовой ряд является значением степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ при $x = \frac{1}{3}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^{2n} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

При $x = \frac{1}{3}$ значение предельной функции равно $\frac{\ln 2}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Разложите функцию в степенной ряд в окрестности указанной точки.

Задача 5.7. $f(x) = \frac{x}{(x+4)^3}, \quad x_0 = 2.$

Задача 5.8. $f(x) = \ln(2+x), \quad x_0 = 4.$

Задача 5.9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}, \quad x_0 = 2.$

Суммировать степенные ряды и найти множество сходимости:

Задача 5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) \cdot x^n.$

Задача 5.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}} \cdot (x-1)^n.$

Задача 5.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} \cdot x^n.$

Занятие 6. Ряд Тейлора

Бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция представляется степенным рядом Тейлора вида

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$. Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена.

Разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.

1. Показательная функция:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Тригонометрические функции:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Степенная функция:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_\alpha^n \cdot x^n,$$

$$\text{где } c_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

4. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Задача 6.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Воспользуемся стандартным разложением степенной функции при $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n} \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^n}. \end{aligned}$$

Задача 6.2. Разложить функцию $f(x) = e^{2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Решение. Сделаем замену переменной и воспользуемся разложением Маклорена для показательной функции.

$$t = x - x_0 = x - 1 \Rightarrow x = t + 1.$$

$$\begin{aligned} e^{2x} &= e^{2(t+1)} = e^{2+2t} = e^2 \cdot e^{2t} = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \cdot t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 \cdot 2^n}{n!} \cdot (x-1)^n. \end{aligned}$$

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

Задача 6.3. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 4$.

Задача 6.4. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. Ряды Фурье

Занятие 7. Разложение периодических функций в ряд Фурье

$2l$ -периодическая функция $f(x)$ может быть представлена рядом Фурье вида $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$, где

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Если функция $f(x)$ четная, то $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx,$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = 0.$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

Задача 7.1. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = (x)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

Решение. Так как функция имеет период $T=1$, то ее достаточно описать на отрезке $[0;1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 1-x, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}.$$

Очевидно, что функция четная: $f(x) = f(-x)$. Поэтому

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$, где $l = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$ – полупериод f .

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Так как $l = \frac{1}{2}$, то вычисление коэффициентов Фурье сводится

к вычислению следующих интегралов: $a_0 = 2 \int_0^{1/2} x dx = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot 2 \int_0^{1/2} x \cdot \cos 2\pi n x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2\pi n x dx \Rightarrow v = \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \end{array} \right| = \\ &= 4 \cdot \frac{x \cdot \sin 2\pi n x}{2\pi n} \Big|_0^{1/2} - 4 \cdot \int_0^{1/2} \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} dx = 4 \cdot \frac{\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^2} \Big|_0^{1/2} = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{(-1)^n}{4n^2\pi^2} - \frac{1}{4n^2\pi^2} \right) = \frac{1}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Очевидно, что если n четное, то коэффициент равен 0. Если

$n = 2k + 1$ нечетное, то $a_{2k+1} = \frac{-2}{(2k+1)^2 \pi^2}$.

Ответ: $f(x) = (x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)2\pi x}{(2n+1)^2}$.

Задания для самостоятельной работы

Разложите функции в ряд Фурье.

Задача 7.2. $f(x) = |\sin x|$.

Задача 7.3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

Задача 7.4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Занятие 8. Задания для подготовки к контрольной работе

Задача 8.1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = (n+1)x^n - nx^{n+1}$.

Задача 8.2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n$.

Задача 8.3. Разложить в степенной ряд в окрестностях $x_0=0$ функцию $f(x) = (x^2 + 1)\ln(1-x)$.

Задача 8.4. Найти три первых ненулевых члена разложения функции $f(x) = \cos e^x$ по степеням x .

Задача 8.5. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение $e^{0,1}$.

Задача 8.6. Разложить функцию $y = (x+1)\sin x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

4. Интегралы, зависящие от параметра

Занятие 9. Интегралы, зависящие от параметра.

Определение и свойства

Если при каждом значении α функция $f(x, \alpha)$ интегрируема по Риману, то интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ называют собственным интегралом, зависящим от параметра. Интегралы более общего вида

$\Phi(\alpha) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ называются интегралами, зависящими от параметра с переменными пределами интегрирования.

Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, то интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ есть функция, непрерывная на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$.

Возможность дифференцирования интеграла по параметру определяется правилом Лейбница.

Если функция $f(x, \alpha)$ и её производная по α непрерывны в прямоугольнике $a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, то производная может быть вычислена по правилу Лейбница:

$$I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Чтобы продифференцировать интеграл с переменными пределами нужно ещё потребовать дифференцируемость функций $\phi(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$ и воспользоваться формулой:

$$\Phi'(\alpha) = f(\phi(\alpha); \alpha) \cdot \phi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha); \alpha) \cdot \varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\phi(\alpha)} \frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Задача 9.1. Найти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos \alpha x) e^{x \cdot \sin \alpha} dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция непрерывна в прямоугольнике $-\pi \leq x \leq \pi, -1 \leq \alpha \leq 1$, то искомый предел равен

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x, 0) dx$, где $f(x; 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (x + \cos \alpha x) e^{x \cdot \sin \alpha} = x + 1$, следова-

тельно, искомый предел равен $\int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) dx = 2\pi$.

Задача 9.2. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$.

Решение. Так как подынтегральная функция и её производная непрерывны для любых значений α и для всех значений x на отрезке интегрирования, то воспользуемся правилом Лейбница:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_1^2 \left(\frac{e^{\alpha x^2}}{x} \right)' dx = \int_1^2 \frac{x^2 \cdot e^{\alpha x^2}}{x} dx = \int_1^2 x \cdot e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \cdot \int_1^2 e^{\alpha x^2} d(\alpha x^2) = \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Вычисление предельной функции

Вычислите интегралы с параметром

Задача 9.3. $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \alpha^2 x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Решение. Отдельно рассмотрим случаи а) $\alpha = 0$ и б) $\alpha \neq 0$.

а) При $\alpha = 0$ интеграл имеет вид: $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

б)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \alpha^2 x^2} &= \left| \begin{array}{l} 1 + \alpha^2 x^2 = t \\ dt = \alpha^2 \cdot 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^1 \frac{2x\alpha^2 dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \int_1^{1+\alpha^2} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \ln(1 + \alpha^2 x^2) \Big|_0^1 = \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{2\alpha^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } I(\alpha) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{2\alpha^2} & \text{при } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

Задача 9.4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x}}.$

Решение. Интеграл является несобственным и сходящимся при $\alpha > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{e^{\alpha x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha \cdot e^{\alpha x}} \right) \Big|_0^A = - \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha \cdot e^{A\alpha}} - \frac{1}{\alpha \cdot e^0} \right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Ответ: $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > 0$.

Задача 9.5. $\int_0^{1/\alpha} \arcsin \alpha x dx$

Решение.

$$\int_0^{1/\alpha} \arcsin \alpha x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin \alpha x & dv = dx \\ du = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin \alpha x \Big|_0^{1/\alpha} -$$

$$- \int_0^{1/\alpha} \frac{\alpha x dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = \frac{\pi}{2\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{1-\alpha^2 x^2} \right) \Big|_0^{1/\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi+2}{2\alpha}.$$

Ответ: $I(\alpha) = \frac{\pi+2}{2\alpha}$ при $\alpha \neq 0$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 9.6. Найти $\Phi'(\alpha)$, если $\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$.

Занятие 10. Нахождение множества сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра

Задача 10.1. При каких α интеграл $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}} dx$ сходится?

Решение. Подынтегральная функция имеет особенность в нуле и является неотрицательной. Сравним наш интеграл с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\lambda}}$, который сходится при $\lambda < 1$. Так как при $x \rightarrow +0$ отношение функции $\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}$ и $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ стремится к $\frac{1}{2}$, приходим к выводу: наш интеграл сходится при $\alpha < 3$.

Ответ: $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}} dx$ сходится при $\alpha < 3$.

Задача 10.2. Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^{\alpha}} dx$.

Решение. Так как интеграл имеет две особенности, разобьем его на два интеграла.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx. \text{ Если } \alpha < 0, \text{ то интеграл расходится,}$$

так как подынтегральная функция положительная и бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$. Если $\alpha \geq 0$, то сходимость интеграла можно доказать, сравнивая его с интегралом вида: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, который сходится при $\lambda > 1$.

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} \leq \frac{\pi/2}{x^2}.$$

$$2) \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx. \text{ В зависимости от значения } \alpha \text{ интеграл}$$

может оказаться обычным интегралом Римана или несобственным.

Подынтегральная функция имеет особенность в нуле и неотрицательна. Определим функцию, эквивалентную ей в нуле.

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} \sim \frac{x}{(1+x^2)x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Интеграл сходится при $\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.

Множество сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx$ определяется как пересечение промежутков сходимости интегралов 1) и 2).

Ответ: $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha} dx$ сходится при $0 \leq \alpha < 2$.

Задания для самостоятельной работы

Определите множество сходимости интегралов.

Задача 10.3. $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \cdot \sin x}{1+x^3} dx.$

Задача 10.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x}}{x^{\frac{3\alpha}{2}}} dx.$

Исследование несобственных интегралов на равномерную сходимость по параметру

Интеграл вида $\int_a^{+\infty} f(\alpha, x) dx = I(\alpha)$ равномерно сходится по параметру α на множестве $Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon, \forall A \geq A_\varepsilon$ неравенство

$$\left| \int_A^{+\infty} f(\alpha, x) dx \right| < \varepsilon \text{ выполнено для } \forall \alpha \in Y.$$

Задача 10.5. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx$ является равномерно сходящимся при $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.

Решение. Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(\alpha, x) dx$ сходится равномерно на множестве X , если:

$$|f(\alpha, x)| \leq F(x) \quad \forall \alpha \in X \text{ и } \int_a^{+\infty} f(\alpha, x) dx \text{ является сходящимся.}$$

$\frac{|\sin \alpha x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, так как $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \rightarrow \infty, (\lambda = 2 > 1)$.

Интеграл является равномерно сходящимся по признаку Вейерштрасса.

Задача 10.6. Самостоятельно докажите равномерную сходи-

мость интеграла $\int_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^3} dx$ при $\alpha \in [0; 2]$.

Задача 10.7. Вычислить $I(\alpha)$ – предельную функцию интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx$ ($\alpha \geq 0$).

Решение. Несложно доказать по признаку Вейерштрасса, что интеграл является равномерно сходящимся по параметру.

Найдем производную предельной функции, продифференцировав подынтегральную по α . $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)}$. Вычислим полученный интеграл методом разложения на простые дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \cdot \left(\frac{1}{1+\alpha^2 x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + \alpha^2 x^2} \right). \\ I'(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{\alpha} \Big|_0^{+\infty} - \frac{\operatorname{arctg} x}{\alpha^2} \Big|_0^{+\infty} \right) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\alpha^2} \right) = \frac{\pi}{2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

$I(\alpha) = \int \frac{\pi d\alpha}{2(\alpha+1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(\alpha+1) + c$. Константа c может быть определена из условия: $I(0) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \ln(0+1) + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Ответ: $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(\alpha+1)$.

Задача 10.8. Самостоятельно вычислите предельную функцию интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx$ методом интегрирования по параметру.

Указание: $\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \int_a^b \frac{d\alpha}{1+(\alpha x)^2}$.

Занятие 11. Эйлеровы интегралы.

Гамма- и бета-функции

Интеграл $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$, сходящийся при $p > 0$, называется гамма-функцией, а интеграл $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, сходящийся при $p > 0$ и $q > 0$ — бета-функцией.

Перечислим основные свойства гамма-функции:

а) формула понижения $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$,

б) формула дополнения $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$.

Так как $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, то из формулы понижения следует, что $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Связь между бета-функцией и гамма-функцией выражается формулой $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов с помощью эйлеровых.

Задача 11.1. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем замену $t = \frac{x}{2}$, $dt = 2dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}} &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{(2t)^2(2-2t)} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3}(1-t)^{1/3}} = \int_0^1 t^{1/3-1} \cdot (1-t)^{2/3-1} dt = \\ &= B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Задача 11.2. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$.

Решение. Для сведения данного интеграла к бета-функции сделаем замену $\frac{1}{1+x} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \quad dt = -\frac{dx}{(1+x)^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t} \right)^{1/4} dt = \int_0^1 t^{3/4-1} \cdot (1-t)^{5/4-1} dt = B\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma(2)} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы сведением к эйлеровым.

Задача 11.3 $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$.

Задача 11.4 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Функциональные последовательности. Сходимость в точке, на множестве, равномерно, в среднем квадратичном.
2. Критерий Коши равномерной сходимости.
3. Равномерная сходимость и непрерывность.
4. Равномерная сходимость и интегрирование.
5. Равномерная сходимость и дифференцирование.
6. Функциональные ряды. Варианты сходимости.
7. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
8. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
9. Степенные ряды. Теорема Абеля.
10. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара.
11. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
12. Ряд Тейлора.
13. Основные разложения в степенные ряды.
14. Тригонометрическая система. Свойства. Ряд Фурье.
15. Евклидово пространство. Основной пример. Ортонормированные системы. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
16. Неравенство Бесселя. Следствие.
17. Преобразование частичных сумм ряда Фурье. Ядра Дирихле, свойства.
18. Теорема о сходимости ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции.
19. Ядра Фейера, свойства. Теорема Фейера.
20. Теорема Вейерштрасса.
21. Полнота тригонометрической системы. Равенство Парсеваля.
22. Интегралы с параметром. Теоремы о непрерывности.
23. Дифференцирование интеграла по параметру.
24. Теорема о повторном интегрировании.
25. Несобственные интегралы с параметром. Основные понятия.
26. Г-функция и В-функция, свойства.
27. Мера Жордана – схема определения.
28. Критерий измеримости.
29. Аддитивность меры Жордана.
30. Теорема о мере графика непрерывной функции.
31. Кратные интегралы; определение, свойства.
32. Сведение кратного интегрирования к повторному.

- 33. Замена переменных в кратных интегралах. Примеры.
- 34. Кривые на плоскости и в пространстве. Основные понятия и факты.
- 35. Криволинейные интегралы 1-го типа. Свойства.
- 36. Криволинейные интегралы 2-го типа. Свойства.
- 37. Формула Грина.
- 38. Независимость криволинейного интеграла от пути.
- 39. Поверхности, способы задания. Нормаль, касательная плоскость.
- 40. Площадь поверхности.
- 41. Поверхностные интегралы 1-го типа. Свойства.
- 42. Поверхностные интегралы 2-го типа. Свойства.
- 43. Формула Гаусса – Остроградского.
- 44. Элементы теории поля.

Основная рекомендуемая литература

- 1. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – Т. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1970.
- 2. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – Т. 1–3. – М.: Физматлит, 2003.
- 3. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: Астрель, 2005.

Оглавление

Введение.....	3
1. Функциональные последовательности и ряды	4
Занятие 1. Предельная функция функциональной последовательности. Равномерная сходимость функциональных последовательностей.....	4
Задания для самостоятельной работы	8
Занятие 2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей.....	8
Задания для самостоятельной работы	11
Занятие 3. Функциональные ряды. Множество сходимости функционального ряда.....	11
Задания для самостоятельной работы	13
Занятие 4. Равномерная сходимость функциональных рядов.....	14
Задания для самостоятельной работы	16
2. Степенные ряды	17
Занятие 5. Степенные ряды. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	17
Задания для самостоятельной работы	20
Занятие 6. Ряд Тейлора	20
3. Ряды Фурье.....	22
Занятие 7. Разложение периодических функций в ряд Фурье	22
Задания для самостоятельной работы	23
Занятие 8. Задания для подготовки к контрольной работе...	24
4. Интегралы, зависящие от параметра	24
Занятие 9. Интегралы, зависящие от параметра. Определение и свойства.....	24
Задания для самостоятельной работы	27
Занятие 10. Нахождение множества сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.....	27
Задания для самостоятельной работы	29
Занятие 11. Эйлеровы интегралы. Гамма- и бета-функции...	31
Задания для самостоятельной работы	32
Вопросы для подготовки к экзамену	33
Основная рекомендуемая литература.....	34

Учебное издание

Ануфриенко Маргарита Вадимовна
Шабаршина Галина Владимировна

Кратные интегралы и ряды

Методические указания

Редактор, корректор М. В. Никулина
Правка, верстка М. В. Никулина

Подписано в печать 11.10.2012. Формат 60×84¹/₁₆.
Гарнитура «TimesNewRoman». Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 20 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.