Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Н. В. Тимофеева

Линейная алгебра. Современная алгебра

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальности
Математика и компьютерные науки

Ярославль 2012

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73
Т41

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года

Рецензенты:
кафедра алгебры ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
В. Г. Шендеровский,
доцент кафедры общематематических
и естественно-научных дисциплин ЯФ МФЮА

Т 41 **Тимофеева, Н. В. Линейная алгебра. Современная алгебра:** учебное пособие / Н. В. Тимофеева; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2012. – 114 с.

Пособие содержит материалы по теории конечномерных векторных пространств и линейных отображений. Также делаются отступления в другие области современной алгебры, где применяются аналогичные методы доказательств или реализуются похожие ситуации.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010200.62 Математика и компьютерные науки (дисциплина "Линейная алгебра", цикл Б 3) очной формы обучения.

ISBN 978-5-8397-0871-6

УДК 512.64(075.8)
ББК В143я73

Оглавление

Введение

Центральной темой данного пособия является линейная алгебра в той ее части, где рассматриваются векторные пространства и их гомоморфизмы. Она определяет основную линию развития сюжета. Вместе с тем там, где это возможно, похожие ситуации реализуются в других декорациях – теориях групп, алгебр, модулей над кольцами. Это демонстрирует единство алгебры и общность ее методов, причем с минимумом используемых средств.

В связи с линейной алгеброй мы будем комбинировать два основных направления: общеалгебраические (гомологические) методы конструирования доказательств и происхождение вычислительных алгоритмов. Где можно, будем избегать частных приемов в пользу стандартных универсальных рассуждений. Акцент делается на общую схему ("механизм") доказательства. Таких общих схем очень немного, и каждая такая схема применяется в различных формально однотипных ситуациях. В первую очередь это так называемые элементарные гомологические методы, применение которых в курсах алгебры для студентов первых годов обучения не является традиционным.

Гомологические методы в нашей ситуации – это коммутативные диаграммы, точные последовательности и фильтрации подобъектами. Они однотипно работают во многих областях алгебры, что позволяет строить аналогичные доказательства формально похожих теорем из разных областей алгебры. Освоение такой техники поначалу требует определенных, хотя и небольших, усилий, однако потом использование указанных методов входит в привычку и превращается в род исчисления, значительно сокращающего объем работы. Где можно, делаются отступления в теорию (неабелевых!) групп, колец, модулей, где работают те же принципы конструирования доказательств. Отступления отмечены звездочкой *. При первом чтении можно пропускать отступления целиком или частично. Они "на вырост", и к ним полезно возвращаться позднее.

Вычислительные аспекты – это базисы, разнообразные приложения матричной алгебры и их алгоритмические реализации. По ходу дела вскрывается происхождение алгоритмов.

Другой важной чертой настоящего пособия является рассмотрение каждого понятия с различных точек зрения – аспект, важный для понимания изучаемого материала и формирования способности решать задачи. Однако на лекции "в режиме реального времени" этому невозможно уделить достаточное внимание. Поэтому остается надежда лишь на пособие, в котором можно прочитать все необходимое.

Подразумевается наличие у студентов общеалгебраической подготовки в объеме 1 курса университета. Считается, что читатель знаком с понятиями абелевой/неабелевой группы, подгруппы и факторгруппы, коммутативного/некоммутативного кольца, идеала, кольца главных идеалов, имеет некоторые навыки матричных вычислений. Автор стремился сделать так, чтобы чтение пособия не было трудным. Все же подразумевается, что работающий с пособием студент имеет мотивацию к самостоятельной работе и профессиональному саморазвитию.

Следует сказать несколько слов об упражнениях. Среди них нет задач вычислительного характера, направленных на оттачивание владения алгоритмами. Таких (очень важных!) задач много в классических сборниках, и поэтому нет особого смысла копировать их типы. Упражнения этого пособия – "теоретического" характера; они содержат фрагменты рассуждений, подлежащие самостоятельной проработке, либо рассуждения, которые нужно сконструировать, используя ранее показанные приемы. Часть задач носит иллюстративный характер: они демонстрируют, "что и как работает" в конструкциях и доказательствах и что происходит, если отменить или ослабить то или иное ограничение. Упражнения возникают по ходу повествования и "вморожены" в логику текста, поэтому решать их необходимо. Они составлены с целью дать студенту понимание различных структурных аспектов изучаемой теории на таком уровне, чтобы свести к минимуму нагрузку на память (меньше шансов возникновения ситуации "не понимаешь – выучи"). Задачи нетрудны и негромоздки, но призваны понемногу учить творческому делу – получению и доказательству новых математических результатов и прививать привычку самостоятельного поиска решений.

Пособие ориентировано в первую очередь на студентов второго года обучения на математическом факультете, осваивающих курс "Линейная алгебра". Кроме того, оно отчасти может быть полезно студентам последующих годов обучения, слушающих различные алгебраические курсы, в частности "Фундаментальные алгебраические структуры", а также для систематизации знаний при подготовке к государственной аттестации.

Пособие разбито на главы, главы – на разделы, разделы – на пункты. Номер пункта $m.n.k$ означает пункт k раздела n в главе m. Для удобства ориентирования в тексте принята следующая нумерация формул (а также определений, лемм, теорем и т. п.): номер $m.n.k$ означает формулу (соответственно, определение, лемму, теорему и т. п.) с номером k раздела n главы m. Нумерация формул (определений, лемм, теорем и т. п.) *не отслеживает* номера пунктов. Все теоремы, предложения, леммы снабжены названиями.

Глава 1

Векторные пространства. Подпространства. Фильтрации

В этой главе мы дадим определение и разовьем основные средства исследования главного предмета линейной алгебры – векторного пространства. С их помощью будут получены первые результаты о строении векторных пространств. Кроме того, рассмотрим аналогичные конструкции из других областей алгебры там, где они возникают.

1.1 Определения

1.1.1 Векторное пространство

Определение 1.1.1. *Действие* поля k на абелевой группе V – это отображение $\alpha : k \times V \to V$ такое, что выполнены следующие требования (аксиомы):

1. Унитарность: $\forall x \in V \;\; \alpha(1, x) = x$.

2. Ассоциативность: $\forall \mu, \nu \in k,\, \forall x \in V \;\; \alpha(\mu, \alpha(\nu, x)) = \alpha(\mu\nu, x)$.

3. Дистрибутивность относительно сложения в поле:
   $\forall \mu, \nu \in k,\, \forall x \in V \;\; \alpha(\mu + \nu, x) = \alpha(\mu, x) + \alpha(\nu, x)$.

4. Дистрибутивность относительно сложения в группе:
   $\forall \mu \in k,\; \forall x, y \in V \;\; \alpha(\mu, x + y) = \alpha(\mu, x) + \alpha(\mu, y)$.

Определение 1.1.2. *Векторным пространством над полем* k называется (аддитивная) абелева группа V с фиксированным на ней действием поля k. Поле k при этом называют *полем скаляров* или *полем определения*, его элементы – *скалярами*, а элементы группы V – *векторами*.

Пример 1.1.3. $\mathbb{R}^n$, k^n – n-мерные координатные пространства, образованные столбцами (или строками) длины n, элементы которых берутся из поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ или произвольного поля k. Действие скаляров определяется умножением всех компонент каждого столбца (или строки) на один и тот же скаляр μ.

Пример 1.1.4. Пусть F – поле, состоящее из конечного множества элементов. Можно доказать, что мощность такого поля равна степени некоторого простого числа p, т. е. $|F| = p^s$, $s > 0$. Образуем координатное пространство F^n. Понятно, что оно состоит из конечного числа векторов, равного $|F|^n = p^{sn}$.

1.1.2 R-модуль*

Близким к понятию векторного пространства является понятие *модуля над кольцом.* Мы ограничимся рассмотрением случая, когда R – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Таковы, например, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольца многочленов от любого числа (коммутирующих) переменных над любым полем.

Определение действия кольца R на абелевой группе V полностью аналогично определению действия поля.

Определение 1.1.5. *Действие* кольца R на абелевой группе V – это отображение $\alpha : R \times V \to V$ такое, что выполнены следующие требования (аксиомы):

1. Унитарность: $\forall x \in V \;\; \alpha(1, x) = x$.
2. Ассоциативность: $\forall \mu, \nu \in R, \forall x \in V \;\; \alpha(\mu, \alpha(\nu, x)) = \alpha(\mu\nu, x)$.
3. Дистрибутивность относительно сложения в кольце:
   $\forall \mu, \nu \in R, \forall x \in V \;\; \alpha(\mu + \nu, x) = \alpha(\mu, x) + \alpha(\nu, x)$.
4. Дистрибутивность относительно сложения в группе:
   $\forall \mu \in R,\ \forall x, y \in V \;\; \alpha(\mu, x + y) = \alpha(\mu, x) + \alpha(\mu, y)$.

Определение 1.1.6. *Модулем над кольцом R,* или *R-модулем,* называется (аддитивная) абелева группа V с фиксированным на ней действием кольца R. Кольцо k при этом называют *кольцом скаляров* или *кольцом определения.*

Пример 1.1.7. Существуют модули, в структурном отношении очень похожие на векторные пространства. Это модули вида R^n, где R – кольцо определения, n – натуральное число. Модуль такого вида называется *свободным R-модулем*, а число n – его *рангом.*

Однако модули над кольцами устроены намного сложнее (и разнообразнее) векторных пространств.

Пример 1.1.8. Любой идеал $I \subset R$ является R – модулем.

Пример 1.1.9. Факторкольцо кольца R по любому его идеалу $I \subset R$ также является R-модулем.

Поскольку если $R = k$ – поле, то оно не содержит нетривиальных собственных идеалов, поэтому два последних примера не имеют аналогов в теории векторных пространств.

1.1.3 Действие группы на множестве*

Если X – множество, G – группа (не обязательно абелева) с нейтральным элементом e, то похожим образом определяется *действие группы на множестве*. Это отображение $\alpha : G \times X \to X$, такое, что выполнены требования:

1. Унитарность: $\forall x \in X \ \ \alpha(e, x) = x$.
2. Ассоциативность: $\forall g, h \in G \ \forall x \in X \ \ \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$.

Пример 1.1.10. Пусть X – конечное множество из n элементов $\{1, 2, \dots, n\}$, $G = S_n$ – *группа перестановок* (*симметрическая группа*) n элементов. Тогда определено действие $\alpha : G \times X \to X$, осуществляемое по формуле $\alpha(\pi, x) = \pi(x)$, где $\pi(x)$ – номер места, на которое перемещается элемент x при действии перестановки π.

1.2 Подпространство. Задание подпространств. Линейная оболочка

1.2.1 Подпространство

Определение 1.2.1. *Подпространством* k-векторного пространства V называется любая подгруппа W абелевой группы V, стабильная относительно действия скаляров, т. е. такая, что для любого $\alpha \in k$ выполнено $\alpha W \subset W$.

Иными словами, подпространство – это подгруппа в абелевой группе V, включаемая в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} k \times V \arrow[r, "\kappa"] & V \\ k \times W \arrow[u, hook, "1\times i"] \arrow[r, "\kappa"] & W \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

где $i : W \hookrightarrow V$ – гомоморфизм вложения подгруппы. Коммутативность диаграммы (1.2.1) в точности означает, что для любого элемента $(\lambda, w) \in k \times W$ выполнено $\kappa \circ (1 \times i)(\lambda, w) = i \circ \kappa(\lambda, w)$. Часто требование коммутативности пишут в виде $\kappa \circ (1 \times i) = i \circ \kappa$.

Пример 1.2.2. Рассмотрим векторное пространство $V = k^n$, тогда подгруппа W, состоящая из всех векторов $(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$, у которых первые m компонент равны 0, является подпространством. Вложение $i : W \hookrightarrow V$ определяется системой линейных однородных уравнений $x_1 = \dots = x_m = 0$.

Пример 1.2.3. Для того же пространства $V = k^n$ рассмотрим систему m однородных линейных уравнений произвольного вида $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $i = \overline{1, m}$. Тогда пространство ее решений является подпространством в V, определяемым уравнениями этой системы.

Рассмотрим два подпространства W_1 и W_2 в одном и том же пространстве V. Нетрудно убедиться в том, что их пересечение $W_1 \cap W_2$ также является подпространством в V. То же самое верно для пересечения любого (в т. ч. бесконечного) набора подпространств.

Упражнение 1.2.4. Пусть подпространство W_1 задано в $V = k^n$ системой уравнений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $i = \overline{1, m}$; а подпространство W_2 – системой $\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j = 0$, $i = \overline{1, l}$. Выпишите систему уравнений, задающую пересечение $W_1 \cap W_2$.

1.2.2 Подмодуль*

В теории R-модулей понятие подмодуля полностью аналогично понятию подпространства k-векторного пространства.

Определение 1.2.5. *Подмодулем* R-модуля V называется любая подгруппа W абелевой группы V, стабильная относительно действия скаляров, т. е. такая, что для любого $\lambda \in R$ выполнено $\lambda W \subset W$.

Иными словами, подмодуль – это подгруппа в абелевой группе V, включаемая в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} R \times V \arrow[r, "\kappa"] & V \\ R \times W \arrow[u, hook, "1\times i"] \arrow[r, "\kappa"] & W \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd} \tag{1.2.2}$$

где $i : W \hookrightarrow V$ – гомоморфизм вложения подгруппы.

Пример 1.2.6. Любое кольцо R можно рассматривать как модуль над самим собой, а любой идеал $I \subset R$ – как подмодуль в R. *Сравните*: поле k можно рассматривать как k-векторное пространство, но оно не содержит подпространств, отличающихся от k и 0.

1.2.3 Линейные комбинации и линейные оболочки

Определение 1.2.7. *Линейная комбинация* векторов $v_1, \ldots, v_k$ пространства V – это выражение вида $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$. Скаляры λ_i называются *коэффициентами* линейной комбинации $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$.

Иногда приходится рассматривать бесконечные множества векторов, принадлежащих данному векторному пространству. Пусть множество векторов занумеровано некоторым множеством индексов I; образуем формальное выражение $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

Определение 1.2.8. *Финитная линейная комбинация* векторов $v_i, i \in I$ – это выражение $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, содержащее лишь конечное число ненулевых коэффициентов λ_i.

Такая линейная комбинация может быть вычислена как элемент векторного пространства V, в отличие от линейной комбинации с бесконечным набором ненулевых коэффициентов.

Теперь пусть $M \subset V$ – подмножество векторов пространства V.

Определение 1.2.9. *Линейная оболочка* подмножества M – это множество всех финитных линейных комбинаций векторов, принадлежащих подмножеству M. Линейная оболочка подмножества M обозначается символом $\langle M \rangle$.

Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны 0, также финитна.

Поскольку сумма двух финитных линейных комбинаций – снова финитная линейная комбинация, то $\langle M \rangle$ – подгруппа в абелевой группе V. Поскольку при умножении финитной линейной комбинации на скаляр получается снова финитная линейная комбинация, то $\langle M \rangle$ является подпространством в векторном пространстве V.

Теорема 1.2.10. *(Минимальность линейной оболочки) Линейная оболочка $\langle M \rangle$ подмножества M – это минимальное по включению подпространство в пространстве V, содержащее M.*

Доказательство. Заметим, что любое подпространство в V, если оно содержит подмножество M, содержит и его линейную оболочку. □

Упражнение 1.2.11. Докажите, что линейная оболочка $\langle M \rangle$ подмножества M – это пересечение всех подпространств в V, содержащих M.

1.3 Линейная зависимость

1.3.1 Понятие и простейшие свойства

Определение 1.3.1. Векторы $x_1, \ldots, x_n$ векторного пространства V называются *линейно зависимыми*, если существуют скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ такие, что

1. по крайней мере один из скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ отличен от 0;
2. $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

Любое выражение вида $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_n$. Линейная комбинация, хотя бы один из коэффициентов которой отличен от 0, называется *нетривиальной*.

Таким образом, система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависима, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация векторов этой системы.

Упражнение 1.3.2. Дайте определение линейно независимой системы векторов.

Упражнение 1.3.3. Докажите, что система, содержащая 0, всегда линейно зависима.

Упражнение 1.3.4. Докажите, что система линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы равен линейной комбинации остальных.

Упражнение 1.3.5. Покажите, что если некоторая подсистема данной системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Упражнение 1.3.6. Пусть даны две системы векторов: $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_s$, причем $r \leq s$ и векторы второй системы являются линейными комбинациями векторов первой. Докажите, что если система $x_1, \ldots, x_r$ линейно зависима, то и система $y_1, \ldots, y_s$ тоже линейно зависима.

Упражнение 1.3.7. Если каждый из векторов линейно независимой системы $e_1, \ldots, e_s$ является линейной комбинацией векторов системы $f_1, \ldots, f_r$, то $s \leq r$.

Определение 1.3.8. Подсистема (возможно, бесконечная) векторов M векторного пространства V называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

1.3.2 Линейная зависимость (алгоритм)

Пусть в пространстве k^n задана система векторов

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_s = (x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}).$$

Требуется выяснить, является ли данная система линейно зависимой. Если да, то необходимо найти в ней максимальную линейно независимую подсистему. Для этого:

1. Составляют матрицу, выписывая компоненты векторов системы $x_1, \dots, x_s$ в строки. Получается запись следующего вида
$$\left[\begin{array}{c|cccc} x_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_n & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right] \tag{1.3.1}$$
В левом столбце матрицы (1.3.1) находятся обозначения векторов, которые называются метками. Каждую строку помечают тем вектором исходной системы, который она представляет.

2. Используя элементарные преобразования правой (после черты) части матрицы (1.3.1) (метод Гаусса или любую его модификацию), приводят ее к ступенчатому виду. При перестановке метка перемещается вместе со строкой, которой она присвоена. При сложении строк метки ведут себя следующим образом. Пусть, например, строка x_i заменена в ходе преобразований на $x_i + \alpha x_j$. Тогда новая строка попрежнему имеет метку x_i. Если образуются нулевые строки, их вычеркивают. Если нулевые строки не образуются, то система линейно независима.

3. Число ступеней полученной ступенчатой матрицы равно ее рангу и равно числу векторов максимальной линейно независимой подсистемы. После приведения матрицы к ступенчатому виду "выжившие" строки окажутся отмеченными теми векторами, которые составляют максимальную линейно независимую подсистему.

1.4 Базисы и фильтрации

1.4.1 Базис

Определение 1.4.1. *Базис* векторного пространства V – это подсистема M векторов в V, удовлетворяющая двум условиям:

1. Подсистема M линейно независима.

2. Добавление к M любого вектора приводит к линейно зависимой системе.

Пример 1.4.2. Стандартный базис координатного пространства k^n состоит из n векторов-столбцов

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Пример 1.4.3. Базис пространства решений системы линейных однородных уравнений (так называемая фундаментальная система решений).

Определение 1.4.4. Пусть известно, что любой базис пространства V состоит из конечного числа векторов. *Размерностью* пространства V называется число векторов в любом базисе этого пространства.

Все векторные пространства над данным полем естественно подразделить на два класса: те, в которых существуют конечные базисы, и те, в которых конечные базисы построить невозможно. Пространства первого класса называются *конечномерными* и составляют основной предмет данного курса. Пространства второго класса называются *бесконечномерными*, часто возникают как пространства функций с определенными свойствами и изучаются преимущественно в курсах функционального анализа.

Замечание 1.4.5. Сформулированное определение размерности использует произвольно выбранный базис в пространстве V. Позднее (п. 1.5.1) мы докажем, что если хотя бы один базис данного пространства конечен, то число векторов во всех базисах этого пространства одинаково (инвариантность размерности).

Упражнение 1.4.6. Сколько различных базисов можно выбрать в векторном пространстве размерности n над полем из q элементов? *Указание*: используйте линейные оболочки и индуктивное построение базисов последовательным выбором базисных векторов.

1.4.2 Фильтрация векторного пространства

Определение 1.4.7. *Фильтрация* векторного пространства V – это последовательность вложенных подпространств

$$W_\bullet : 0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{n-1} \subsetneq W_n = V.$$

Подпространство W_i называется *i-м членом фильтрации* $W_\bullet$, число n – *длиной* фильтрации $W_\bullet$.

Говорят, что *фильтрацию* $W_\bullet$ *можно уплотнить*, если найдется такое подпространство $W_{i+(1/2)}$, что $W_i \subsetneq W_{i+(1/2)} \subsetneq W_{i+1}$.

Упражнение-определение 1.4.8. Сформулируйте точное определение того, что фильтрацию невозможно уплотнить. Такую фильтрацию назовем *максимальной.*

Соглашение 1.4.9. Говоря о фильтрациях, всегда будем подразумевать, что *никакие два последовательных члена фильтрации не совпадают*, а в записи будем использовать символ $\subset$.

Пример 1.4.10. Любое ненулевое векторное пространство обладает фильтрацией $0 \subset V$. Векторное пространство k^n обладает фильтрациями вида

$$0 \subset k^{n_1} \subset k^{n_2} \subset \cdots \subset k^{n_{m-1}} \subset k^n,$$

где $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{m-1} < n$. Фильтрацию вида

$$0 \subset k \subset k^2 \subset \cdots \subset k^{n-1} \subset k^n$$

невозможно уплотнить.

Упражнение 1.4.11. Докажите это!

1.4.3 Базис – фильтрация – базис

Каждому базису пространства V можно поставить в соответствие максимальную фильтрацию этого пространства. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис векторного пространства V. Тогда рассмотрим последовательность вложенных линейных оболочек

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \langle e_1\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \langle e_1, e_2\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, hook] & \langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \langle e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\rangle \arrow[d, equal] \\
0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} & V_n = V
\end{tikzcd}$$

Поскольку вектор e_i не может быть представлен в виде линейной комбинации предыдущих векторов $e_1, \ldots, e_{i-1}$ при всех $i = \overline{2, n}$, то все вложения подпространств $V_i, i = \overline{1, n}$ собственные, то есть соглашение 1.4.9 выполнено, и $V_\bullet$ – настоящая фильтрация пространства V.

Утверждение 1.4.12. Фильтрация $V_\bullet$ максимальна.

Для доказательства предположим, что это не так, и существует, например, такой номер i, что найдется подпространство $V_{i+(1/2)}$, удовлетворяющее условиям $V_i \subsetneq V_{i+(1/2)} \subsetneq V_{i+1}$. Выберем любой вектор $e_{i+(1/2)} \in V_{i+(1/2)} \setminus V_i$. Поскольку $V_{i+(1/2)} \subset V_{i+1}$, то вектор $e_{i+(1/2)}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}$. Пусть

$$e_{i+(1/2)} = \sum_{j=1}^{i+1} \alpha_j e_j \tag{1.4.1}$$

– такое представление. Поскольку $e_{i+(1/2)} \notin V_i$, то $\alpha_{i+1} \neq 0$. Таким образом, используя представление (1.4.1), можно линейно выразить вектор e_{i+1} через векторы $e_1, \ldots, e_i, e_{i+(1/2)}$. Отсюда следует включение $V_{i+1} \subset V_{i+(1/2)}$, что противоречит нашему предположению о том, что $V_{i+(1/2)} \subsetneq V_{i+1}$.

Теперь пусть имеется максимальная фильтрация пространства V:

$$0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n = V.$$

Выберем какой-нибудь ненулевой вектор $e_1 \in W_1$. Затем – вектор $e_2 \in W_2 \setminus W_1$. Процесс выбора векторов $e_i \in W_i \setminus W_{i-1}$ продолжается до последнего члена фильтрации $W_n = V$.

Рассуждая от противного и используя доказательство предыдущего утверждения, нетрудно решить следующие задачи.

Упражнение 1.4.13. Докажите, что полученная последовательность векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима.

Упражнение 1.4.14. Докажите, что эта последовательность образует базис пространства V.

Упражнение 1.4.15. Предположим, что выбор векторов $e_1, \ldots, e_m$ осуществляется для фильтрации, не являющейся максимальной. Убедитесь в том, что система $e_1, \ldots, e_m$ линейно независима.

Упражнение 1.4.16. Предположим, что система векторов $e_1, \ldots, e_m$ некоторого пространства V линейно независима, а вектор e_{m+1} линейно выражается через векторы $e_1, \ldots, e_m$. Что можно сказать о последовательности линейных оболочек $\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_1, \ldots, e_m \rangle, \langle e_1, \ldots, e_m, e_{m+1} \rangle$? Какие подпоследовательности в ней окажутся фильтрациями? Каких подпространств?

Определение 1.4.17. Пусть известно, что все фильтрации пространства V конечны. *Размерностью* пространства V называется длина его максимальной фильтрации.

Замечание 1.4.18. Согласно данному определению, размерность может зависеть от выбора фильтрации. Однако далее (п. 1.5.2) мы покажем, что это не так (докажем инвариантность размерности). Кроме того, из рассуждений этого пункта сразу следует, что длина максимальной фильтрации равна количеству векторов в любом построенном по ней базисе. И наоборот: количество векторов в базисе равно длине фильтрации, построенной по векторам этого базиса.

1.4.4 Фильтрации группы: класс разрешимых групп*

Пусть G – группа. Тогда можно строить фильтрации группы G подгруппами. Произвольная фильтрация произвольной группы

- может оказаться бесконечной;
- может не допускать формирования факторов G_i/G_{i-1}, поскольку не всякая подгруппа произвольной группы нормальна.

Существует класс групп, устроенный в смысле построения фильтраций достаточно просто.

Определение 1.4.19. *(Конечным) нормальным рядом* группы G называется ее фильтрация нормальными подгруппами

$$e \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_l = G.$$

Замечание 1.4.20. Если рассматривать группы с бесконечным множеством элементов, то среди них есть группы, содержащие бесконечные цепи вложенных друг в друга нормальных подгрупп. Тогда рассматривают отдельно *возрастающие фильтрации* $e \lhd G_1 \lhd \dots G_k \lhd \dots$ и *убывающие фильтрации* $G \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_l \rhd \dots$. В настоящем пособии мы работаем только с теми группами, которые обладают *конечным нормальным рядом.*

Замечание 1.4.21. Свойство нормальности *не транзитивно.* Если $F \lhd H$ и $H \lhd G$, то отсюда не следует, что $F \lhd G$. Поэтому в определении нормального ряда важно лишь, чтобы *последующая подгруппа была нормальна в предыдущей.*

Упражнение 1.4.22. В качестве примера к предыдущему замечанию рассмотрите группы: $G = A_4$ (группа четных перестановок четырех элементов), $H = V_4$ (так называемая *четверная группа Клейна*, состоящая из перестановок $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $F = \{e, (12)(34)\}$. Для доказательства того, что $F \ntriangleleft G$, найдите образ элемента $(12)(34)$ при сопряжении элементом (123), то есть вычислите элемент $(123)^{-1} \circ (12)(34) \circ (123)$ и убедитесь в том, что он *не принадлежит* подгруппе F.

Определение 1.4.23. Группа G называется *разрешимой*, если она обладает конечным нормальным рядом $e = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$, в котором все факторгруппы G_i/G_{i-1}, $i = \overline{1, n}$ абелевы.

Пример 1.4.24. Симметрические группы S_3 и S_4 разрешимы: существуют нормальные ряды

$$e \triangleleft A_3 \triangleleft S_3,$$
$$e \triangleleft V_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4.$$

Нетрудно проверить, что факторгруппы каждого ряда абелевы.

1.5 Инвариантность размерности

1.5.1 Два базиса в одном пространстве

Теорема 1.5.1. *(Равномощность базисов) Два базиса в конечномерном векторном пространстве содержат одинаковое число векторов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_m$ – два базиса векторного пространства V и пусть $m > n$. Выразим векторы второго базиса через векторы первого:

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & e_1 a_{11} + e_2 a_{21} + \cdots + e_n a_{n1}; \\ g_2 & = & e_1 a_{12} + e_2 a_{22} + \cdots + e_n a_{n2}; \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m & = & e_1 a_{1m} + e_2 a_{2m} + \cdots + e_n a_{nm}. \end{array}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

в которой строк больше, чем столбцов. Поскольку ранг системы векторов-строк матрицы равен рангу системы векторов-столбцов той же матрицы, то $\operatorname{rank} A < m$. Это означает, что существуют строки, равные линейным комбинациям остальных строк и, следовательно, среди векторов $g_i, i = \overline{1, m}$ найдется вектор, равный линейной комбинации остальных. Это противоречит предположению о том, что система $g_i, i = \overline{1, m}$ – базис.

Если предположить, что второй базис состоит из бесконечного набора векторов, то проведенное рассуждение для любой его подсистемы, имеющей мощность, большую n, также приводит к противоречию. В этом случае $g_1, \ldots, g_m, \ldots$ – система, содержащая линейно зависимую подсистему, поэтому она также линейно зависима. □

1.5.2 Различные фильтрации

Пусть в пространстве V выбраны две максимальные фильтрации: $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$ и $0 \subset V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_{n'}' = V$. Построим по каждой из них базис: $e_1, \ldots, e_n$ такой, что $V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle, i = \overline{1, n}$, для первой фильтрации и $e_1', \ldots, e_{n'}'$ такой, что $V_j' = \langle e_1', \ldots, e_j' \rangle, j = \overline{1, n'}$, для второй. Согласно теореме 1.5.1, оба базиса имеют равные длины: $n = n'$. Поэтому и соответствующие им максимальные фильтрации также имеют равные длины.

1.5.3 Монотонность размерности

Теорема 1.5.2. *(Монотонность размерности) Подпространство конечномерного пространства конечномерно, причем если W – подпространство в U, то $\dim U \leq \dim V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $U = V$.*

Доказательство. Если W – нулевое подпространство, то $\dim W = 0$. Если $W = V$, то базис пространства W является базисом пространства V. Пусть теперь $W \neq 0$ и $W \neq V$. Рассмотрим фильтрацию $0 \subset W \subset V$. Ее можно уплотнить до максимальной фильтрации

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_i = W \subset \cdots \subset V_n = V,$$

из которой сразу же следует требуемое неравенство.

Пусть теперь $\dim W = \dim V$. Выберем какую-нибудь максимальную фильтрацию подпространства W. Из равенства размерностей следует, что она же является максимальной фильтрацией для V, откуда $W = V$. □

Определение 1.5.3. *Коразмерностью* подпространства W в пространстве V (обозначение: $\operatorname{codim}_V W$) называется разность $\dim V - \dim W$.

Используя максимальную фильтрацию подпространства W и содержащую ее максимальную фильтрацию пространства V, получим диаграмму, иллюстрирующую соотношение между размерностями

$$0 \subset \overbrace{\underbrace{V_1 \subset \cdots \subset V_i = W}_{\dim W = i} \subset \underbrace{V_{i+1} \cdots \subset V_n = V}_{\operatorname{codim}_V W = n-i}}^{\dim V = n}.$$

1.6 Суммы и пересечения подпространств

1.6.1 Сумма подпространств

Заметим, что объединение $W_1 \cup W_2$ двух подпространств W_1 и W_2 в общем случае не является подпространством. Действительно, пусть подпространства W_1 и W_2 так расположены в пространстве V, что их пересечение $W_1 \cap W_2$ имеет в W_1 и в W_2 положительные коразмерности. Выберем вектор $w_1 \in W_1$ так, что $w_1 \notin W_2$. Также выберем вектор $w_2 \in W_2$ так, что $w_2 \notin W_1$. Тогда сумма $w_1 + w_2$ *не принадлежит* ни W_1, ни W_2 (*убедитесь в этом!*).

Определение 1.6.1. *Суммой подпространств* W_1 и W_2 векторного пространства V называют множество

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}.$$

Упражнение 1.6.2. Проверьте, что $W_1 + W_2$ – подпространство, содержащее подпространства W_1 и W_2.

Упражнение 1.6.3. Покажите, что $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

Отсюда следует, что сумма $W_1 + W_2$ – это минимальное по включению подпространство в V, содержащее как W_1, так и W_2.

Упражнение 1.6.4. Докажите, что объединение $W_1 \cup W_2$ является подпространством в V тогда и только тогда, когда одно из подпространств W_1, W_2 является подпространством другого.

1.6.2 Размерность суммы подпространств

Теорема 1.6.5. *(Теорема Грассмана) Пусть V – конечномерное k-векторное пространство, W_1 и W_2 – его подпространства. Тогда справедливо равенство*

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

Доказательство. Поскольку V – конечномерное векторное пространство, то его подпространства W_1, W_2 и $W_1 \cap W_2$ конечномерны. Выберем какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_k$ в пересечении $W_1 \cap W_2$ и дополним его векторами $g_1, \dots, g_l$ до базиса $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l$ подпространства W_1 и векторами $h_1, \dots, h_m$ до базиса $e_1, \dots, e_k, h_1, \dots, h_m$ подпространства W_2. Тогда рассмотрим систему векторов

$$g_1, \dots, g_l, e_1, \dots, e_k, h_1, \dots, h_m.$$

Понятно, что ее линейная оболочка совпадает с суммой подпространств $W_1 + W_2$. Чтобы показать, что построенная система векторов образует базис суммы, достаточно проверить, что она линейно независима.

Пусть $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l + \gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m$ – равная 0 линейная комбинация. Перепишем ее в виде уравнения

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = -(\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m).$$

Обозначив правую часть символом w, заметим, что $W_1 \ni w \in W_2$, что означает, что $w \in W_1 \cap W_2$. Тогда вектор w может быть разложен по векторам $e_1, \dots, e_k$: $w = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$. Таким образом имеем два разложения вектора w по базису подпространства W_2:

$$w = -(\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k.$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. Поскольку $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l$ – базис подпространства W_1, то также заключаем, что $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$, что доказывает линейную независимость системы $g_1, \dots, g_l, e_1, \dots, e_k, h_1, \dots, h_m$. Теперь теорема следует из подсчета базисных векторов. $\square$

Упражнение 1.6.6. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Грассмана для трех подпространств, используя подходящий выбор базисов.

1.6.3 Прямая сумма подпространств

Определение 1.6.7. Сумма подпространств $W_1 + W_2$ пространства V *прямая*, если $W_1 \cap W_2 = 0$.

Прямая сумма обозначается символом $W_1 \oplus W_2$. Из теоремы Грассмана имеем

Следствие 1.6.8. *(Размерность прямой суммы) Сумма подпространств является прямой тогда и только тогда, когда ее размерность равна сумме размерностей слагаемых:*

$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Упражнение 1.6.9. Используя доказательство теоремы Грассмана, докажите, что базис прямой суммы подпространств может быть получен объединением базисов слагаемых.

Имеет место следующий критерий.

Теорема 1.6.10. *(Прямое разложение вектора) Сумма подпространств $W_1 + W_2$ прямая тогда и только тогда, когда каждый вектор $w \in W_1 + W_2$ обладает единственным разложением $w = w_1 + w_2$, в котором $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.*

Доказательство. Пусть $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$. В этом случае для двух разложений одного и того же вектора $w = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ имеем $w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2$. Поскольку $W_1 \cap W_2 = 0$, то $w_1 = w_1'$ и $w_2 = w_2'$.

Обратно, пусть любой вектор из суммы $W_1 + W_2$ обладает единственным разложением указанного вида и пусть $W_1 \cap W_2 \neq 0$. Возьмем произвольный ненулевой вектор из пересечения слагаемых $w \in W_1 \cap W_2$. Тогда он имеет два различных разложения $w = w + 0 = 0 + w$ (слагаемое, равное w, отнесено сначала к подпространству W_1, а затем к подпространству W_2), что противоречит предположению. Таким образом, $W_1 \cap W_2 = 0$, и сумма прямая. □

1.6.4 Базис суммы линейных оболочек (алгоритм)

Пусть даны два (или более) подпространства, заданные как линейные оболочки своих подсистем векторов $W_1 = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, $W_2 = \langle w_1' \dots, w_l' \rangle$. Требуется указать размерность и базис суммы этих подпространств.

Поскольку $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle = \langle w_1, \dots, w_k, w_1' \dots, w_l' \rangle$, то базис суммы $W_1 + W_2$ может быть вычислен как базис линейной оболочки системы $w_1, \dots, w_k, w_1' \dots, w_l'$. Для этого:

1. Составляют матрицу, выписывая координаты векторов системы $w_1, \dots, w_k, w_1' \dots, w_l'$ в строки.

2. Используя элементарные преобразования полученной матрицы (метод Гаусса или любую его модификацию), приводят ее к ступенчатому виду. Если образуются нулевые строки, их вычеркивают.

3. Число ступеней полученной ступенчатой матрицы равно ее рангу и равно размерности суммы $W_1 + W_2$; строки этой матрицы – искомые базисные векторы.

Замечание 1.6.11. В некоторых задачах необходимо выбрать базисные векторы суммы $W_1 + W_2$ из множества $w_1, \ldots, w_k, w'_1 \ldots, w'_l$. Тогда строки исходной матрицы следует помечать векторами исходного множества и действовать аналогично п. 1.3.2. При перестановке метка перемещается вместе со строкой, которой она присвоена. При сложении строк метки ведут себя следующим образом. Пусть, например, строка w_1 заменена в ходе преобразований на $w_1 + \alpha w_2$. Тогда новая строка по-прежнему имеет метку w_1. После приведения матрицы к ступенчатому виду "выжившие" строки окажутся отмеченными теми векторами, которые являются базисными для $W_1 + W_2$, векторы из множества $w_1, \ldots, w_k, w'_1 \ldots, w'_l$, являющиеся линейными комбинациями базисных, будут вычеркнуты.

1.6.5 Базис пересечения линейных оболочек (алгоритм)

Пусть снова два подпространства заданы как линейные оболочки систем векторов $A = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, $B = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle$. Требуется построить их пересечение $A \cap B$.

Для построения алгоритма заметим, что вектор x принадлежит пересечению $A \cap B$ тогда и только тогда, когда он может быть представлен как в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_m$, так и в виде линейной комбинации векторов $b_1, \ldots, b_s$. Иными словами, когда существуют два набора скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_s$ таких, что

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m = x = -\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_s b_s \qquad (1.6.1)$$

(знак минус в последнем выражении выбран из соображений дальнейшего удобства). Таким образом, пересечение подпространств определяется множеством векторов x, удовлетворяющих условиям (1.6.1). Для отыскания этого множества целесообразно исследовать решения системы

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_s b_s = 0, \qquad (1.6.2)$$

и алгоритм вычислений получается следующим.

1. Выписать матрицу, столбцы которой образованы векторами

$$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_s.$$

2. Используя элементарные преобразования (метод Гаусса или любую его модификацию) привести матрицу, построенную в п. 1, к простейшему виду. Под простейшим понимается вид матрицы, который

содержит максимальное количество столбцов вида

$$\begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}$$

в котором на всех местах, кроме одного, стоят нули, а на оставшемся месте – единица.

3. Построить фундаментальную систему решений исследуемой системы уравнений. Она состоит из набора строк $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s$ длины $m + s$.

4. Искомое подпространство $A \cap B$ – это линейная оболочка множества $\{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m\}$ (или, что равносильно, множества $\{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_s b_s\}$), где наборы α_i (соответственно, β_j) вычислены в п. 3.

5. Если необходимо указать базис пересечения $A \cap B$, то к множеству линейных комбинаций $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ (соответственно $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_s b_s$), где α_i (соответственно β_j) соответствуют решениям фундаментальной системы, вычисленной в п. 3, применить алгоритм построения максимальной линейно независимой подсистемы.

Замечание 1.6.12. Если, проводя элементарные преобразования матрицы п. 1 $(a_1 \dots a_m b_1 \dots b_s)$, формировать столбцы указанного в п. 2 вида только среди первых m столбцов, то выполняемые действия равносильны одновременному решению s неоднородных систем уравнений, выражающих каждый из векторов $b_1, \dots, b_s$ через векторы $a_1, \dots, a_m$. Те векторы b_i, для которых система совместна, входят в пересечение, остальные – нет.

1.6.6 Сумма и пересечение подпространств, заданных уравнениями

Пусть два подпространства U и W заданы в пространстве V системами уравнений

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad W : \begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n = 0. \end{cases}$$

Требуется вычислить уравнения, задающие в пространстве V сумму $U+V$ и пересечение $U \cap V$.

Для задания пересечения достаточно объединить две данные системы в одну:

$$U \cap W : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{s1}x_1 + \dots + b_{sn}x_n = 0. \end{cases}$$

Для вычисления уравнений суммы будем использовать алгоритм, похожий на алгоритм предыдущего пункта (причина сходства будет раскрыта в разделе "Двойственное пространство").

1. Выписать матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{m1} & b_{11} & \dots & b_{s1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} & b_{1n} & \dots & b_{sn} \end{array}\right],$$

столбцы которой образованы коэффициентами уравнений, задающих подпространства U и V (обратите внимание на порядок следования индексов).

2. Используя элементарные преобразования (метод Гаусса или любую его модификацию), привести матрицу, построенную в п. 1, к простейшему виду. Под простейшим понимается вид матрицы, который содержит максимальное количество столбцов вида

$$\begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array}$$

в котором на всех местах, кроме одного, стоят нули, а на оставшемся месте – единица.

3. Построить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений, соответствующей исследуемой матрице. Она состоит из набора строк $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s$ длины $m+s$.

4. Сформировать множество $\{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m\}$ (или, что равносильно, множество $\{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_s b_s\}$), где наборы α_i (соответственно β_j) вычислены в п. 3, а "векторы" a_i (соответственно b_j) образованы коэффициентами уравнения, а именно

$$a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \ \dots, \ a_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}),$$
$$b_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}), \ \dots, \ b_s = (b_{s1}, \dots, b_{sn}).$$

5. Каждой линейной комбинации $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ (или $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_s b_s$) поставить в соответствие линейное однородное уравнение, в котором $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ (или соответственно $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_s b_s$) – строка коэффициентов левой части. Полученные уравнения задают сумму $U + W$.

1.7 Смена базисов и координаты

1.7.1 Матрица перехода

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – первоначальный базис пространства V, $e'_1, \dots, e'_n$ – новый базис того же пространства. Пусть векторы нового базиса имеют в первоначальном базисе разложение

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}. \tag{1.7.1}$$

Коэффициенты $a_{ji}, j, i = \overline{1, n}$ составляют матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

называемую *матрицей перехода* от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$. Такая матрица составляется по правилу: i-й столбец матрицы составлен координатами i-го вектора нового базиса в первоначальном базисе. Поэтому формула связи базисов может быть написана в следующей символической матричной форме:

$$\begin{bmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Упражнение 1.7.1. Пусть в пространстве V выбран базис $e_1, \dots, e_n$, затем по нему построена максимальная фильтрация, а затем по этой фильтрации построен новый базис $e'_1, \dots, e'_n$. Охарактеризуйте вид матрицы перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$.

1.7.2 Изменение координат при смене базиса

Располагая в одном и том же пространстве V двумя базисами $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$, имеем два различных координатных представления для каждого вектора $x \in V$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j = \sum_{i=1}^{n} e'_i x'_i.$$

Выполнив подстановку (1.7.1), получим

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j = \sum_{i=1}^{n} e'_i x'_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}) x'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i.$$

Таким образом получаем уравнение связи для координат в базисах $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i,$$

или, в матричной записи,

$$X = AX'.$$

Обращаем внимание читателя на то, что в этой формуле *старые координаты выражены через новые.*

Поскольку матрица перехода A образована координатами одного базиса в другом, то ее столбцы линейно независимы. Это означает, что ее ранг равен размерности n пространства V, т. е. *матрица перехода от базиса к базису невырожденная.* Значит, для нее существует обратная матрица A^{-1}, и уравнение связи координат вектора в разных базисах можно переписать как выражение *новых координат через старые*:

$$X' = A^{-1} X. \tag{1.7.2}$$

Обозначив за $\overline{a}_{ij}$ элементы матрицы A^{-1}, можем записать

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j.$$

Замечание 1.7.2. При смене базиса координаты любого вектора $x \in V$ изменяются, в то время как *сам вектор x как элемент пространства V остается неизменным.* Действительно, возьмем координатное представление вектора x и выполним смену базиса и соответствующее преобразование координат:

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} e_j \delta_{ji} x_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} e_j a_{jl} \overline{a}_{li} x_i = \sum_{k=1}^{n} e'_k x'_k.$$

Глава 2

Морфизмы

Исследование гомоморфизмов алгебраических систем позволяет исследовать строение этих систем, в частности, ставить и решать задачи классификации. Такая задача будет решена для векторных пространств. Кроме этого, мы разовьем аппарат для работы с гомоморфизмами не только векторных пространств, но и некоторых других алгебраических структур, докажем теоремы о гомоморфизмах. Не будет оставлен вне рассмотрения и вычислительный аспект работы с гомоморфизмами векторных пространств.

2.1 Гомоморфизмы (линейные отображения) векторных пространств

2.1.1 Гомоморфизм и его задание

Определение 2.1.1. *Гомоморфизм* k-векторных пространств – это отображение $f : V \to W$ такое, что для любых скаляров $\mu, \nu \in k$ и любых векторов $v_1, v_2 \in V$ выполнено соотношение $f(\mu v_1 + \nu v_2) = \mu f(v_1) + \nu f(v_2)$.

Указанное соотношение иногда называют требованием *линейности*, а гомоморфизм векторных пространств – *линейным отображением* векторных пространств.

Равносильно, гомоморфизм $f : V \to W$ k-векторных пространств может быть определен как гомоморфизм соответствующих им абелевых групп, *совместимый с действием поля скаляров*, т. е. включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} k \times V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1\times f"'] & V \arrow[d, "f"] \\ k \times W \arrow[r, "\alpha'"] & W \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

Горизонтальные стрелки – это отображения действий поля скаляров на абелевых группах V и W.

Если в векторном пространстве V зафиксировать какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_n$, то для задания гомоморфизма $f : V \to W$ достаточно указать, в какие векторы пространства W отображаются базисные векторы e_i. Пусть, например, векторы $e_1, \dots, e_n$ отображаются в векторы $f_1 = f(e_1), \dots, f_n = f(e_n)$ соответственно. Произвольный вектор $v \in V$ обладает в базисе $e_1, \dots, e_n$ координатным представлением $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Согласно линейности гомоморфизма f можно написать

$$f(v) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 f_1 + \dots x_n f_n.$$

Это означает, что образ любого вектора при гомоморфизме f может быть вычислен с помощью образов базисных векторов. Для задания гомоморфизма векторных пространств достаточно задать отображение множества базисных векторов пространства V в пространство W, которое *продолжается по линейности* до гомоморфизма $f : V \to W$.

2.1.2 Изоморфизм

Определение 2.1.2. Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств называется *изоморфизмом*, если f биективен.

Для изоморфизма векторных пространств можно дать другое, равносильное, определение.

Определение 2.1.3. Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств называется *изоморфизмом*, если f обладает двусторонним обратным гомоморфизмом, т. е. существует гомоморфизм $f^{-1} : W \to V$ такой, что $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ и $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$.

Упражнение 2.1.4. Докажите, что оба определения изоморфизма равносильны.

Замечание 2.1.5. В последнем определении важно, чтобы f^{-1} был именно *двусторонним обратным* для f. Действительно, пусть V разложено в прямую сумму подпространств $V = W \oplus U$, $f : V \to W, v = w + u \mapsto w$ – проектирование на прямое слагаемое, и $f^{-1} : W \to V$ – вложение прямого слагаемого, определяемое по формуле $f^{-1} = (\mathrm{id}_W, 0) : f^{-1} w = w + 0$. Тогда выполнено только одно соотношение: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$. Второе соотношение не выполнено, и f *не осуществляет биекцию* между пространствами V и W. Тем самым рассмотренный гомоморфизм f *не является изоморфизмом.*

2.1.3 Критерии инъективности и изоморфности линейного отображения

Лемма 2.1.6. *(Критерий инъективности) Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств инъективен тогда и только тогда, когда он переводит любую линейно независимую систему векторов в линейно независимую систему векторов.*

Доказательство. Пусть $f : V \to W$ – инъективный гомоморфизм векторных пространств. Выберем в V произвольную линейно независимую подсистему $g_1, \dots, g_m$ и рассмотрим образы векторов этой подсистемы: $f(g_1), \dots, f(g_m)$. Предположим, что существуют скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, не все из которых равны 0 и такие, что $\alpha_1 f(g_1) + \dots + \alpha_m f(g_m) = 0$. Используя линейность отображения f, последнее равенство можно переписать в виде $f(\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m) = 0$. Поскольку векторы $g_1, \dots, g_m$ линейно независимы, а скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ не все равны 0, то вектор $g := \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m$ отличен от 0. Тогда для любого вектора $v \in V$ имеем $f(v + g) = f(v) + f(g) = f(v)$, что противоречит инъективности гомоморфизма f.

Обратно, пусть гомоморфизм $f : V \to W$ любую линейно независимую подсистему пространства V переводит в линейно независимую подсистему пространства W. Предположим, что найдутся два различных вектора $v_1, v_2 \in V$ такие, что $f(v_1) = f(v_2)$. Обозначим за $v := v_1 - v_2$; тогда $f(v) = f(v_1) - f(v_2) = 0$. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$; тогда вектор v приобретет координатное представление $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Поскольку $v \neq 0$, то не все координаты $x_1, \dots, x_n$ равны 0. Применив отображение f, получим $f(v) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = 0$, что противоречит линейной независимости образов $f(e_1), \dots, f(e_n)$. $\square$

Теорема 2.1.7. *(Критерий изоморфности) Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он переводит базис в базис.*

Доказательство. Гомоморфизм $f : V \to W$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.

Пусть f является изоморфизмом, тогда он, во-первых, инъективен, а значит, переводит любой базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V в линейно независимую подсистему $f(e_1), \dots, f(e_n)$ пространства W. При этом $f(V) = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$. Во-вторых, f сюръективен, следовательно, $f(V) = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle = W$. Из последнего равенства заключаем, что $f(e_1), \dots, f(e_n)$ – базис пространства W.

Пусть теперь известно, что гомоморфизм $f : V \to W$ отображает некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V в базис пространства W. Тогда он осуществляет биективное соответствие

$$v = x_1e_1 \dots x_ne_n \mapsto x_1f(e_1) \dots x_nf(e_n)$$

между векторами пространства V и векторами пространства W, то есть является изоморфизмом. $\square$

Следствие 2.1.8. *(Задание изоморфизма) Для построения изоморфизма между двумя векторными пространствами достаточно установить биекцию между их базисами.*

2.1.4 Базис как изоморфизм

Выберем в векторном пространстве V какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_n$. Тогда каждый вектор $v \in V$ приобретает однозначно определенное координатное представление $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, где $x_i \in k$, $i = \overline{1, n}$. Тем самым выбор базиса определяет отображение $(e_1, \dots, e_n) : V \to k^n$, которое задается формулой $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Понятно, что это отображение k-линейно, т. е. является гомоморфизмом k-векторных пространств. Более того, оно обладает двусторонним обратным (проверьте!) гомоморфизмом, который задается соответствием $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Таким образом, $(e_1, \dots, e_n) : V \to k^n$ – изоморфизм k-векторных пространств. В силу таких изоморфизмов в абстрактных векторных пространствах возможны вычисления в координатах.

Обратно, пусть имеется изоморфизм $\phi : V \to k^n$. Тогда рассмотрим двусторонний обратный к нему изоморфизм $\phi^{-1} : k^n \to V$. Тогда по критерию изоморфности линейного отображения векторы $e_i := \phi^{-1}(0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 на месте с номером i), $i = \overline{1, n}$, составляют базис пространства V. При этом изоморфизм ϕ строится по базису $e_1, \dots, e_n$, то есть $\phi = (e_1, \dots, e_n)$.

Если имеются два базиса $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ с матрицей перехода A, то соответствующие им изоморфизмы включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "(e_1,\dots,e_n)"'] \arrow[dr, "(e'_1,\dots,e'_n)"] & \\ k^n \arrow[r, "A^{-1}"'] & k^n \end{tikzcd}$$

Горизонтальный изоморфизм задается умножением столбца координат $X = (x_1, \dots x_n)^T$ на матрицу A^{-1} слева согласно правилу (1.7.2) преобразования координат $X' = A^{-1}X$.

2.1.5 Классификация векторных пространств

Во-первых, заметим, что изоморфность – это отношение эквивалентности в классе всех конечномерных векторных пространств над фиксированным полем k. Действительно, каждое конечномерное векторное пространство изоморфно самому себе – отношение изоморфности рефлексивно. Всякий изоморфизм обратим, следовательно, отношение изоморфности симметрично. Наконец, композиция изоморфизмов есть снова изоморфизм – отношение изоморфности транзитивно.

Каждый класс изоморфных конечномерных векторных пространств над фиксированным полем k имеет представитель – координатное пространство k^n той же размерности над тем же полем. Таким образом, конечномерные векторные пространства над данным полем k классифицируются натуральным числом – размерностью и только ею. Полученный результат суммируем в виде теоремы.

Теорема 2.1.9. *(Классификация векторных пространств) Классы изоморфных конечномерных векторных пространств над полем k биективны целым неотрицательным числам. Биекция устанавливается следующим образом: каждому классу изоморфных векторных пространств ставится в соответствие размерность пространств этого класса.*

2.1.6 Еще одна теорема классификации: циклические группы*

В качестве примера теоремы классификации мы приведем теорему о циклических группах. Произвольные группы (даже с конечным числом элементов) устроены настолько разнообразно, что проблема их классификации далека от своего полного решения. Поэтому приходится выделять более узкие структурные классы групп и изучать их с помощью методов, наиболее подходящих для каждого класса. Наиболее просто устроены циклические группы.

Определение 2.1.10. Пусть G – группа с нейтральным элементом e и операцией, записываемой мультипликативно, $g \in G$ – произвольный элемент. Подмножество $\langle g \rangle = \{\dots, g^{-l}, \dots, g^{-1}, g^0 = e, g, \dots, g^l, \dots\}$ всех степеней элемента g образует подгруппу $\langle g \rangle$, называемую *циклической* *подгруппой, порожденной элементом* g. Сам элемент g называется *образующей* циклической подгруппы $\langle g \rangle$.

Предложение 2.1.11. *(Гомоморфизм группы целых чисел) Элемент* g *группы* G *определяет гомоморфизм групп* $g : \mathbb{Z} \to G, n \mapsto g^n$, *а циклическая подгруппа* $\langle g \rangle \subset G$ *равна образу этого гомоморфизма.*

Упражнение 2.1.12. Докажите это.

Определение 2.1.13. Группа G называется *циклической*, если она совпадает с одной из своих циклических подгрупп.

Таким образом, чтобы перечислить классы изоморфизма циклических групп, достаточно знать гомоморфные образы группы целых чисел. Читателю известно, что имеют место два случая.

1. Гомоморфизм g биективен на свой образ и, таким образом, $G \cong \mathbb{Z}$.
2. Существует такое минимальное $m > 0$, что $g(0) = g(m)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_m$, где $\mathbb{Z}_m$ – группа классов вычетов по модулю m.

Тем самым доказана следующая

Теорема 2.1.14. *(Классификация циклических групп) Циклическая группа либо бесконечна и изоморфна группе* $\mathbb{Z}$, *либо конечна и изоморфна группе классов вычетов с тем же числом элементов.*

Упражнение 2.1.15. Докажите, что каждому делителю d порядка m циклической группы G соответствует единственная циклическая подгруппа H порядка d. Укажите образующую подгруппы H.

Упражнение 2.1.16. Докажите, что в циклической группе порядка m всякий элемент вида g^h, где $(h, m) = 1$, является образующей и все образующие имеют только такой вид.

Упражнение 2.1.17. Пусть d – делитель порядка m циклической группы G. Докажите, что количество элементов порядка d в циклической группе равно *функции Эйлера*, определяемой по формуле

$$\varphi(d) = \sharp\{h < d | (h, d) = 1\}.$$

Упражнение 2.1.18. Докажите, что любая подгруппа H циклической группы G также является циклической. *Указание.* Зафиксируйте образующую g в группе G. Если H нетривиальна, выберите в ней элемент g^l, являющийся наименьшей степенью образующей g в группе $G = \langle g \rangle$. Докажите, что выбранный элемент является образующей в подгруппе H.

2.1.7 Пространство гомоморфизмов

Пусть V и W – два конечномерных векторных пространства над одним и тем же полем k. Обозначим символом $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ множество всех гомоморфизмов вида $f : V \to W$.

Предложение 2.1.19. *(Пространство гомоморфизмов) Множество* $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ *несет структуру векторного пространства над полем* k.

Доказательство. Операция *поточечного сложения гомоморфизмов* индуцирована операцией сложения в пространстве W и определяется для любых гомоморфизмов $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ по формуле $f_1+f_2 : V \to W$, $v \mapsto f_1(v)+f_2(v)$. Поточечное сложение снабжает множество $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ структурой абелевой группы.

Действие скаляров на $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ индуцировано действием скаляров на W и определяется для любого $\mu \in k$ и для любого $f \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ по формуле $\mu f : V \to W$, $v \mapsto \mu f(v)$. $\square$

Положив $W = k$, получим *пространство, двойственное к* V: $V^\vee := \mathrm{Hom}_k(V,k)$. Оно будет подробно изучаться в главе 4.

2.1.8 Композиция гомоморфизмов. Коммутативные диаграммы

Как и для любых отображений, под композицией гомоморфизмов векторных пространств понимают их последовательное выполнение. Пусть $f : U \to V$ и $g : V \to W$ – два гомоморфизма векторных пространств. Нетрудно проверить, что их композиция $g \circ f$ – тоже гомоморфизм. Формирование композиции может быть наглядно изображено диаграммой

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & W \end{tikzcd}$$

Композиция трех и более гомоморфизмов ассоциативна:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

поэтому в выражениях для композиции нескольких гомоморфизмов скобки не расставляют, а диаграммы, изображающие такие композиции, не разбивают на треугольники:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] & V \arrow[d, "h"] \\ T \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[r, "h\circ(g\circ f)"'] & W \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & V \arrow[d, "h"] \\ T \arrow[u, "f"] \arrow[r, "(h\circ g)\circ f"'] & W \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] & V \arrow[d, "h"] \\ T \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h\circ g\circ f"'] & W \end{tikzcd}$$

Диаграмма векторных пространств – это ориентированный граф, вершины которого изображают векторные пространства, а ребра – гомоморфизмы векторных пространств. Аналогично определяются диаграммы групп, алгебр, R-модулей и других алгебраических структур. Любая композиция гомоморфизмов изображается путем в таком графе. Два пути с общим началом и общим концом естественно считать *эквивалентными*, если соответствующие композиции гомоморфизмов равны. Если в данной диаграмме любые два пути с общим началом и общим концом эквивалентны, то такая диаграмма называется *коммутативной*.

2.2 Матричные представления отображений. Построение отображений с помощью базисов и фильтраций

2.2.1 Матрица линейного отображения в паре базисов

Рассмотрим линейное отображение $f : V \to V'$. Пусть в пространстве V выбран базис $e_1, \dots, e_n$, а в пространстве V' – базис $e'_1, \dots, e'_m$. Тогда рассмотрим образы $f(e_i)$ базисных векторов пространства V и выпишем их координатное представление в базисе пространства V'

$$\begin{gathered} f(e_1) = e'_1 f_{11} + \dots + e'_m f_{m1}, \\ f(e_2) = e'_1 f_{12} + \dots + e'_m f_{m2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = e'_1 f_{1n} + \dots + e'_m f_{mn}. \end{gathered}$$

Тогда с помощью этих данных можно вычислить координаты образа любого вектора $x \in V$ по его координатам в базисе $e_1, \dots, e_n$.

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} e_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e'_j f_{ji} x_i.$$

Введя обозначение $y := f(x)$ для образа вектора x и y_j для его координат в базисе $e'_1, \dots, e'_m$, получим $y_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ji} x_i$.

Матрица отображения $f : V \to V'$ в паре фиксированных базисов $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_m$ имеет вид

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ее столбцы составлены координатами образов базисных векторов пространства V в базисе пространства V'. Если записывать координаты векторов в столбцы, то вычисление координат образа вектора по его координатам примет матричный вид

$$Y = FX,$$

где X – столбец координат вектора $x \in V$, Y – столбец координат его образа $y = f(x)$.

Таким образом, фиксация базисов в пространствах V и V' ставит в соответствие гомоморфизму (абстрактных) векторных пространств $f : V \to V'$ гомоморфизм координатных пространств над тем же полем определения, задаваемый матрицей F, согласно коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(e_1,\dots,e_n)"', "\wr"] & V' \arrow[d, "(e'_1,\dots,e'_m)", "\wr"'] \\ k^n \arrow[r, "F"] & k^m \end{tikzcd}$$

2.2.2 Базис и размерность пространства гомоморфизмов

Таким образом выбор базисов в пространствах V и W размерностей n и m соответственно приводит к отображению

$$\beta : \mathrm{Hom}_k(V, W) \to \mathrm{Mat}_k(n, m)$$

множества гомоморфизмов из пространства V пространство W на множество всех матриц размеров (n, m) над тем же полем.

Упражнение 2.2.1. Докажите, что β – изоморфизм векторных пространств.

Поскольку $\dim \mathrm{Mat}_k(n, m) = nm$ и пространство $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ изоморфно пространству $\mathrm{Mat}_k(n, m)$, то $\dim \mathrm{Hom}_k(V, W) = nm$.

Поскольку всякий изоморфизм векторных пространств переводит базис в базис, то базис пространства $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ можно построить, используя базис пространства матриц $\mathrm{Mat}_k(n, m)$. В качестве последнего удобно выбрать стандартный базис, состоящий из *элементарных матриц*

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.2.1)$$

где матрица с номерами i, j содержит единственную единицу на пересечении i-й строки и j-го столбца. Всего таких матриц mn.

Интерпретируя элементарные матрицы как матрицы линейных отображений $e_{ij} : V \to W$ в некоторой фиксированной паре базисов $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_m$, получим следующее описание гомоморфизмов e_{ij}:

$$e_{ij} : V \to W,\ e_r \mapsto \delta_{ri} e'_j,\ i, r = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

2.2.3 Смена базисов векторного пространства как его автоморфизм

Пусть в векторном пространстве V имеются два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$, и пусть $A = (a_{ij})$ – матрица перехода от первого базиса ко второму, т. е. $e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ij}$. Тогда определен изоморфизм пространства V на себя (такие изоморфизмы называют *автоморфизмами*) $\mathcal{A}^{-1} : V \xrightarrow{\sim} V$, заданный биекцией на базисах $e_i \mapsto \mathcal{A} e_i = e'_i$ или, эквивалентно, в координатах имеем автоморфизм координатных пространств

$$A^{-1} :\ k^n \to k^n :\ X \mapsto A^{-1} X.$$

При этом в базисе $e_1, \ldots, e_n$ автоморфизм $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Интерпретируя всякий базис векторного пространства V как его изоморфизм на координатное пространство k^n, получаем коммутативную диаграмму изоморфизмов

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{-1}"'] & k^n \arrow[d, "A^{-1}"] \\ V \arrow[r, "\varepsilon'"] & k^n \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

где ε – изоморфизм, индуцированный базисом $e_1, \ldots, e_n$, ε' – изоморфизм, индуцированный базисом $e'_1, \ldots, e'_n$.

Строго говоря, все координатные и матричные представления относятся к координатному пространству (координатным пространствам), изоморфным векторным пространствам рассматриваемой задачи ("Мы не умеем *вычислять* в абстрактных векторных пространствах, а только лишь в k^n"). Поэтому там, где рассматриваются матрицы отображений, мы будем работать с соответствующими отображениями координатных пространств, обозначая их отображения теми же символами, что и матрицы отображений.

2.2.4 Преобразование матрицы линейного отображения при смене базисов

Пусть $f : V \to W$ – гомоморфизм векторных пространств, имеющий в базисе $e_1, \ldots e_n$ пространства V и базисе $g_1, \ldots, g_m$ пространства W матрицу F. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ – другой базис пространства V, и A –

матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$. Также пусть $g'_1, \dots, g'_m$ – другой базис пространства W и B – матрица перехода от базиса $g_1, \dots, g_m$ к базису $g'_1, \dots, g'_m$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму (аналогичную (2.2.2)):

$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "A^{-1}"'] & k^m \arrow[d, "B^{-1}"] \\ k^n \arrow[r, "F'"] & k^m \end{tikzcd}$$

Отсюда получаем правило преобразования матрицы линейного отображения при смене базисов: $F' = B^{-1}FA$.

2.3 Ядро, образ и теорема о гомоморфизме

2.3.1 Ядро, образ и их вычисление

Определение 2.3.1. *Ядром* гомоморфизма $f : V \to V'$ называется полный прообраз нулевого вектора, т. е. подмножество

$$\ker f = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V.$$

Определение 2.3.2. *Образом* гомоморфизма $f : V \to V'$ называется множество образов всех векторов пространства V, т. е.

$$\operatorname{im} f = \{y \in V' | y = f(x) \text{ для некоторого } x \in V\} \subset V'.$$

Пусть в пространстве V выбран базис $e_1, \dots, e_n$, а в пространстве V' – базис $e'_1, \dots, e'_m$, и матрица отображения $f : V \to V'$ в паре фиксированных базисов имеет вид

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда ядро отображения f дается пространством решений системы однородных линейных уравнений, левая часть которой имеет матрицу F, а базис подпространства $\ker f$ – любой фундаментальной системой решений этой системы.

Образ линейного отображения, заданного в паре базисов, тоже нетрудно вычислить. Он равен линейной оболочке образов базисных векторов пространства V, т. е. $\operatorname{im} f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$. При этом может случиться, что векторы $f(e_1), \dots, f(e_n)$ окажутся линейно зависимыми. Однако, если необходимо знать базис подпространства $\operatorname{im} f$, его можно найти как любую максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

2.3.2 Инъективность линейного отображения. Ранг и дефект

Пусть $f : V \to W$ – гомоморфизм k-векторных пространств. Рассматривая его просто как отображение множеств, можно сказать, что f инъективен, если он отображает любые два различных вектора пространства V в два различных вектора пространства W, т. е. для любых $v_1 \neq v_2$ выполнено $f(v_1) \neq f(v_2)$.

Используя гомоморфность отображения f, получим, что $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) \neq 0$ всякий раз, когда $v_1 - v_2 \neq 0$. Обозначив за v разность $v_1 - v_2$, имеем модификацию данного определения для инъективности гомоморфизма векторных пространств.

Определение 2.3.3. Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств *инъективен*, если он обладает тривиальным ядром, т. е. $\ker f = 0$.

Данное определение согласовано с определением инъективности для отображений множеств. Действительно, гомоморфизм векторных пространств инъективен как отображение множеств тогда и только тогда, когда он отображает различные векторы в различные. Это, в частности, равносильно тому, что $\ker f$ состоит только из нулевого вектора.

Определение 2.3.4. *Рангом* линейного отображения f называется размерность его образа; *дефектом* – размерность его ядра.

Из леммы 2.1.6 и этого определения имеем

Следствие 2.3.5. *(Ранговый критерий инъективности линейного отображения) Гомоморфизм $f : V \to W$ векторных пространств инъективен тогда и только тогда, когда его ранг равен* $\dim_k V$.

Предложение 2.3.6. *(Ранг композиции) Пусть $f \circ g : U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ – композиция линейных отображений. Тогда*
i) $\operatorname{rank}(f \circ g) \leq \operatorname{rank} f$,
ii) $\operatorname{rank}(f \circ g) \leq \operatorname{rank} g$.

Доказательство. Во-первых, $\operatorname{im}(f \circ g) \subset \operatorname{im} f$, откуда получаем i). Также $\operatorname{im} f \circ g = f(\operatorname{im} g)$ и $\dim f(\operatorname{im} g) \leq \dim \operatorname{im} g$, что доказывает ii). □

2.3.3 Факторпространство

Пусть V – k-векторное пространство, U – его подпространство. Поскольку U также является подгруппой абелевой группы V, то сформируем факторгруппу V/U. Понятно, что два вектора v_1 и v_2 из группы V принадлежат одному смежному классу относительно подгруппы U, если их разность принадлежит U, т. е. $v_1 - v_2 \in U$. Умножая оба вектора на произвольный скаляр $x \in k$, получим $xv_1 - xv_2 = x(v_1 - v_2)$. Поскольку U – подпространство, то это подгруппа, стабильная относительно действия скаляров, и если $v_1 - v_2 \in U$, то $x(v_1 - v_2) \in U$. Отсюда, в частности, следует, что определено действие скаляров $\overline{\alpha} : k \times (V/U) \to V/U$ на факторгруппе V/U.

Упражнение 2.3.7. Проверьте выполнение аксиом 1–4 в определении действия поля на абелевой группе (определение 1.1.1) для действия $\overline{\alpha}$ на факторгруппе V/U.

Тем самым V/U – k-векторное пространство, называемое *факторпространством* пространства V по подпространству U.

2.3.4 Факторпространство и "усечение" фильтрации

Пусть в пространстве V выбрана фильтрация подпространствами

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_i \subset U_{i+1} \subset \cdots \subset V. \qquad (2.3.1)$$

Рассмотрим факторпространство V/U_i и линейное отображение (гомоморфизм) $\phi_i : V \to V/U_i$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ его смежный класс $x + U_i$. Понятно, что поскольку при $j < i$ $U_j \subset U_i$, то $\phi_i(U_j) = 0$. Сформируем образы $\phi_i(U_j) = U_j/U_i$ остальных подпространств фильтрации, соответствующих номерам $j > i$. Они образуют фильтрацию факторпространства V/U_i :

$$0 \subset U_{i+1}/U_i \subset \cdots \subset V/U_i.$$

Упражнение 2.3.8. Пусть (2.3.1) – максимальная фильтрация пространства V. Докажите, что формирование факторпространств приводит к максимальной фильтрации факторпространства V/U_i. Как связаны длины фильтраций пространства V, подпространства U_i и факторпространства V/U_i?

2.3.5 Факторизация гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме

Пусть $f : V \to V'$ – гомоморфизм векторных пространств, тогда он может быть разложен в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & & V' \\ & \operatorname{im} f \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Поскольку $\ker(f) = f^{-1}(0)$ и $0 \in \operatorname{im} f \subset V'$, то $\ker f = \ker \overline{f}$.

Аналогичная факторизация гомоморфизмов имеет место в теории (в т. ч. неабелевых) групп, колец, алгебр, модулей над кольцами.

Теорема 2.3.9. *(Теорема о гомоморфизме для векторных пространств) Если $f : V \to V'$ – гомоморфизм векторных пространств, то имеет место изоморфизм* $\operatorname{im} f \cong V/\ker f$

Доказательство. Поскольку гомоморфизм векторных пространств является гомоморфизмом абелевых групп, то к нему применима теорема о гомоморфизме для групп и определен изоморфизм абелевых групп $\operatorname{im} f \cong V/\ker f$. Изоморфное отображение $\operatorname{im} f \to V/\ker f$ совместимо с действием скаляров в том смысле, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} k \times \operatorname{im} f \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{im} f \arrow[d, "\wr"] \\ k \times (V/\ker f) \arrow[r] & V/\ker f \end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные стрелки – отображения действий скаляров, задающие структуры векторных пространств на $\operatorname{im} f$ и на $V/\ker f$ соответственно. Поэтому изоморфизм абелевых групп $\operatorname{im} f \cong V/\ker f$ также является изоморфизмом векторных пространств. □

Пусть теперь подпространство U выбрано произвольно, независимо от выбора фильтрации $0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_i \subset \cdots \subset V$. При этом возможно, что подпространство U не совпадет ни с каким из членов выбранной фильтрации. Рассмотрим гомоморфизм на факторпространство $\phi : V \to V/U$ и его ограничения $\phi|_{U_i}$ на подпространства фильтрации. Понятно, что образы подпространств фильтрации $\phi(U_i) = \operatorname{im} \phi|_{U_i}$ по теореме о гомоморфизме могут быть вычислены как $\phi(U_i) = U_i/(U_i \cap U)$. При этом цепочка

$$0 \subset U_1/(U_1 \cap U) \subset \cdots \subset U_i/(U_i \cap U) \subset \ldots V/U$$

содержит несобственные включения. Вычеркивая их, получаем фильтрацию факторпространства V/U.

Замечание 2.3.10. Несложно доказать, что если подпространства U_i образуют максимальную фильтрацию пространства V, то цепочка факторпространств $U_i/(U_i \cap U)$ после вычеркивания несобственных включений поставляет максимальную фильтрацию факторпространства V/U.

2.3.6 Основная точная последовательность

Ситуация, описанная в теореме о гомоморфизме, может быть отражена в следующей условной записи

$$0 \to \ker f \to V \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{im} f \to 0,$$

которую мы будем называть *основной (короткой) точной последовательностью.*

Определение 2.3.11. Последовательность векторных пространств и их гомоморфизмов

$$\cdots \to V_{i-1} \to V_i \to V_{i+1} \to \dots \tag{2.3.2}$$

называется *точной в члене с номером i*, если[1]

$$\ker (V_i \to V_{i+1}) = \operatorname{im} (V_{i-1} \to V_i). \tag{2.3.3}$$

Если последовательность точна во всех членах, то ее называют просто *точной.*

Точную последовательность вида

$$0 \to U \to V \to W \to 0 \tag{2.3.4}$$

иногда называют *короткой точной последовательностью*, или *точной тройкой.* Если говорят, что последовательность (2.3.4) точна, то это означает следующее:

- гомоморфизм $U \to V$ инъективен; нуль слева означает, что этот гомоморфизм имеет ядро, совпадающее с нулевым подпространством в U;
- образ $\operatorname{im} (U \to V)$ изоморфен W и (по теореме о гомоморфизме) изоморфен факторпространству V/U.

Равносильно, точность трехчленной последовательности (2.3.4) означает также следующее:

- гомоморфизм $V \to W$ сюръективен; нуль справа означает, что факторпространство $W/\operatorname{im} (V \to W)$ изоморфно нулевому пространству;

[1] Мнемоническое правило: "ядро последующего равно образу предыдущего".

- ядро $\ker(V \to W)$ изоморфно U, и (опять же по теореме о гомоморфизме) $W \cong V/U$.

Упражнение 2.3.12. Читателю рекомендуется проверить, что две указанные интерпретации точности действительно равносильны.

Терминологическое соглашение: в точной тройке (2.3.4) член U называют *ядром*, W – *коядром*, а средний член V – *расширением.*

Устройство (длинной) точной последовательности легче понять, применив к ней *разрезание на точные тройки.* Это формальная процедура, отражающая вычисления ядер и образов всех гомоморфизмов данной последовательности. Она сводится в точности к следующему.

Пусть имеется точная последовательность вида (2.3.2). Выполним факторизацию всех гомоморфизмов; приняв во внимание требование точности (2.3.3), получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & V_{i-1} \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\overline{f}_i"'] & & V_i \arrow[rr, "f_{i+1}"] \arrow[dr, "\overline{f}_{i+1}"'] & & V_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots \arrow[ur] & & \operatorname{im} f_i \arrow[ur, "i_i"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} f_{i+1} \arrow[ur, "i_{i+1}"] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & \cdots
\end{tikzcd}$$

в которой точные тройки

$$0 \to \operatorname{im} f_i \xrightarrow{i_i} V_i \xrightarrow{\overline{f}_{i+1}} \operatorname{im} f_{i+1} \to 0.$$

образуют "домики".

В частности, произвольный гомоморфизм $f : V \to V'$ порождает (четырехчленную) точную последовательность

$$0 \to \ker f \to V \xrightarrow{f} V' \to V'/\operatorname{im} f \to 0,$$

которая может быть разрезана на две точные тройки:

$$0 \to \ker f \to V \xrightarrow{\overline{f}} V/\ker f \to 0,$$
$$0 \to V/\ker f \xrightarrow{i} V' \to V'/\operatorname{im} f \to 0.$$

2.3.7 Три леммы о точных диаграммах

Следующие леммы позволяют строить индуцированные гомоморфизмы в стандартных ситуациях. Первые две из них справедливы не только в теории векторных пространств, но и в теории групп (в том числе неабелевых) и в теории колец, алгебр и модулей. Третья лемма справедлива только для векторных пространств.

Лемма 2.3.13. *(Морфизм коядер) Пусть коммутативна диаграмма с точными строками*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Тогда существует гомоморфизм $w : W \to W'$, дополняющий ее до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Доказательство. В силу точной последовательности

$$0 \to U \to V \to W \to 0,$$

можно считать, что пространство U вложено (т. е. является подпространством) в пространство V, а пространство W изоморфно факторпространству V/U. По аналогичной причине пространство U' вложено (является подпространством) в пространство V', а пространство W' изоморфно факторпространству V'/U'. Поэтому достаточно построить гомоморфизм факторпространств $w : V/U \to V'/U'$, включающийся в диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & V/U \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & V'/U' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Гомоморфизм w определим на смежных классах следующим образом: $x + U \mapsto v(x) + U'$. Действительно, $v(x + U) = v(x) + v(U)$. По коммутативности левого квадрата имеем $v(U) = v|_U(U) = u(U) \subset U'$, поэтому отображение w определено корректно. Проверка его гомоморфности оставляется читателю. □

Лемма 2.3.14. *(Морфизм ядер) Пусть коммутативна диаграмма с точными строками*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Тогда существует гомоморфизм $u : U \to U'$, дополняющий ее до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство $v(U) \subset V'$. Поскольку U имеет нулевой образ в W и $w(0) = 0$, а правый квадрат коммутативен, то $v(U)$ имеет в W' тоже нулевой образ. Это означает, что $v(U) \subset \ker(V' \to W')$, т. е. $v(U) \subset U'$. Поэтому определим гомоморфизм u как ограничение гомоморфизма v на подпространство U, а именно $u := v|_U$. Коммутативность диаграммы (2.3.5) обеспечивается построением. □

Упражнение 2.3.15. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы в теории (не обязательно абелевых) групп.

Лемма 2.3.16. *(Морфизм расширений) Пусть дана диаграмма векторных пространств, строки которой точны:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.3.6}$$

Тогда существует гомоморфизм $v : V \to V'$, дополняющий ее до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, \ldots, u_l$ в пространстве U и базис $w_1, \ldots, w_m$ в пространстве W. Тогда, обозначая символами u_i образы векторов u_i в пространстве V и символами w_j – (единожды выбранные) прообразы векторов w_j в пространстве V, получим базис пространства V: $u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_m$, определяющий изоморфизм $V \cong U \oplus W'$. Здесь $W' = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$ – подпространство в V, изоморфное пространству W. Тогда искомый гомоморфизм $v : V \to V'$ определяется отображением базисных векторов: $u_i \mapsto u(u_i), w_j \mapsto w(w_j)$. □

Замечание 2.3.17. В доказательстве леммы 2.3.16 определяющим моментом является расщепление любого расширения в прямую сумму ядра и коядра, верное для векторных пространств. В случаях абелевых или неабелевых групп, k-алгебр или модулей над кольцом лемма 2.3.16 *аналогов не имеет* (!).

2.3.8 Конструкции с точными диаграммами

1. Прообраз подпространства в расширении.

Пусть $f : V \to V'$ – гомоморфизм, $U' \subset V'$ – подпространство. Пусть $W' = V'/U'$ – факторпространство; обозначим за ε гомоморфизм его формирования $\varepsilon : V' \to W'$ и рассмотрим соответствующую короткую точную последовательность

$$0 \to U' \to V' \to W' \to 0.$$

Обозначим за W образ композиции $\varepsilon \circ f$; понятно, что $\varepsilon \circ f(V) = W$ – подпространство в W'. Пусть, как обычно, $\overline{\varepsilon \circ f} : V \to W$ – сюръективный гомоморфизм, полученный при факторизации гомоморфизма $\varepsilon \circ f$. Тогда положим по определению $U := \ker \overline{\varepsilon \circ f}$ и получим диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r, "\overline{\varepsilon\circ f}"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r, "\varepsilon"] & W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Применение леммы 2.3.14 поставляет морфизм $U \to U'$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r, "\overline{\varepsilon\circ f}"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r, "\varepsilon"] & W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.3.7}$$

коммутативной.

Упражнение 2.3.18. Из коммутативности диаграммы (2.3.7) следует, что $U = f^{-1}(U')$. Проверьте, что это действительно так.

Замечание 2.3.19. Применение аналогичной конструкции в теории неабелевых групп сразу же поставляет нормальность прообраза нормальной подгруппы.

2. Прообраз подпространства в коядре.

Пусть $f : V \to W$ – сюръективный гомоморфизм векторных пространств, K – его ядро, L – подпространство в W. Тогда существует подпространство $H \subset V$ такое, что $H/K = L$. Действительно, достаточно положить по определению $H := f^{-1}(L)$

Упражнение 2.3.20. * Проверьте, что аналогичное утверждение верно в теории групп.

2.3.9 Подъем фильтрации. Аддитивность размерности

Рассмотрим сюръективный гомоморфизм векторных пространств $f : V \twoheadrightarrow W$ и какую-нибудь максимальную фильтрацию в факторпространстве W:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_m = W.$$

Образуем прообразы пространств фильтрации W_i, $i = \overline{0, m}$. Понятно, что $f^{-1}W_0 = f^{-1}(0) = \ker f = K$ по определению ядра линейного отображения и $f^{-1}(W) = V$ по сюръективности отображения f. Формирование прообразов сохраняет включение; поэтому получаем цепь не совпадающих друг с другом подпространств

$$\ker f \subset f^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset f^{-1}(W) = V.$$

Обозначим за L_i факторпространства $L_i := W_i/W_{i-1}$. Поскольку фильтрацию $W_\bullet$ невозможно уплотнить, то эти факторпространства имеют размерность 1. Формирование прообразов, согласно конструкции предыдущего пункта, включается в точные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}(W_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & W_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & f^{-1}(W_i) \arrow[r] \arrow[d] & W_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L_i \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_i \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

что показывает, что цепь прообразов $f^{-1}(W_\bullet)$ тоже невозможно уплотнить. Теперь выберем любую максимальную фильтрацию ядра

$$0 = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_k = \ker f.$$

Объединяя ее с полученной цепью, получим фильтрацию длины $k + m$ для пространства V

$$0 = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_k = \ker f \subset f^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset f^{-1}(W) = V.$$

По построению она максимальна, и $\dim V = k + m = \dim K + \dim W$. Таким образом мы пришли к следующему результату.

Теорема 2.3.21. *(Аддитивность размерности) В точной последовательности векторных пространств* $0 \to K \to V \to W \to 0$ *если ядро* K *и коядро* W *конечномерны, то и расширение* V *конечномерно и размерности подчиняются соотношению* $\dim V = \dim K + \dim W$.

Следствие 2.3.22. *(Теорема о размерности ядра и образа) Пусть* $f : V \to V'$ *– (не обязательно сюрьективный) гомоморфизм векторных пространств. Тогда* $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

Доказательство. Применим теорему о гомоморфизме и рассмотрим точную последовательность $0 \to \ker f \to V \to \operatorname{im} f \to 0$. Подсчет размерностей приводит к требуемому соотношению. □

Следствие 2.3.23. *(Критерий инъективности линейного отображения) Гомоморфизм векторных пространств* $f : V \to V'$ *инъективен тогда и только тогда, когда он изоморфен на свой образ, т. е.* $f : V \to \operatorname{im} f$ *– изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\ker f = 0$, тогда

$$\dim \operatorname{im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V.$$

Тем самым отображение f осуществляет изоморфизм пространства V на $\operatorname{im} V$. Приведенная цепочка импликаций обратима. □

Упражнение 2.3.24. Рассмотрите точную последовательность конечномерных векторных пространств

$$0 \to V_1 \to \cdots \to V_s \to 0,$$

имеющую произвольную конечную длину. Используя разрезание на точные тройки, докажите общую формулу

$$\sum_{i=1}^{s} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Свойство размерности, выражаемое этой формулой, называют *аддитивностью.*

2.3.10 Мультипликативная функция: порядок конечной группы*

Напомним простое

Определение 2.3.25. *Порядком* конечной *группы* G называется число ее элементов. *Порядком элемента* g в группе G называется порядок подгруппы $\langle g\rangle$, порожденной этим элементом.

Порядок конечной группы G будем обозначать символом $|G|$.

Упражнение 2.3.26. Найдите порядок группы D_3 симметрий правильного треугольника и вычислите порядки всех ее элементов.

Теорема 2.3.27. *(Теорема Лагранжа) Если $H \subset G$ – подгруппа, то порядок подгруппы H делит порядок группы G, причем отношение $|G|/|H|$ равно числу смежных классов относительно подгруппы H.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества элементов группы G на левые смежные классы по подгруппе H. Выбрав любой класс gH и класс нейтрального элемента $eH = H$, заметим, что умножение слева на элемент g задает отображение множеств $eH \to gH$, которое является биекцией. Таким образом, смежные классы равномощны подгруппе H, откуда и следует утверждение теоремы. □

Замечание 2.3.28. Доказательство останется в силе, если заменить левые смежные классы правыми смежными классами. При этом умножение на элемент g слева необходимо заменить умножением на тот же элемент справа. Отсюда сразу же следует, что число левых смежных классов относительно подгруппы H равно числу правых смежных классов относительно той же подгруппы.

Определение 2.3.29. Число $|G|/|H|$ называется *индексом подгруппы* H в группе G и обозначается символом $[G : H]$.

Упражнение 2.3.30. Докажите, что всякая группа G простого порядка является *циклической*, т. е. имеет вид $\langle g\rangle$ для подходящего $g \in G$.

В произвольной конечной группе G пусть H – нормальная подгруппа, тогда определена факторгруппа G/H, и ее порядок равен $|G/H| = [G : H]$. Таким образом, в любой конечной точной последовательности конечных групп

$$e \to G_1 \to \dots \to G_s \to e$$

выполнено соотношение

$$\prod_{i=1}^{s} |G_i|^{(-1)^i} = 1.$$

Для получения одного из следствий теоремы Лагранжа рассмотрим действие $\alpha : G \times X \to X$ конечной группы G на множестве X, элементы которого будем называть *точками*.

Определение 2.3.31. *Стабилизатором* точки $x \in X$ называется подгруппа

$$\mathrm{Stab}\,(x) = \{g \in G | \alpha(g, x) = x\}.$$

Орбитой точки x называется множество точек

$$\mathrm{Orb}\,(x) = \{y \in X | y = \alpha(g, x) \text{ для некоторого } g \in G\}.$$

Следствие 2.3.32. *(Теорема о длине орбиты) Порядок группы G, действующей на множестве X, равен произведению порядка стабилизатора любой его точки на мощность ее орбиты:*

$$|G| = |\mathrm{Stab}\,(x)| \cdot |\mathrm{Orb}\,(x)|.$$

Доказательство. Действительно, действие α и выбор точки $x \in X$ индуцируют разбиение множества элементов группы G на левые смежные классы вида $g\mathrm{Stab}\,(x)$, которые биективны точкам орбиты $\mathrm{Orb}\,(x)$. Теперь остается применить теорему Лагранжа. □

2.4 Прямые суммы и расщепление

2.4.1 Прямое дополнение

Пусть V – k-векторное пространство, U – некоторое его подпространство.

Определение 2.4.1. *Прямым дополнением* подпространства U в пространстве V называется любое подпространство $W \subset V$, обладающее свойством $V = U \oplus W$.

Прямое дополнение к подпространству U можно построить следующим образом. Сначала выбирают любой базис подпространства U

$$e_1, \ldots, e_s,$$

а затем дополняют его произвольным образом до базиса всего пространства V. Пусть $e_{s+1}, \ldots, e_n$ – векторы, добавленные при дополнении. Остается положить $W = \langle e_{s+1}, \ldots, e_n \rangle$.

Теперь покажем, что подпространство W определено неоднозначно, т. е. можно построить *другое* подпространство W', которое также будет прямым дополнением к подпространству U. Для этого достаточно, например, заменить вектор e_{s+1} вектором $e'_{s+1} = e_{s+1} + e_1$ и положить $W' = \langle e'_{s+1}, e_{s+2}, \ldots, e_n \rangle$. Тогда $e'_{s+1} \in W'$, но $e'_{s+1} \notin W$. Подпространства W и W' различны.

Рассмотрим диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V/U \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & U \oplus W \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальные изоморфизмы определяются только что описанным выбором базисов. Тогда применение леммы 2.3.13 сначала к этой диаграмме, а затем к диаграмме, в которой вертикальные изоморфизмы заменены обратными отображениями, приводит к существованию изоморфизма $V/U \xrightarrow{\sim} W$, включающегося в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V/U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & U \oplus W \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Такое поведение точной последовательности векторных пространств называют *расщеплением*. Мы доказали следующий результат.

Предложение 2.4.2. *(Описание прямых дополнений) Все подпространства в векторном пространстве V, являющиеся прямыми дополнениями подпространства $U \subset V$, изоморфны факторпространству V/U.*

2.4.2 Прямые суммы в точных последовательностях*

Только что доказанное предложение приводит к следующему наблюдению. Выбор в векторном пространстве V подпространства U индуцирует (неоднозначно определенное!) разложение в прямую сумму $U \oplus W \cong U \oplus V/U$, причем изоморфизм сохраняет прямые слагаемые. Это означает, что любая точная тройка векторных пространств

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

допускает обращение стрелок, то есть существует тройка

$$0 \to W \to V \to U \to 0,$$

которая также точна. Такое явление не наблюдается ни в теории групп, ни в теории модулей над коммутативными кольцами. В качестве примера рассмотрим абелеву группу целых чисел $\mathbb{Z}$ и любую ее собственную нетривиальную подгруппу $m\mathbb{Z}$. Тогда мы располагаем точной тройкой абелевых групп $0 \to m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$, где $\mathbb{Z}_m$ – группа классов вычетов по модулю m. Тогда понятно, что поскольку все ненулевые элементы группы $\mathbb{Z}$ имеют бесконечный порядок, а все элементы группы $\mathbb{Z}_m$ обладают конечными порядками, то инъективных гомоморфизмов группы $\mathbb{Z}_m$ в группу $\mathbb{Z}$ не существует. Точная тройка абелевых групп (и $\mathbb{Z}$-модулей) чаще всего *не допускает обращения стрелок.* Таким образом, имеются две *различные* точные тройки с одинаковыми ядрами и с одинаковыми коядрами:

$$0 \to m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0,$$
$$0 \to m\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m \to 0.$$

Как мы видели, в теории векторных пространств если пространства U и W фиксированы, то расширение V определено однозначно с точностью до изоморфизма. В теориях групп и модулей над коммутативными кольцами задача о расширении гораздо сложнее и является предметом отдельного изучения.

2.5 Построение гомо-, изоморфизмов с помощью диаграмм

2.5.1 Лемма о змее и полезные изоморфизмы

Пусть $f : V \to V'$ – гомоморфизм (абелевых групп, векторных пространств и т. п.) Пусть определен факторобъект $V'/\mathrm{im}\, V$. Тогда назовем его *коядром* гомоморфизма f и будем обозначать символом $\mathrm{coker}\, f$.

Замечание 2.5.1. Понятно, что любой гомоморфизм абелевых групп или векторных пространств имеет коядро. То же самое справедливо в отношении гомоморфизма модулей над коммутативным ассоциативным кольцом. Однако в теории неабелевых групп дело обстоит сложнее, поскольку образ $\mathrm{im}\, f$ может *не быть нормальной подгруппой* в V' и факторгруппа не будет определена. Таким образом, существуют гомоморфизмы неабелевых групп, не имеющие коядер.

Теорема 2.5.2. *(Push-out) Дана диаграмма с точными строками*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K/S \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & G \arrow[r] & G/S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальный гомоморфизм имеет коядро. Тогда она *дополняется до точной диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K/S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G/K \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (G/S)/(K/S) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Построим факторизацию гомоморфизма $\phi : K \to G/S$, заданного как композиция $\phi : K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/S$. Понятно, что $\ker \phi = S$ и по теореме о гомоморфизме, примененной к ϕ, получаем $\operatorname{im} \phi \cong K/S \subset G/S$. Таким образом, имеем коммутативную диаграмму с точными строками, правая вертикальная стрелка которой – вложение:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K/S \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & G \arrow[r] & G/S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

Рассмотрим гомоморфизм $\gamma : G/S \to G/K$, определяемый по правилу $gS \mapsto gK$. Поскольку $S \subset K$, то гомоморфизм определен корректно. Его ядро $\ker \gamma$ состоит из тех классов в G/S, которые имеют представители в K, т. е. $\ker \gamma = K/S$. Отсюда замечаем, что при работе с неабелевыми группами мы сразу же получаем нормальность подгруппы K/S в группе G/S. Тем самым определен объект (например, факторгруппа) $(G/S)/(K/S)$.

Теперь осталось рассмотреть факторизацию гомоморфизма

$$\psi : G \to (G/S)/(K/S),$$

определенного как композиция $G \to G/S \to (G/S)/(K/S)$. Понятно, что это сюръективный гомоморфизм с ядром $\ker \psi = K$. Теорема о гомоморфизме, примененная к ψ, поставляет изоморфизм

$$(G/S)/(K/S) = \operatorname{im} \psi \cong G/K.$$

□

В теории абелевых групп (а также в теориях векторных пространств,

k-алгебр и модулей над коммутативным ассоциативным кольцом) справедлива более общая теорема.

Теорема 2.5.3. *(Лемма о змее) Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to \ker u \to \ker v \to \ker w \to \operatorname{coker} u \to \operatorname{coker} v \to \operatorname{coker} w \to 0.$$

Доказательство ее мы здесь приводить не будем.

2.5.2 Теоремы об изоморфизмах для групп, векторных пространств, модулей*

Мы сформулируем и докажем обе теоремы для (неабелевых) групп, поскольку этот случай несколько сложнее остальных. Остальные случаи с необходимыми указаниями представлены в упражнениях. В теории групп обозначение $H \lhd G$ используется вместо $H \subset G$, если H – нормальная подгруппа в G. Также если K и H – две (не обязательно нормальные) подгруппы в группе G, то положим $KH := \{kh | k \in K, h \in N\}$.

Предостережение. В общем случае подмножество KH *не является подгруппой*, поскольку оно не замкнуто относительно групповой операции. Однако если одна из подгрупп (например, H) нормальна, то подмножество KH замкнуто относительно групповой операции и формирования обратного элемента и, следовательно, является подгруппой (проверьте непосредственным вычислением!).

Теорема 2.5.4. *(Первая теорема об изоморфизме) Пусть G– группа, $K \subset G$ – подгруппа, $N \lhd G$ – нормальная подгруппа. Тогда имеет место изоморфизм $K/(N \cap K) \cong KN/N$.*

Доказательство. Сначала проверим два утверждения: что $N \cap K \lhd K$ и что $N \lhd NK$. Поскольку $N \lhd G$, то для любого $g \in G$ левый смежный класс совпадает с правым смежным классом, то есть $gN = Ng$. Выбирая элемент g из подгруппы NK, получим второе утверждение. Для проверки первого утверждения перепишем требование нормальности $gN = Ng$ в поэлементной форме:

$$\forall g \in G \;\; \forall n \in N \;\; \exists n' \in N \mid gn = n'g.$$

Выберем элементы $g \in K$, $n \in N \cap K$. Тогда найдется $n' \in N$ такой, что $gn = n'g$. Умножая обе части равенства справа на g^{-1}, получим $n' = gng^{-1}$, откуда видим, что $n' \in N \cap K$.

Гомоморфизм $\overline{\varphi} : K/(N \cap K) \to NK/N$ получается как гомоморфизм, дополняющий до коммутативной диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \cap K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \arrow[r] \arrow[d, hook] & K/(N \cap K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\cdot e"] & NK \arrow[r] & NK/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Убедимся в том, что он биективен. Для этого рассмотрим факторизацию гомоморфизма $\varphi : K \to NK/N$, заданного с помощью композиции $\varphi : K \to NK \to NK/N$. Ядро $\ker \varphi$ состоит из тех элементов подгруппы K, которые принадлежат подгруппе N. Иными словами, $\ker \varphi = N \cap K$. Применив к φ теорему о гомоморфизме, получаем, что $NK/N \supset \operatorname{im} \varphi = K/(N \cap K)$, т. е. $\overline{\varphi}$ – вложение подгруппы. Выбрав произвольный класс $gN \in NK/N$ и любое разложение любого его представителя $g = nk$, $n \in N$, $k \in K$, получаем представление $nk = kn'$. При гомоморфизме на факторгруппу $K \to K/(N \cap K)$ имеем $k(N \cap K) \in \overline{\varphi}^{-1}(nkN)$, что доказывает сюръективность $\overline{\varphi}$. $\square$

Замечание 2.5.5. Поскольку в абелевой группе всякая подгруппа нормальна, то эта теорема верна и для абелевых групп. Однако в случае абелевых групп требование нормальности является излишним. Также если для бинарной операции в абелевой группе используется аддитивная запись, то утверждение теоремы принимает вид $K/(N \cap K) \cong (K+N)/N$.

Упражнение 2.5.6. Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для векторных пространств. Поскольку структура векторного пространства включает структуру абелевой группы, то достаточно проверить совместимость всех рассуждений доказательства с действием поля скаляров.

Упражнение 2.5.7. Сформулируйте и докажите аналог теоремы для модулей над коммутативным ассоциативным кольцом R (осталось проверить совместимость с действием кольца скаляров R).

Теорема 2.5.8. *(Вторая теорема об изоморфизме) Пусть G – группа, K и S – подгруппы в ней, причем $S \lhd G \rhd H$ и $S \subset K$. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\frac{G/S}{K/S} \cong G/K.$$

Доказательство. Это теоретико-групповая версия теоремы 2.5.2. □

Упражнение 2.5.9. Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для векторных пространств. Поскольку структура векторного пространства включает структуру абелевой группы, то достаточно проверить совместимость всех рассуждений доказательства с действием поля скаляров.

Упражнение 2.5.10. Сформулируйте и докажите аналог теоремы для модулей над коммутативным ассоциативным кольцом R (осталось проверить совместимость с действием кольца скаляров R).

2.5.3 Ограничение, спуск и подъем нормального ряда. Разрешимые группы в точных последовательностях*

Теорема 2.5.11. *(Разрешимость подгруппы) Подгруппа разрешимой группы разрешима.*

Доказательство. Пусть $K \subset G$ – подгруппа. Поскольку G разрешима, в ней существует конечный нормальный ряд, факторгруппы которого абелевы: $e \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G$. *Ограничением нормального ряда* $G_i, i = \overline{0, n}$ *на подгруппу* K называется цепь

$$e \subseteq G_1 \cap K \subseteq G_2 \cap K \subseteq \cdots \subseteq G_n \cap K = K.$$

При этом некоторые включения могут быть тривиальными (иными словами, некоторые подгруппы в этой цепи могут совпадать), а нормальность каждого из включений подлежит проверке.

Выберем произвольный элемент $g \in G_{i+1} \cap K$ и произвольный элемент $h \in G_i \cap K$. Поскольку $G_i \lhd G_{i+1}$, то $h' = ghg^{-1} \in G_i \cap K$, что доказывает нормальность каждого из включений $G_i \cap K \subseteq G_{i+1} \cap K$.

Итак, определены факторгруппы $(G_{i+1} \cap K)/(G_i \cap K)$. Докажем, что они абелевы. Для этого вычислим коммутатор смежных классов $g_1(G_i \cap K) \cdot g_2(G_i \cap K) \cdot g_1^{-1}(G_i \cap K) \cdot g_2^{-1}(G_i \cap K) = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}(G_i \cap K)$. Заметим, что поскольку $G_i \lhd G_{i+1}$, то $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in (G_i \cap K)$, и тем самым $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}(G_i \cap K) = e(G_i \cap K)$, что и завершает доказательство. □

Теорема 2.5.12. *(Разрешимость факторгруппы) Факторгруппа разрешимой группы разрешима.*

Доказательство. Пусть G/K – исследуемая факторгруппа, причем группа G обладает конечным нормальным рядом, факторгруппы которого абелевы: $e \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G$. *Спуском нормального ряда в факторгруппу* G/K называется цепь

$$e \subseteq G_1K/K \subseteq G_2K/K \subseteq \cdots \subseteq GK/K = G/K.$$

Некоторые включения в этой цепи могут быть тривиальными, а нормальность каждого из включений мы сейчас докажем.

Выберем произвольные смежные классы $g_1k_1K \in G_iK/K$, $g_2k_2K \in G_{i+1}K/K$; тогда $g_2k_2K \cdot g_1k_1K \cdot (g_2k_2K)^{-1} = g_2g_1g_2^{-1}k'K$ для подходящего элемента $k' \in K$. В силу того что $G_i \lhd G_{i+1}$, имеем $g_2g_1g_2^{-1}k'K \in G_iK/K$, что завершает доказательство нормальности.

Тем самым определены факторгруппы $(G_{i+1}K/K)/(G_iK/K)$. Покажем, что они абелевы. Рассмотрим коммутатор двух произвольных смежных классов $g_1k_1K \cdot g_2k_2K \cdot (g_1k_1K)^{-1} \cdot (g_2k_2K)^{-1} = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}k''K$ для подходящего элемента $k'' \in K$. Поскольку факторгруппы G_{i+1}/G_i абелевы, то $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in G_i$, откуда $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}k''K \in G_iK/K$, что и требовалось. $\square$

Теорема 2.5.13. *(Разрешимость расширения) Если группа G имеет разрешимую нормальную подгруппу, факторгруппа по которой разрешима, то и группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть $K \lhd G$ – разрешимая группа, $e \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_l = K$ – ее нормальный ряд с абелевыми факторгруппами. Пусть также G/K – разрешимая группа и $e \lhd \overline{G}_1 \lhd \cdots \lhd \overline{G}_m = G/K$ – ее нормальный ряд с абелевыми факторгруппами. Формирование прообразов подгрупп $\overline{G}_i$, $i = \overline{0, m}$, при гомоморфизме на факторгруппу $f : G \to G/K$, приводит к цепи подгрупп

$$K = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_m = G,$$

в которой $G_i = f^{-1}\overline{G}_i$. Эта цепь называется *подъемом нормального ряда с факторгруппы*. Поскольку прообраз нормальной подгруппы нормален, то

$$K \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_m = G.$$

Применив теорему об изоморфизме, заключаем

$$\overline{G}_{i+1}/\overline{G}_i = (G_{i+1}/K)/(G_i/K) \cong G_{i+1}/G_i,$$

и факторгруппы G_{i+1}/G_i абелевы. Тогда искомый нормальный ряд для группы G получается присоединением к подъему нормального ряда факторгруппы G/K нормального ряда ядра K:

$$e \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_l = K \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_m = G.$$

$\square$

Результаты трех доказанных теорем сокращенно формулируют так. *Свойство группы быть разрешимой стабильно относительно формирования подгрупп, факторгрупп и расширений.* Тем самым, располагая классом абелевых групп, можно построить класс разрешимых групп, используя формирование точных последовательностей. В достаточно общем случае перечисление всех расширений с фиксированным ядром и фиксированным коядром – очень сложная задача, далекая от своего полного решения как для неабелевых групп, так и для модулей над достаточно общим кольцом. Однако расширения позволяют изящно решить следующую задачу.

Упражнение 2.5.14. Докажите, что существуют разрешимые группы с как угодно большим числом элементов. (*Указание:* используйте индуктивное построение разрешимых групп в точных последовательностях).

Глава 3

Эндоморфизмы векторных пространств (линейные операторы)

Особую роль в линейной алгебре и ее приложениях играют гомоморфизмы векторного пространства в себя – так называемые эндоморфизмы векторного пространства, или линейные операторы. В этой главе мы изучаем именно этот сорт линейных отображений, используя общие результаты о гомоморфизмах векторных пространств. Также будет исследована одна из канонических форм матрицы линейного оператора – жорданова нормальная форма, имеющая богатые приложения.

3.1 Предварительные сведения

3.1.1 Следствия результатов главы 2

Гомоморфизмы алгебраической системы (например, группы, векторного пространства, кольца и т. п.) в нее же называют *эндоморфизмами* этой алгебраической системы.

Определение 3.1.1. *Эндоморфизмом пространства V,* или *линейным оператором, действующим на пространстве V*, называется любой гомоморфизм этого векторного пространства в себя, т. е. $\mathcal{A} : V \to V$.

Те из эндоморфизмов данной алгебраической системы, которые являются изоморфизмами, называются *автоморфизмами.*

Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ – гомоморфизм векторного пространства V в него же. Оператор $\mathcal{A}$ – автоморфизм тогда и только тогда, когда он инъективен. Поэтому критерии того, чтобы $\mathcal{A}$ был автоморфизмом, поставляются ранее доказанными результатами: леммой 2.1.6, теоремой 2.1.7 и следствием 2.3.5.

На случай эндоморфизмов векторного пространства переносится все, что было сказано о гомоморфизмах векторных пространств. В частности, с любым линейным оператором $\mathcal{A} : V \to V$ связана точная тройка

$$0 \to \ker \mathcal{A} \to V \to \operatorname{im} V \to 0,$$

и справедливо соотношение

$$\dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim V,$$

верное в силу аддитивности размерности. Однако может случиться, что $V \neq \operatorname{im} \mathcal{A} \oplus \ker \mathcal{A}$: изоморфизм векторных пространств имеет место, а равенства (совпадения множеств) нет.

Пример 3.1.2. Пусть $P_n[x]$ – векторное пространство полиномов от переменной x с коэффициентами в поле k таких, что их степень не превосходит некоторого фиксированного n. Рассмотрим оператор $\mathcal{D}$ формального дифференцирования, заданный на мономах формулой $\mathcal{D}x^m = mx^{m-1}$. Ясно, что $\ker \mathcal{D}$ – подпространство постоянных полиномов, изоморфное k, а $\operatorname{im} \mathcal{D} = P_{n-1}[x]$. При этом $\ker \mathcal{D} \subset \operatorname{im} \mathcal{D}$, хотя и $\ker \mathcal{D} \oplus \operatorname{im} \mathcal{D} \cong P_n[x]$.

3.1.2 Ранг, дефект и определитель как инварианты линейного оператора

Предложение 3.1.3. *(Простейшие инварианты) Ранг, дефект и определитель являются инвариантами линейного оператора.*

Доказательство. Для инвариантности величины достаточно проверить, что она принимает равные значения на всех матрицах, соответствующих данному оператору в различных базисах пространства V.

Две матрицы A_1 и A_2 линейного оператора $\mathcal{A}$ в различных базисах связаны отношением *подобия* $A_2 = H^{-1}A_1H$, где H – подходящая обратимая матрица. Инвариантность определителя следует сразу же из его мультипликативности. Поскольку для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \det B$, то $1 = \det(HH^{-1}) = \det H \det H^{-1}$, откуда $\det H^{-1} = (\det H)^{-1}$. Таким образом, $\det A_2 = \det(H^{-1}A_1H) = \det H^{-1} \det A_1 \det H = \det A_1 \det H^{-1} \det H = \det A_1$. Здесь важно то, что, хотя матрицы в общем случае не коммутируют, их определители коммутируют, поскольку являются элементами поля k.

Для доказательства инвариантности ранга мы интерпретируем матрицу линейного оператора как линейный оператор на координатном пространстве. Преобразование подобия может быть записано в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[r, "A_2"] \arrow[d, "H"', "\wr"] & k^n \arrow[d, "H", "\wr"'] \\
k^n \arrow[r, "A_1"] & k^n
\end{tikzcd}$$

Ранг матрицы A_2 равен размерности образа композиции гомоморфизмов $H^{-1}A_1H$. При этом матрицы H и H^{-1} определяют изоморфизмы и тем самым переводят линейно независимые подсистемы векторов в линейно независимые подсистемы векторов. Поэтому базис пространства k^n при действии матрицей H переходит в (другой) базис, который тоже состоит из n векторов. Действие матрицей A_1 отображает полученный базис в подсистему векторов, имеющую ранг $\operatorname{rank} A_1$. Выберем в ней максимальную линейно независимую подсистему. Она состоит из $\operatorname{rank} A_1$ векторов. Наконец, действие матрицей H^{-1} переводит эту подсистему в линейно независимую подсистему, состоящую из $\operatorname{rank} A_1$ векторов. Отсюда имеем равенство $\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2$.

Инвариантность дефекта следует из инвариантности ранга и аддитивности размерности согласно формуле

$$\dim \ker A_2 = n - \dim \operatorname{im} A_2 = n - \operatorname{rank} A_2.$$

□

Упражнение 3.1.4. Докажите, что ранг и дефект являются инвариантами любого гомоморфизма векторных пространств, т. е. могут быть вычислены с использованием его матрицы в паре базисов. *Указание:* видоизмените доказательство предложения 3.1.3.

3.2 Алгебра эндоморфизмов и группа автоморфизмов

3.2.1 Пространство эндоморфизмов

Множество всех эндоморфизмов векторного пространства V над полем k будем обозначать символом $\mathrm{End}_k V$.

Определение 3.2.1. *Автоморфизмом пространства* V называется любой изоморфизм этого пространства на себя, т. е. $\mathcal{A} : V \xrightarrow{\sim} V$.

Множество всех автоморфизмов векторного пространства V будем обозначать символом $\mathrm{Aut}_k V$. Понятно, что $\mathrm{Aut}_k V \subsetneq \mathrm{End}_k V$. Эндоморфизм $\mathcal{A}$ векторного пространства V является автоморфизмом тогда и только тогда, когда он биективен.

Выясним, какие алгебраические операции определены на множестве всех эндоморфизмов данного векторного пространства V. Во-первых, имеет место *поточечное сложение* эндоморфизмов: для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}_k V$ эндоморфизм $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ определяется по правилу: для каждого $v \in V$ $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(v) := \mathcal{A}(v) + \mathcal{B}(v)$. Очевидно, сложение коммутативно и ассоциативно. Нулевой эндоморфизм $\mathcal{O} : V \to V$, $\mathrm{im}\,\mathcal{O} = 0$, является нейтральным по сложению. Кроме этого, всякий эндоморфизм $\mathcal{A}$ имеет противоположный по сложению, определяемый для каждого $v \in V$ по формуле $(-\mathcal{A})(v) := -\mathcal{A}(v)$. Таким образом, $\mathrm{End}_k V$ – абелева группа относительно поточечного сложения эндоморфизмов.

Также на группе $\mathrm{End}_k V$ поле скаляров k действует поточечным умножением, а именно для каждого $\alpha \in k$ и для каждого $v \in V$ имеем $(\alpha\mathcal{A})(v) := \alpha\mathcal{A}(v)$. Такое действие наделяет группу $\mathrm{End}_k V$ структурой k-векторного пространства.

Упражнение 3.2.2. Пусть V – конечномерное пространство. Укажите какой-нибудь базис пространства $\mathrm{End}_k V$. Какова размерность этого пространства?

3.2.2 Алгебра эндоморфизмов векторного пространства

Для любых двух эндоморфизмов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}_k V$ определена композиция $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, обладающая следующими свойствами. Она ассоциативна, т. е. для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{End}_k V$ выполнено $\mathcal{C} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = (\mathcal{C} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{A}$, как показывает следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{B}"] \arrow[dr, "\mathcal{C}\circ\mathcal{B}"] & V \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\
V \arrow[u, "\mathcal{A}"] \arrow[ur, "\mathcal{B}\circ\mathcal{A}"] \arrow[r, "\mathcal{C}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})", "(\mathcal{C}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{A}"'] & V
\end{tikzcd}$$

Однако операция $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \mapsto \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ некоммутативна.

Упражнение 3.2.3. Постройте пример, иллюстрирующий некоммутативность композиции линейных операторов.

Тождественный оператор $\mathcal{E} : V \to V, v \mapsto v$, является нейтральным (единицей) относительно композиции, т. е. $\mathcal{E} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{E} = \mathcal{A}$ для любого оператора $\mathcal{A}$. Также для всех $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{End}_k V$ выполнены тождества $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{C} + \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$ и $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$. Таким образом, множество $\mathrm{End}_k V$ наделено структурой *ассоциативного некоммутативного кольца с единицей.*

Заметим, что структуры кольца и векторного пространства на множестве $\mathrm{End}_k V$ связаны тождествами

$$\lambda(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\lambda \mathcal{B}) \text{ для всех } \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}_k V, \ \lambda \in k.$$

Определение 3.2.4. Кольцо R, являющееся одновременно k-векторным пространством таким, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $a, b \in R$ и для всех $\lambda \in k$, называется *алгеброй над полем* k, или k*-алгеброй.*

Иными словами, k-алгебра – это кольцо R, снабженное действием поля скаляров k, причем это действие совместимо с операцией умножения в кольце R. Если кольцо R коммутативно (ассоциативно; с единицей), то k*-алгебра* R также *коммутативна* (*ассоциативна; с единицей*). *Размерностью* k*-алгебры* R называется ее размерность как k-векторного пространства.

Упражнение 3.2.5. Пусть V – пространство векторов трехмерного физического пространства. В качестве операции умножения рассмотрим векторное произведение $\times$. Убедитесь в том, что тем самым получается некоммутативная неассоциативная алгебра (без единицы) с умножением, удовлетворяющим *тождеству антикоммутативности*

$$a \times a = 0$$

и *тождеству Якоби:*

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0.$$

Это пример так называемой *алгебры Ли.*

Упражнение 3.2.6. Приведите известные вам примеры конечномерных и бесконечномерных алгебр над полем.

Определение 3.2.7. *Подалгеброй* алгебры R над полем k называют подпространство $L \subset R$, замкнутое относительно операции умножения в алгебре R, т. е. такое, что $L \cdot L \subseteq L$.

Поскольку понятие алгебры над полем объединяет понятия кольца и векторного пространства, то для изучения алгебр применяются понятия и результаты как из теории векторных пространств, так и из теории колец. В частности, несложно дать определения левого/правого/двустороннего идеала k-алгебры R, факторалгебры по двустороннему идеалу, гомоморфизма k-алгебр, его ядра и образа и сформулировать теорему о гомоморфизме для алгебр над полем. Это предоставляется читателю в качестве серии несложных упражнений по конструированию понятий.

Теорему о гомоморфизме для алгебр мы будем записывать в виде *короткой точной последовательности алгебр*

$$0 \to \ker f \to R \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{im} f \to 0,$$

где $f : R \to R'$ – гомоморфизм k-алгебр, $\ker f$ – его ядро, являющееся в R двусторонним идеалом, $\operatorname{im} f$ – образ гомоморфизма f, $\overline{f} : R \to \operatorname{im} f$ – индуцированный гомоморфизм алгебры R на образ гомоморфизма f.

Теперь выберем в пространстве V базис $e_1, \ldots, e_n$ и будем считать его фиксированным. Каждому линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$ поставим в соответствие его матрицу в этом базисе. Понятно, что линейной комбинации операторов $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$ соответствует линейная комбинация их матриц $\lambda A + \mu B$ в том же базисе. Иными словами, выбор базиса в векторном пространстве определяет изоморфизм

$$\epsilon : \mathrm{End}_k V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_k(n)$$

векторного пространства линейных операторов пространства V на векторное пространство квадратных матриц размера n.

Теперь рассмотрим композицию любых двух линейных операторов $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. В базисе $e_1, \ldots, e_n$ каждый вектор $v \in V$ приобретает координатное представление $v = \sum_{i=1}^n e_i x_i$. Образ вектора $\mathcal{A}v$ также имеет координатное представление $\mathcal{A}v = \sum e_i y_i$, вычисляемое по формуле $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = \overline{1, n}$, в которой $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ – элементы матрицы A, соответствующей линейному оператору $\mathcal{A}$ в том же базисе. Применив к $\mathcal{A}v$ линейный оператор $\mathcal{B}$, получим вектор $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})v$, имеющий в том же базисе координаты $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})v = \sum_{i=1}^n e_i z_i$, вычисляемые по формуле $z_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j = \sum_{j,l=1}^n b_{ij} a_{jl} x_l$, $i = \overline{1, n}$. Здесь $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ – элементы матрицы B, соответствующей линейному оператору $\mathcal{B}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Поскольку полученные выражения справедливы для любого вектора $v \in V$, то можно написать, что если $\mathcal{C} := \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, то для матричных элементов c_{il} оператора композиции $\mathcal{C}$ имеем $c_{il} = \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jl}$, что соответствует произведению матриц $C = BA$. Таким образом, отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его матрицу в фиксированном базисе, ставит в соответствие композиции операторов произведение их матриц в том же порядке следования. Тем самым заключаем, что построенное отображение ϵ – изоморфизм алгебр над полем k.

Замечание 3.2.8. Этот изоморфизм определяется выбором базиса. Различным базисам отвечают различные изоморфизмы тех же алгебр.

Упражнение 3.2.9. Какова размерность алгебры $\mathrm{End}_k V$, если $\dim V = n$? Ответ обоснуйте.

3.2.3 Группа обратимых элементов алгебры $\mathrm{End}_k V$

Рассмотрим множество тех операторов $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$, которые осуществляют обратимые линейные преобразования пространства V. Иными словами, будем изучать автоморфизмы пространства V среди всех его эндоморфизмов.

Понятно, что эндоморфизм $\mathcal{A}$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det \mathcal{A} \neq 0$, т. е. его матрица в любом базисе пространства V обратимая (невырожденная). Геометрически это можно представлять так. В силу изоморфизма $\mathrm{End}_k V \cong \mathrm{Mat}_k(n)$ отождествим линейные операторы с точкам n^2-мерного координатного пространства. Координаты точки такого пространства определяются набором n^2 элементов матрицы линейного оператора, изображаемого этой точкой. Тогда множество вырожденных линейных операторов образует замкнутое подмногообразие, заданное одним уравнением $\det A = 0$, левая часть которого представляет собой полином степени n от n^2 координат. Исключение этого подмногообразия приводит к открытому подмножеству, точки которого соответствуют обратимым линейным операторам. Такую ситуацию обычно выражают формулировкой: *достаточно общий линейный оператор является невырожденным.*

Заметим, что для любых двух невырожденных линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ их композиция $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ будет также невырожденным линейным оператором. В частности, обратный к ней оператор поставляется композицией обратных к сомножителям, построенной в обратном порядке (проверьте!): $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, операция формирования композиции наделяет подмножество $\mathrm{Aut}_k V$ невырожденных линейных операторов структурой (в общем случае неабелевой) группы.

Замечание 3.2.10. Групповая структура относительно композиции не распространяется на все множество $\mathrm{End}_k V$, поскольку в $\mathrm{End}_k V$ существуют необратимые операторы.

3.2.4 Полная линейная группа

Рассмотрим *группу невырожденных матриц размера n над полем k*. Групповая операция в этом случае – умножение матриц, нейтральный элемент – единичная матрица E. Понятно, что элемент, обратный к матрице A, задается выражением A^{-1}. Описанная только что группа называется также *полной линейной группой размера n над полем k* и обозначается $GL_k(n)$. Каждая невырожденная матрица A определяет обратимое линейное преобразование пространства k^n, и каждое невырожденное линейное преобразование пространства k^n соответствует обратимой матрице A.

Упражнение 3.2.11. Докажите последнее утверждение, используя построение матрицы линейного преобразования из координат образов базисных векторов.

Тем самым определен изоморфизм групп $GL_k(n) \cong \mathrm{Aut}_k k^n$.

Также понятно, что выбор в n-мерном пространстве V базиса $e_1, \ldots, e_n$ определяет изоморфизм $V \cong k^n$ и сохраняющее композиции соответствие между автоморфизмами $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}_k V$ и их невырожденными матрицами $A \in GL_k(n)$. Поэтому выбор базиса в *любом* n-мерном k-векторном пространстве V фиксирует изоморфизм групп $GL_k(n) \cong \mathrm{Aut}_k V$.

3.3 Гомоморфизм кольца полиномов. Понятие об инвариантах линейного оператора

3.3.1 $\mathcal{A}$-порожденная подалгебра

Возьмем произвольный линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$ и будем рассматривать всевозможные конечные композиции его с собой $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^2$, $\ldots$, $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{n-1}$. Заметим, что степени одного и того же оператора $\mathcal{A}$ коммутируют. Множество

$$k[\mathcal{A}] = \{\sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{A}^i | m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

всех полиномов от оператора $\mathcal{A}$ является (коммутативной) подалгеброй в (некоммутативной) алгебре $\mathrm{End}_k V$. Можно рассмотреть гомоморфизм k-алгебр

$$\phi_{\mathcal{A}} : k[t] \to \mathrm{End}_k V : t \mapsto \mathcal{A}.$$

Тогда $k[\mathcal{A}] = \mathrm{im}\, \phi_{\mathcal{A}}$, и говорят, что *подалгебра* $k[\mathcal{A}]$ *в алгебре* $\mathrm{End}_k V$ *порождена элементом* $\mathcal{A}$.

3.3.2 Минимальный полином и его инвариантность

Теперь заметим, что k-алгебра $k[t]$ бесконечномерна, в то время как k-алгебра $\mathrm{End}_k V$ конечномерна. В силу монотонности размерности подпространство $k[\mathcal{A}]$ в векторном пространстве $\mathrm{End}_k V$ не может иметь размерность выше n^2 и тем более не может быть бесконечномерным. Это означает, что гомоморфизм $\phi_{\mathcal{A}}$ имеет нетривиальное ядро. Поскольку

$\phi_{\mathcal{A}}$ – гомоморфизм колец, то его ядро $\ker \phi_{\mathcal{A}}$ – идеал в кольце $k[t]$. Напомним, что $k[t]$ – кольцо главных идеалов, т. е. всякий идеал I в этом кольце состоит из многочленов, кратных некоторому многочлену f, а именно для всякого I существует $f \in k[t]$ такой, что $I = (f)$. Этот многочлен f естественно называть *образующей* идеала I. Ясно, что выбор образующей в данном идеале неоднозначен и различные образующие одного и того же идеала отличаются умножением на ненулевые скаляры из поля k. В частности, они имеют одинаковые степени.

Выберем из образующих идеала $\ker \phi_{\mathcal{A}}$ тот полином, у которого коэффициент при старшем члене равен 1 (*нормализованный* полином). Эту образующую назовем *минимальным полиномом* оператора $\mathcal{A}$ и будем обозначать символом $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.

Определение 3.3.1. *Минимальным полиномом* оператора $\mathcal{A}$ называют нормализованный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ наименьшей степени такой, что $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Из этого определения мы получим алгоритм вычисления минимального полинома для данного линейного оператора. Заметим, что, согласно коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} k[t] \arrow[r, "\phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & \mathrm{End}_k V \arrow[d, "\epsilon", "\wr"'] \\ & \mathrm{Mat}_k(n) \end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

композиция $\phi_A := \epsilon \circ \phi_{\mathcal{A}}$ отображает t в матрицу A линейного оператора $\mathcal{A}$. При этом $\ker \phi_{\mathcal{A}} = \ker \phi_A$, и минимальный многочлен линейного оператора равен минимальному многочлену его матрицы в любом базисе. Поэтому вместо вычисления минимального многочлена абстрактного линейного оператора можно вычислять минимальный многочлен его матрицы в каком-нибудь базисе. Результат от выбора базиса не зависит, а это означает, что *коэффициенты μ_i минимального полинома $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ являются инвариантами данного линейного оператора.*

3.3.3 Структура подалгебры $k[\mathcal{A}]$

Для ее выяснения достаточно применить теорему о гомоморфизме для k-алгебр к гомоморфизму $\phi_{\mathcal{A}}$. Она дает следующий результат:

$$k[\mathcal{A}] = \operatorname{im} \phi_{\mathcal{A}} \cong k[t]/\ker \phi_{\mathcal{A}} = k[t]/(\mu_{\mathcal{A}}(t)).$$

Предложение 3.3.2. *(Структура алгебры $k[\mathcal{A}]$) $\mathcal{A}$-порожденная подалгебра $k[\mathcal{A}] \subset \mathrm{End}_k(V)$ изоморфна факторалгебре $k[t]/(\mu_{\mathcal{A}}(t))$. Ее размерность равна степени минимального полинома $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.*

Замечание 3.3.3. Если минимальный полином данного линейного оператора $\mathcal{A}$ приводим, то в этом случае $\mathcal{A}$-порожденная подалгебра содержит делители нуля.

3.3.4 Вычисление минимального полинома

Тождество

$$\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + \mu_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + \mu_1\mathcal{A} + \mu_0\mathcal{E} = \mathcal{O}$$

(соответственно

$$\mu_A(A) = A^m + \mu_{m-1}A^{m-1} + \cdots + \mu_1 A + \mu_0 E = 0$$

в матричной форме) может быть интерпретировано как *равная нулю нетривиальная линейная комбинация наименьшего набора последовательных степеней* линейного оператора $\mathcal{A}$ (соответственно его матрицы A). Коэффициенты этой линейной комбинации и подлежат вычислению.

Итак, алгоритм вычисления минимального полинома следующий.

1. Выбрать базис пространства V и составить матрицу A оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе. Положить $m = 1$.
2. Вычислить степени $A, \ldots, A^m$.
3. Исследовать систему однородных линейных уравнений
$$\mu_0 E + \mu_1 A + \cdots + \mu_m A^m = 0$$
относительно неизвестных $\mu_i, i = \overline{0, m}$ на наличие ненулевых решений.
4. Если система имеет ненулевое пространство решений, то выбрать решение с $\mu_m = 1$ – это искомые коэффициенты минимального полинома. Иначе увеличить m на единицу и вернуться к п. 2 настоящего алгоритма.

Вычисляя ранги $r_0, r_1, \ldots, r_l, \ldots$ систем векторов $\{E\}$, $\{E, A\}$, $\ldots$, $\{E, A, \ldots, A^i\}, \ldots$, в пространстве $\mathrm{Mat}_k(n)$, получим последовательность

$$r_0 = 1, r_1 = 2, \ldots, r_i = i + 1, \ldots, r_{m-1} = r_m = \cdots = m.$$

Значение m, на котором стабилизируется последовательность рангов, и является степенью минимального полинома матрицы A (и соответствующего ей линейного оператора).

3.3.5 Частные случаи

Следующий перечень в ряде случаев позволяет сократить объем работы при вычислении минимального полинома.

1. Нулевой оператор: $\mu_{\mathcal{O}}(t) = t$.

2. Скалярный оператор $\lambda : V \to V : x \mapsto \lambda x$ имеет минимальный полином $\mu_\lambda(t) = t - \lambda$.

3. *Проектором* называют оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий соотношению $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Понятно, что $\mu_{\mathcal{P}}(t) = t^2 - t$.

4. *Нильпотентным* называют оператор $\mathcal{N}$, удовлетворяющий соотношению $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Минимальную для данного $\mathcal{N}$ степень m, для которого соотношение выполнено, называют *индексом* нильпотентного оператора $\mathcal{N}$. Понятно, что если $\mathcal{N}$ – нильпотентный оператор индекса m, то $\mu_{\mathcal{N}}(t) = t^m$.

5. *Идемпотентным* называют оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий соотношению $\mathcal{A}^m = \mathcal{A}$. Минимальную для данного $\mathcal{A}$ степень m, для которого соотношение выполнено, называют *индексом* идемпотентного оператора $\mathcal{A}$. Понятно, что если $\mathcal{A}$ – идемпотентный оператор индекса m, то $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m - t$. Проектор – это идемпотентный оператор индекса 2.

6. Выделение блока. Пусть в некотором базисе матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right],$$

   где A_1, A_2 – квадратные матрицы. Тогда его минимальный полином равен наименьшему общему кратному минимальных полиномов, соответствующих блокам A_1 и A_2, т. е. $\mu_{\mathcal{A}}(t) = LCM(\mu_{A_1}(t), \mu_{A_2}(t))$. Также данное замечание показывает, что существуют линейные операторы, минимальные полиномы которых приводимы.

Упражнение 3.3.4. Сконструируйте линейный оператор, минимальный полином которого приводим.

3.4 Инвариантные подпространства и фильтрации. Фактор-оператор. Верхнетреугольная форма линейного оператора

3.4.1 Инвариантное подпространство

Определение 3.4.1. Подпространство $W \subset V$ называется $\mathcal{A}$-*инвариантным*, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & V \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\ W \arrow[r, hook] & V \end{tikzcd}$$

Эквивалентно это означает, что оператор $\mathcal{A}$ отображает подпространство W *в себя*, т. е. $\mathcal{A}(W) \subset W$.

Замечание 3.4.2. Если $W \subset V$ – произвольное (не обязательно инвариантное) подпространство, то можно лишь утверждать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & V \arrow[d, "\mathcal{A}"] \\ \mathcal{A}(W) \arrow[r, hook] & V \end{tikzcd}$$

(в левом нижнем углу находится *новое* подпространство $\mathcal{A}(W)$, которое *может не принадлежать* W, если только W не $\mathcal{A}$-инвариантно).

Понятно, что любой линейный оператор $\mathcal{A}$ на любом векторном пространстве V обязательно имеет два $\mathcal{A}$-инвариантных подпространства – 0 и V.

3.4.2 Собственные векторы и собственные значения

Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$ имеет одномерное инвариантное подпространство $L \subset V$, $\dim_k L = 1$.

Определение 3.4.3. *Собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется любой базисный вектор одномерного $\mathcal{A}$-инвариантного подпространства в V.

Поскольку $\mathcal{A}L \subseteq L$, и $v \in L$ – собственный вектор, то $\mathcal{A}v \in L$. Это означает, что существует скаляр $\lambda \in k$, такой что $\mathcal{A}v = \lambda v$.

Упражнение 3.4.4. Докажите, что скаляр λ определяется только подпространством L, но не зависит от выбора в нем собственного вектора $v \in L$.

Определение 3.4.5. *Собственным значением, соответствующим одномерному $\mathcal{A}$-инвариантному подпространству L*, называется скаляр $\lambda \in k$, определяемый условием:

$$\mathcal{A}v = \lambda v \ \text{ для всех } v \in L.$$

Пример 3.4.6. Скалярный оператор $\lambda\mathcal{E} : V \to V$, действующий умножением на фиксированный скаляр $\lambda \in k$, обладает единственным собственным значением, равным λ. При этом любое одномерное подпространство является инвариантным, а любой ненулевой вектор – собственным.

Пример 3.4.7. Существуют операторы, не имеющие ни одного собственного значения (и ни одного собственного вектора). Пусть $V = \mathbb{R}^2$ – двумерное векторное пространство над полем вещественных чисел, $R_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – "поворот", задаваемый матрицей

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Если значения параметра ϕ отличны от πl, $l \in \mathbb{Z}$, то ни один ненулевой вектор не отображается в пропорциональный.

3.4.3 Вычисление собственных векторов и собственных значений

Чтобы вычислить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$, необходимо решить уравнение $\mathcal{A}x = tx$ относительно вектора $x \in V$, где $t \in k$ – скалярный параметр, подлежащий определению. Иначе говоря, необходимо ответить на вопрос: при каких значениях параметра t линейный оператор $\mathcal{A} - t\mathcal{E}$ имеет нетривиальное ядро?

Применив теорему о размерности ядра и образа линейного оператора, заключаем, что

$$\dim\ker(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \dim V - \dim\mathrm{im}\,(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \dim V - \mathrm{rank}\,(\mathcal{A} - t\mathcal{E}).$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A} - t\mathcal{E}$ имеет нетривиальное ядро тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}\,(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) < \dim V$. Это неравенство равносильно выполнению условия

$$\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = 0,$$

называемого *характеристическим уравнением* линейного оператора $\mathcal{A}$.

3.4.4 Характеристический полином и инвариантность собственных значений

Поскольку определитель линейного оператора – инвариант, то для его вычисления можно использовать матрицу изучаемого линейного оператора в произвольном базисе. То же самое относится к оператору $t\mathcal{E} - \mathcal{A}$. Тогда $\det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ – нормализованный полином степени, равной $\dim V$, коэффициенты которого являются инвариантами оператора $\mathcal{A}$.

Замечание 3.4.8. Выражения $\det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ и $\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ отличаются только знаком, и первое из них предпочтительнее исключительно в силу нормировки.

Замечание 3.4.9. Для конкретных вычислений необходимо перейти к какому-нибудь матричному представлению линейного оператора $\mathcal{A}$. Тождественному оператору в любом базисе соответствует единичная матрица E. Таким образом приходим к исследованию пространства решений системы однородных линейных уравнений $(tE - A)x = 0$ и условию на параметр t, записанному в виде *характеристического уравнения* матрицы A:

$$\det(tE - A) = 0.$$

Левая часть характеристического уравнения для матрицы A представляет собой полином степени $\dim V$ от переменной λ. Раскрывая определитель $\det(tE - A)$, можно получить явные выражения для коэффициентов характеристического полинома. Как мы доказали прежде, он является инвариантом. Значит, и его коэффициенты тоже являются инвариантами линейного оператора A. В частности, коэффициент при t^{n-1} равен $-\operatorname{Tr} A$, т. е. взятой с обратным знаком сумме тех элементов матрицы A, которые стоят на главной диагонали. Величина $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ называется *следом* матрицы. Таким образом мы доказали, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, что позволяет говорить о *следе линейного оператора* как его инварианте.

Пусть $t = \lambda$ – корень характеристического уравнения. Это означает, что при $t = \lambda$ уравнение $(A - tE)x = 0$ имеет ненулевое решение. Пусть x – одно из таких решений, т. е. ненулевой вектор, удовлетворяющий соотношению $Ax = \lambda x$. Мы доказали следующий результат.

Предложение 3.4.10. *(Собственные значения и собственные векторы) Любой корень характеристического уравнения линейного оператора $\mathcal{A}$ (равносильно, его матрицы A) является собственным значением этого оператора. Обратно, любое собственное значение* *линейного оператора $\mathcal{A}$ является корнем его характеристического уравнения (равносильно, характеристического уравнения его матрицы). Если λ – собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$, то все отвечающие ему собственные векторы поставляются ненулевыми решениями уравнения* $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})x=0$ *(равносильно,* $(A-\lambda E)x=0$*).*

3.4.5 Кратности собственных значений

Может случиться, что некоторые (или все) корни характеристического полинома окажутся кратными.

Определение 3.4.11. *Алгебраической кратностью* собственного значения λ называется кратность λ как корня характеристического полинома.

Зафиксируем одно из собственных значений λ данного линейного оператора $\mathcal{A}$.

Определение 3.4.12. *Собственным подпространством, отвечающим собственному значению* λ, называется ядро оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$.

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ, будем обозначать символом V^λ. Понятно, что это пространство $\mathcal{A}$-инвариантно.

Определение 3.4.13. *Геометрической кратностью* собственного значения λ называется размерность подпространства V^λ.

Определение 3.4.14. *Спектром* линейного оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех пар (λ, m), где λ – собственное значение этого оператора, m – его геометрическая кратность. Спектр называется *простым*, если он состоит только из пар вида $(\lambda, 1)$, т.е. каждое собственное значение данного линейного оператора имеет геометрическую кратность 1.

Для спектра линейного оператора $\mathcal{A}$ мы будем использовать обозначение $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$.

Теорема 3.4.15. *(Геометрическая и алгебраическая кратности) Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть геометрическая кратность собственного значения λ равна m. Ограничим оператор $\mathcal{A}$ на собственное подпространство $V^\lambda : \mathcal{A}|_{V^\lambda} =: \mathcal{A}'$ и вычислим характеристический полином оператора $\mathcal{A}'$: $\det(t\mathcal{E}'-\mathcal{A}')=(t-\lambda)^m$. Здесь использован тот факт, что оператор

$\mathcal{A}'$ имеет одно собственное значение, равное λ, и что этот оператор действует на пространстве V^λ размерности m. Тогда характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ делится на $(t-\lambda)^m$ и имеет вид $(t-\lambda)^m g(t)$ для некоторого полинома $g(t)$. Может случиться, что λ также является корнем $g(t)$; тогда алгебраическая кратность λ как собственного значения может превысить его геометрическую кратность. □

3.4.6 Сумма собственных подпространств

Предложение 3.4.16. *(Сумма собственных подпространств) Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы. Сумма собственных подпространств $\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V^\lambda$ прямая (но может не совпадать со всем пространством V).*

Доказательство. Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ – различные собственные значения, $V^{\lambda_1},\dots,V^{\lambda_s}$ – соответствующие им собственные подпространства. Выберем из каждого подпространства V^{λ_i} по одному собственному вектору e_i. Линейную независимость набора векторов $e_1,\dots,e_s$ будем доказывать, используя индукцию по s.

Очевидно, при $s=1$ имеем набор из одного ненулевого вектора, который линейно независим. Предположим, что предложение доказано для $s-1$ векторов и что существует нетривиальная линейная зависимость $\alpha_1e_1+\dots\alpha_se_s=0$, причем $\alpha_1\neq 0$. Применив оператор $\mathcal{A}$, получим другое линейное соотношение $\alpha_1\lambda_1e_1+\dots\alpha_s\lambda_se_s=0$. Умножая первое соотношение на λ_s и вычитая из второго, получим нетривиальную линейную зависимость первых $s-1$ векторов: $\alpha_1(\lambda_s-\lambda_1)e_1+\dots\alpha_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})e_{s-1}=0$. Полученное противоречие завершает доказательство линейной независимости векторов $e_1,\dots,e_s$. Отсюда сразу же следует, что для любого i имеем $V^{\lambda_i}\cap\sum_{j\neq i}V^{\lambda_j}=0$ и тем самым сумма $\sum V^{\lambda_i}$ прямая. □

3.4.7 Диагонализируемые операторы

Определение 3.4.17. Линейный оператор $\mathcal{A}\in\operatorname{End}_k(V)$ на n-мерном векторном пространстве V *диагонализируем*, если в V существует базис $e_1,\dots,e_n$, относительно которого матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Предложение 3.4.18. *(Существование собственного вектора) Любой линейный оператор над алгебраически замкнутым полем имеет хотя бы один собственный вектор.*

Доказательство. Поскольку поле определения алгебраически замкнуто, то характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ имеет корень в k. Пусть $\lambda \in k$ – этот корень. Тогда линейный оператор $\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A}$ обладает нетривиальным ядром, все ненулевые векторы которого – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие собственному значению λ. $\square$

Теорема 3.4.19. *(Диагонализируемость: простой спектр) Над алгебраически замкнутым полем $k = \overline{k}$ линейный оператор $\mathcal{A}$ с простым спектром диагонализируем.*

Доказательство. Поскольку поле определения k алгебраически замкнуто, то характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ имеет в нем столько корней с учетом их кратностей, какова размерность пространства V. Пусть $\dim V = n$. Поскольку спектр оператора $\mathcal{A}$ прост, то все n корней характеристического полинома различны. Тогда найдется n линейно независимых собственных векторов, по одному для каждого собственного значения, которые и составляют искомый базис. $\square$

Теорема 3.4.20. *(Критерий диагонализируемости) Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем k. Он диагонализируем тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1. *Все корни характеристического полинома оператора $\mathcal{A}$ принадлежат полю k;*
2. *Геометрическая кратность каждого собственного значения совпадает с его алгебраической кратностью.*

Доказательство. Пусть выполнены оба условия, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – различные собственные значения, $m_1, \dots, m_s$ – их кратности. Согласно второму условию, $\dim V^{\lambda_i} = m_i$, и $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. Согласно теореме о сумме собственных подпространств, сумма $\sum_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}$ прямая, а согласно равенству $\sum_{i=1}^{s} \dim V^{\lambda_i} = \dim V$, справедливо разложение

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}.$$

В базисе, полученном объединением базисов подпространств V^{λ_i}, матрица оператора имеет диагональный вид.

Теперь предположим, что оператор $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ имеет диагональную матрицу

$$A = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{m_s}).$$

Понятно, что $m_1 + \dots + m_s = n$. Вычисляя характеристический полином, получим $\det(t\mathcal{E} - \mathcal{A}) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$, откуда видно, что все корни характеристического полинома принадлежат полю k и что геометрические кратности m_i собственных значений λ_i совпадают с их алгебраическими кратностями. $\square$

3.4.8 Поля $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ и инвариантные подпространства

Теорема 3.4.21. *(Инвариантные подпространства над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$) Любой линейный оператор над полем $\mathbb{C}$ имеет одномерное инвариантное подпространство; любой линейный оператор над полем $\mathbb{R}$ – одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{C}$ – алгебраически замкнутое поле, то утверждение теоремы об основном поле $\mathbb{C}$ – это частный случай предложения 3.4.18.

Для линейного оператора $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}[t]$. Пусть он имеет вещественный корень α; тогда найдется вектор $v \in V$ такой, что $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})v = 0$. Значит, это собственный вектор, принадлежащий к собственному значению α.

Пусть теперь $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ не имеет вещественных корней. Тогда рассмотрим его как многочлен над $\mathbb{C}$, и наряду с каждым комплексным корнем α его комплексно сопряженный $\overline{\alpha}$ также будет корнем характеристического полинома. Пусть $v \in \mathbb{C}^n$ – ненулевое решение уравнения $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})x = 0$. Тогда его комплексно сопряженное $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ является решением уравнения $(\mathcal{A} - \overline{\alpha}\mathcal{E})x = 0$. Итак, имеют место соотношения

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})(\mathcal{A} - \overline{\alpha}\mathcal{E})v = (\mathcal{A}^2 - (\alpha + \overline{\alpha})\mathcal{A} + \alpha\overline{\alpha}\mathcal{E})v = 0,$$
$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})(\mathcal{A} - \overline{\alpha}\mathcal{E})\overline{v} = (\mathcal{A}^2 - (\alpha + \overline{\alpha})\mathcal{A} + \alpha\overline{\alpha}\mathcal{E})\overline{v} = 0.$$

Заметим, что $v + \overline{v} =: v_r$ и $i(\overline{v} - v) =: v_i$ – вещественные векторы, хотя бы один из которых отличен от 0. Суммируя оба соотношения, получим соотношение (над $\mathbb{R}$!) $(\mathcal{A}^2 - (\alpha + \overline{\alpha})\mathcal{A} + \alpha\overline{\alpha}\mathcal{E})v_r = 0$. Вычитая из второго соотношения первое, приходим к другому соотношению (тоже над $\mathbb{R}$): $(\mathcal{A}^2 - (\alpha + \overline{\alpha})\mathcal{A} + \alpha\overline{\alpha}\mathcal{E})v_i = 0$.

Таким образом $\mathcal{A}^2 v_r = (\alpha + \overline{\alpha})\mathcal{A}v_r + \alpha\overline{\alpha}v_r$ и аналогичное равенство для v_i. Пусть $v_r \neq 0$ (если это не так, необходимо выбрать v_i, и рассмотрение аналогично). Поскольку $\mathcal{A}$ не имеет одномерных инвариантных подпространств, то $\mathcal{A}v_r \neq \lambda v_r$, и $\langle v_r, \mathcal{A}v_r \rangle$ – двумерное инвариантное подпространство. $\square$

3.4.9 Инвариантная фильтрация

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$ – линейный оператор, определенный на k-векторном пространстве V.

Определение 3.4.22. Фильтрация

$$0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{m-1} \subset W_m = V$$

называется $\mathcal{A}$-*инвариантной*, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] & W_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & W_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & \cdots \arrow[r, hook] & W_{m-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & W_m \arrow[d, "\mathcal{A}"'] \\
0 \arrow[r, hook] & W_1 \arrow[r, hook] & W_2 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & W_{m-1} \arrow[r, hook] & W_m
\end{tikzcd}$$

Пусть оператор $\mathcal{A}$ обладает $\mathcal{A}$-инвариантной фильтрацией $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$, которая является максимальной. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – какой-нибудь связанный с ней базис. Тогда по инвариантности подпространств V_i имеем $\mathcal{A}e_i \in V_i$, то есть получается разложение образа i-го базисного вектора по первым i векторам того же базиса:

$$\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ii}e_i.$$

Это означает, что в выбранном базисе матрица A оператора $\mathcal{A}$ имеет верхнетреугольный вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.4.1}$$

Из определения характеристического полинома и вида матрицы (3.4.1) сразу же следует, что элементы $a_{11}, \dots, a_{nn}$ – собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

В главе 4 мы покажем, что если поле определения алгебраически замкнуто, то каждый оператор $\mathcal{A}$ обладает $\mathcal{A}$-инвариантной максимальной фильтрацией.

3.4.10 Инвариантная точная последовательность и фактороператор

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий на векторном пространстве V, и пусть U – $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство. Сформировав факторпространство $W = V/U$, построим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}|_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & W \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Если ядро точной последовательности $0 \to U \to V \to W \to 0$ $\mathcal{A}$-инвариантно, то и всю последовательность имеет смысл называть $\mathcal{A}$-инвариантной.

Применение леммы 2.3.13 приводит к существованию линейного оператора $\overline{\mathcal{A}} : W \to W$, индуцированного оператором $\mathcal{A}$ на пространствах V и U, делающего диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}|_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\mathcal{A}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Понятно, что оператор $\overline{\mathcal{A}}$ отображает смежный класс в смежный класс, т. е. определяется по формуле

$$\overline{\mathcal{A}}(v + U) := \mathcal{A}v + \mathcal{A}U \subset \mathcal{A}v + U.$$

Оператор $\overline{\mathcal{A}}$, определенный таким образом, называется *фактороператором* линейного оператора $\mathcal{A}$.

3.5 Инвариантное расщепление и жорданова форма оператора

3.5.1 Матрица линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством

Пусть U – $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство векторного пространства V; $e_1, \ldots, e_k$ – базис подпространства U. Дополним его до базиса всего пространства V: $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Образы $\mathcal{A}e_i$ векторов $e_1, \ldots, e_k$ линейно выражаются через те же векторы; поэтому матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ имеет блочно-треугольный вид:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right]. \tag{3.5.1}$$

Пусть теперь линейная оболочка $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ также является $\mathcal{A}$-инвариантным подпространством. Это означает, что образы векторов $e_{k+1}, \dots, e_n$ также могут быть разложены в линейные комбинации тех же векторов $e_{k+1}, \dots, e_n$. При этом матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ имеет блочно-диагональный вид

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right].$$

Сформировав линейные оболочки $U := \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ и $W := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$, видим, что пространство V представлено в виде прямой суммы $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств U и W. Ограничения оператора $\mathcal{A}$ на каждое из этих подпространств могут рассматриваться как независимые операторы $\mathcal{A}' := \mathcal{A}|_U$, $\mathcal{A}'' := \mathcal{A}|_W$. Тогда говорят, что *оператор $\mathcal{A}$ является прямой суммой операторов $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$*.

В ряде задач (например, задач приведения матрицы линейного оператора к тому или иному каноническому виду) приходится искать разложение векторного пространства V в прямую сумму $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств. Такое разложение иногда называют *прямым разложением оператора $\mathcal{A}$*.

3.5.2 Матрица фактороператора в индуцированном базисе

Построим в V базис, согласованный с $\mathcal{A}$-инвариантным подпространством $U \subset V$. Именно, выберем в U какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_k$ и дополним его любым способом до базиса в V: $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Тогда в факторпространстве V/U определен индуцированный базис $\overline{e}_{k+1}, \dots, \overline{e}_n$, состоящий из смежных классов вида $\overline{e}_i = e_i + U$, $i = \overline{k+1, n}$.

Обратимся к действию оператора $\mathcal{A}$ на базисные векторы $e_i, i = \overline{1, n}$: $\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}$. Согласно выбору базиса, $a_{ji} = 0$ при $j = \overline{k+1, n}$,

$i = \overline{1,k}$. Формируя образы относительно гомоморфизма на факторпространство $V \to V/U$, приходим к соотношениям $\overline{\mathcal{A}}\overline{e}_i = \sum_{j=k+1}^{n} \overline{e}_j a_{ji}$, $i = \overline{k+1,n}$. В матричной записи имеем (сравните с матрицей (3.5.1)!)

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

3.5.3 Теорема Гамильтона – Кэли

Пусть поле определения k алгебраически замкнуто.

Теорема 3.5.1. *(Теорема Гамильтона – Кэли) Характеристический полином $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ линейного оператора $\mathcal{A}$ аннулирует $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности $\dim V = n$. Если $\dim V = 1$, то любой оператор на таком пространстве действует умножением на некоторый скаляр λ, так что $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t - \lambda$, и $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Пусть теперь $\dim V \geq 2$, причем теорема доказана для операторов на пространствах размерности $n-1$. Выберем одномерное инвариантное подпространство V_1 и пусть λ – соответствующее ему собственное значение. Они существуют в силу предположения об алгебраической замкнутости поля k. Выберем в V_1 базисный вектор e_1 и дополним его до базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ всего пространства V. В таком базисе матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-треугольный вид

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right].$$

Поэтому $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda)\chi_{\mathcal{A}'}(t)$, где $\mathcal{A}' : V/V_1 \to V/V_1$ – факторoператор, имеющий в базисе $e_2 + V_1, \dots, e_n + V_1$ матрицу A'. По предположению индукции $\chi_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}') = \mathcal{O}$, тогда для любого $v \in V$ выполнено $\chi_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})v \in V_1$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\chi_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})v = 0$. □

Следствие 3.5.2. *(Структура минимального полинома) Минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ линейного оператора $\mathcal{A}$ делит его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, причем $\mu_{\mathcal{A}}$ делится на каждый из линейных множителей $t - \lambda$, $\lambda \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$.*

Доказательство. Поскольку характеристический полином аннулирует оператор $\mathcal{A}$, то $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ делит $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ в кольце $k[t]$. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$ для некоторого ненулевого $x \in V$; тогда $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})x = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)x = 0$. Отсюда $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$, и тем самым $(t-\lambda)|\mu_{\mathcal{A}}(t)$. □

3.5.4 Прямое разложение на нильпотентную и обратимую части

Теорема 3.5.3. *(Разложение на нильпотентную и обратимую части) Любой линейный оператор $\mathcal{A}$ на конечномерном векторном пространстве V является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов.*

Эвристические замечания по доказательству. Если теорема верна, то в подходящем базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right],$$

где A' – обратимая матрица, соответствующая ограничению оператора $\mathcal{A}$ на подпространство H, A'' – нильпотентная матрица, соответствующая ограничению оператора $\mathcal{A}$ на подпространство K. Пусть q – индекс нильпотентности для A''; тогда q-я степень $\mathcal{A}^q$ обладает матрицей

$$A^q = \left[\begin{array}{c|c} A'^q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

При этом $\ker \mathcal{A}^q = K$ – такое инвариантное подпространство, что $\mathcal{A}|_K$ нильпотентен индекса q. Также $H = \operatorname{im} \mathcal{A}^q$ и ясно, что $H \cap K = 0$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить прямое разложение $V = H \oplus K$, соответствующее данному оператору $\mathcal{A}$.

Доказательство. Сформируем $\mathcal{A}$-инвариантную возрастающую цепь подпространств $0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r \subset \dots$, определяемую по правилу $K_r = \ker \mathcal{A}^r$. Поскольку V – пространство конечной размерности, то найдется такой наименьший номер q, что для любого $i > 0$ $K_q = K_{q+i}$. В такой ситуации говорят, что цепь вложенных подпространств *стабилизируется.* Введем обозначение $K := K_q$. Понятно, что $\mathcal{A}|_K$ – нильпотентный оператор индекса q.

Упражнение 3.5.4. Проверьте это!

Пусть теперь $H := \operatorname{im} \mathcal{A}^q$. Покажем, что $\mathcal{A}|_H$ обратим. Для этого вычислим $\ker \mathcal{A}|_H$. Пусть $\mathcal{A}|_H(x) = 0$ для некоторого $x \in H$. По определению подпространства H найдется такой вектор $y \in V$, что $x = \mathcal{A}^q y$. Таким образом, $\mathcal{A}|_H(x) = \mathcal{A}x = \mathcal{A}^{q+1}y = 0$, а по определению номера q верно соотношение $\mathcal{A}^{q+1}y = \mathcal{A}^q y = 0$, то есть $x = 0$. Отсюда имеем равенство $\ker \mathcal{A}|_H = 0$.

Из построения подпространств H и K следует, что

$$\dim V = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}^q + \dim \ker \mathcal{A}^q = \dim H + \dim K.$$

Проверим, что $H \cap K = 0$. Возьмем произвольный вектор $x \in H \cap K$. принадлежность его подпространствам H и K означает, что $x = \mathcal{A}^q y$ для некоторого $y \in V$, а также что $\mathcal{A}^q x = 0$. Тогда $\mathcal{A}^q x = \mathcal{A}^{2q} y = 0$, а по определению номера q (поскольку $\mathcal{A}|_H$ обратим) имеем $\mathcal{A}^{2q} y = \mathcal{A}^q y = 0$, откуда $x = 0$. Отсюда $V = H \oplus K$. □

3.5.5 Единственность разложения

Предположим, что имеет место некоторое прямое разложение $V = H' \oplus K'$ такое, что $\mathcal{A}|_{H'}$ обратим, $\mathcal{A}|_{K'}$ нильпотентен. Тогда $H' \subset \operatorname{im} \mathcal{A}^r$ для всех r и $K' \subset \ker \mathcal{A}^r$ для некоторого r. Но оба факта могут иметь место только при $H' = H = \operatorname{im} \mathcal{A}^q$ и $K' = K = \ker \mathcal{A}^q$.

3.5.6 Канонические виды линейного оператора

Понятно, что один и тот же оператор в различных базисах имеет различные подобные матрицы. Тогда возникает *задача классификации* линейных операторов, действующих на данном пространстве.

Под задачей классификации математических объектов данного класса понимают задачу (как только возможно полного) описания классов объектов этого класса относительно подходящей эквивалентности. Выбор отношения эквивалентности обычно составляет отдельную проблему, входящую в проблему классификации. Читатель уже сталкивался с задачей классификации конечномерных векторных пространств над фиксированным полем. В этом случае подходящим отношением эквивалентности была изоморфность векторных пространств, а каждый класс изоморфных пространств маркировался натуральным числом n, названным размерностью пространства.

В ситуации с линейными операторами можно рассматривать всевозможные линейные операторы на конечномерном векторном пространстве V. Назовем операторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ *изоморфными*, если найдется автоморфизм $\psi : V \to V$ пространства V такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}_1"] \arrow[d, "\psi"', "\wr"] & V \arrow[d, "\psi", "\wr"'] \\ V \arrow[r, "\mathcal{A}_2"] & V \end{tikzcd}$$

Зафиксировав в V какой-нибудь базис, получим матричные представления A_1, A_2, Ψ для морфизмов $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \psi$ соответственно. Коммутативность диаграммы означает, что $\psi \circ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \circ \psi$. То же самое в матричной форме имеет вид $\Psi A_1 = A_2 \Psi$, или, по обратимости матрицы Ψ,

$A_2 = \Psi A_1 \Psi^{-1}$. Таким образом, изоморфизм линейных операторов эквивалентен подобию их матриц в любом базисе.

Чтобы указать класс изоморфных линейных операторов, достаточно указать любой его представитель. При этом удобно, если этот представитель имеет наиболее простой из возможных видов.

Под *задачей приведения оператора к каноническому виду* понимают поиск базиса, в котором матрица данного оператора имеет блочно-диагональный вид, причем диагональные блоки являются матрицами некоторого предписанного типа. Понятно, что в процессе решения такой задачи находят прямое разложение данного оператора, каждое прямое слагаемое которого соответствует диагональному блоку матрицы искомого вида.

Таким образом, решить задачу о приведении данного оператора к каноническому виду – это

- найти матрицу канонического вида, соответствующую данному линейному оператору;
- найти базис, в котором матрица данного линейного оператора принимает полученный канонический вид.

3.5.7 Жорданова клетка. Жорданова матрица

Одной из наиболее востребованных в теории и приложениях является так называемая жорданова нормальная форма линейного оператора.

Во всех рассуждениях, касающихся жордановой нормальной формы, мы подразумеваем, что поле k алгебраически замкнуто.

Определение 3.5.5. *Жордановой клеткой размера* m называется квадратная матрица размера m, имеющая следующий вид:

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Понятно, что элемент λ, стоящий на главной диагонали, является собственным значением матрицы $J_m(\lambda)$.

Определение 3.5.6. *Жордановой матрицей* называется блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками на главной диагонали:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{array}\right].$$

Замечание 3.5.7. Жордановы клетки могут быть разных размеров. Может быть несколько жордановых клеток, отвечающих одному и тому же значению λ. Жорданова матрица диагональна в том и только том случае, когда все ее жордановы клетки имеют размер 1.

В определенном смысле жордановы матрицы – следующие по простоте после диагональных. Однако не всякий линейный оператор может быть приведен к диагональному виду, в то время как жорданову форму допускает любой линейный оператор.

Для того чтобы привести данный линейный оператор $\mathcal{A}$ к жордановой нормальной форме, нужно, во-первых, разложить пространство V в прямую сумму $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств $V(\lambda_i)$, каждое из которых соответствует одному и только одному собственному значению λ_i оператора $\mathcal{A}$. Как только такое разложение выполнено, можно ограничить оператор на каждое из построенных подпространств $V(\lambda_i)$ и свести дальнейшее рассмотрение к оператору $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})|_{V(\lambda_i)}$. По построению подпространств $V(\lambda_i)$ будет понятно, что $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})|_{V(\lambda_i)}$ – нильпотентный оператор, и если для него построен жорданов базис пространства $V(\lambda)$, то тот же базис окажется жордановым для оператора $\mathcal{A}|_{V(\lambda)}$.

3.5.8 Корневые подпространства

Заметим, что при ограничении на подпространство, соответствующее жордановой клетке $J_m(\lambda)$, оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ нильпотентен (индекса m). Нильпотентно и ограничение оператора $\mathcal{A}$ на сумму подпространств, соответствующих нескольким жордановым клеткам с фиксированным собственным значением λ.

Определение 3.5.8. Вектор $v \in V$ называется *корневым вектором* оператора $\mathcal{A}$, *отвечающим элементу* $\lambda \in k$, если существует такое $r \in \mathbb{N}$, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r v = 0$.

Понятно, что все собственные векторы, принадлежащие собственному значению λ, являются корневыми.

Упражнение 3.5.9. Докажите, что подмножество

$$V(\lambda) = \{v \in V | v \text{ – корневой вектор, соответствующий } \lambda\}$$

является подпространством в V.

Предложение 3.5.10. *(Корневое подпространство) $V(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Если λ – собственное значение, то найдется собственный вектор v, принадлежащий к λ, и $v \in V(\lambda)$.

Обратно, пусть $V(\lambda) \neq 0$. Выберем любой ненулевой вектор $v \in V(\lambda)$. Тогда найдется такое наименьшее $r \in \mathbb{N}$, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^r v = 0$. Вектор $v' := (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r-1} v$ отличен от нуля по выбору r и является собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ. □

3.5.9 Прямая сумма корневых подпространств

Предложение 3.5.11. *(Разложение в прямую сумму корневых подпространств) $V = \bigoplus_{\lambda_i \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}} V(\lambda_i)$.*

Доказательство. Запишем характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ в виде $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{r_i}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ тогда и только тогда, когда $i \neq j$. Положим $F_i(t) := \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{r_j}$, $\mathcal{A}_i := F_i(\mathcal{A})$, и $V_i := \operatorname{im} \mathcal{A}_i$.

Во-первых, по теореме Гамильтона – Кэли

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r_i} V_i = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r_i} F_i(\mathcal{A}) V = \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) V = 0.$$

Таким образом, $V_i \subset V_{\lambda_i}$.

Во-вторых, $V = V_1 + \cdots + V_s$. Действительно, многочлены $F_i(t), i = \overline{1, s}$ взаимно просты в совокупности, т. е. существуют многочлены $h_i(t)$, $i = \overline{1, s}$, такие что $\sum_{i=1}^{s} F_i(t) h_i(t) = 1$. Подстановка оператора $\mathcal{A}$ приводит к равенству $\sum_{i=1}^{s} F_i(\mathcal{A}) h_i(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Применение его к любому вектору $v \in V$ оставляет разложение $v = \mathcal{E} v = \sum_{i=1}^{s} F_i(\mathcal{A}) h_i(\mathcal{A}) v \in \sum_{i=1}^{s} V_i$.

В-третьих, сумма $V_1 + \cdots + V_s$ прямая. Проверим, что $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = 0$. Пусть $v \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j)$ – произвольный вектор. Поскольку $v \in V_i$, то $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i} v = 0$. Так как $v \in \sum_{j \neq i} V_j$, то $\prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E})^{r_j} v = F_i(\mathcal{A}) v = 0$. Многочлены $(t - \lambda_i)^{r_i}$ и $F_i(t)$ взаимно просты; поэтому найдутся многочлены $X(t), Y(t)$ такие, что $X(t)(t - \lambda_i)^{r_i} + Y(t) F_i(t) = 1$. Подставив в это равенство $\mathcal{A}$ и применив полученное соотношение к v, получим $X(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i} v + Y(\mathcal{A}) F_i(\mathcal{A}) v = X(\mathcal{A}) \cdot 0 + Y(\mathcal{A}) \cdot 0 = v = 0$.

Наконец, осталось доказать, что $V_i = V(\lambda_i)$. Включение $V_i \subset V(\lambda_i)$ уже доказано. Возьмем вектор $v \in V(\lambda_i)$ и представим его в виде суммы $v = v' + v''$, где $v' \in V_i$, $v'' \in \bigoplus_{j \neq i} V_j$. Поскольку $v \in V(\lambda_i)$, то существует такое r', что $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i} v'' = (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{r_i} (v - v') = 0$. Кроме того,

$F_i(\mathcal{A})v'' = 0$. Подставим в тождество $X(t)(t-\lambda_i)^{r'} + Y(t)F_i(t) = 1$ оператор $\mathcal{A}$ и применим полученное соотношение к v'', получим $v'' = 0$, откуда $v = v' \in V_i$. $\square$

Следствие 3.5.12. *(Диагонализируемость: простой спектр) Если линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет простой спектр, то этот оператор диагонализируем.*

Доказательство. В этом случае оператор $\mathcal{A}$ имеет $n = \dim V$ различных собственных значений. Поэтому V разложено в прямую сумму n корневых подпространств $V(\lambda_i)$. Следовательно, все $V(\lambda_i)$ одномерны. $\square$

Теперь можно ограничить оператор $\mathcal{A}$ на каждое из корневых подпространств $V(\lambda_i)$. Тогда достаточно рассматривать лишь операторы с единственным собственным значением и доказывать существование жордановой формы (и строить жорданов базис) только для такого оператора. Жорданов базис для линейного оператора $\mathcal{A}$ на пространстве V может быть построен как объединение жордановых базисов его ограничений на корневые подпространства.

Также заметим, что оператор $\mathcal{A}$, обладающий единственным собственным значением λ, и оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ обладают одинаковыми жордановыми базисами. Минимальный полином оператора $\mathcal{A}$ с единственным собственным значением λ имеет вид $\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda)^s$. Тогда оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ имеет минимальный полином $\mu_{\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}}(t) = t^s$. Иными словами, оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ нильпотентен.

3.5.10 Случай нильпотентного оператора: результат

Предложение 3.5.13. *(Жорданова форма нильпотентного оператора) Нильпотентный оператор $\mathcal{A}$ на конечномерном векторном пространстве V имеет жорданов базис; матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе является объединением жордановых клеток вида $J_r(0)$.*

Эвристические соображения к доказательству. Рассмотрим жорданову клетку с собственным значением 0:

$$J_r(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Тогда действие линейного оператора на базисные векторы инвариантного подпространства, соответствующего этой клетке, имеет вид: $\mathcal{A}e_1 = 0$, $\mathcal{A}e_i = e_{i-1}$ для $i = \overline{2, r}$. При этом вектор e_1 – собственный вектор. Остальные векторы рассматриваемого базиса будем вычислять индуктивно по i как решения уравнений $\mathcal{A}e_i = e_{i-1}$. Их обычно называют *присоединенными*: e_2 – присоединенный высоты 1, e_3 – присоединейнный высоты 2, $\ldots$, e_r – присоединенный высоты $r-1$.

Такой базис по построению жорданов, и его удобно изображать в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] \\
\bullet
\end{tikzcd}$$

Точки означают базисные векторы, стрелки – действия оператора. Если имеется несколько подпространств и соответственно несколько жордановых клеток, то диаграмма для жорданова базиса будет содержать столько же связных компонент (столбцов), которые могут иметь разные высоты. На самом нижнем уровне находятся точки, изображающие собственные векторы, затем – присоединенные векторы высоты 1, и т. д.

3.5.11 Доказательство предложения 3.5.13

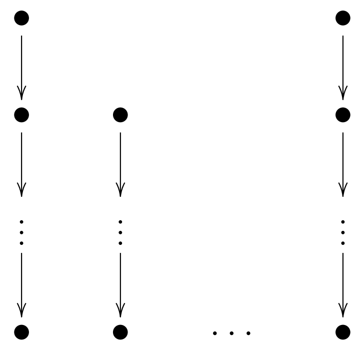
Существование жорданова базиса будем доказывать индукцией по размерности $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то нильпотентный оператор является нулевым и любой ненулевой вектор образует жорданов базис.

Пусть теперь $\dim V = n$, и предложение доказано для всех размерностей меньших, чем n. Обозначим за V_0 подпространство $\ker \mathcal{A}$. Поскольку $\dim V_0 > 0$, то $\dim V/V_0 < n$ и оператор $\mathcal{A}$ индуцирует фактороператор $\mathcal{A}' : V/V_0 \to V/V_0$.

По предположению индукции, оператор $\mathcal{A}'$ имеет жорданов базис, который непуст (иначе $\mathcal{A}'$ – нулевой оператор, и задача тривиальна).

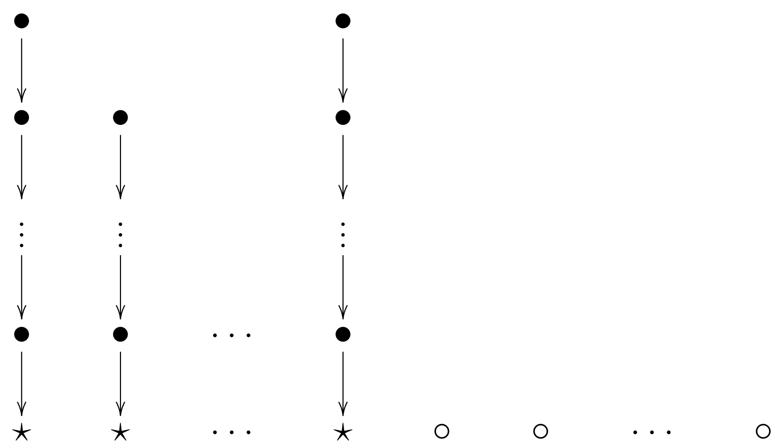
Построим диаграмму D' для жорданова базиса оператора $\mathcal{A}'$.

D'



В каждом столбце возьмем самый верхний вектор $e'_i, i = \overline{1,m}$. Пусть $e'_i = e_i + V_0$; тем самым фиксируем прообразы в пространстве V векторов e'_i из факторпространства V/V_0. Диаграмму из векторов пространства V будем строить так, что для каждого $i = \overline{1,m}$ столбец с номером i состоит (сверху вниз) из $e_i, \mathcal{A}e_i, \ldots, \mathcal{A}^{h_i}e_i$, где h_i – высота i-го столбца диаграммы D'. Поскольку ${\mathcal{A}'}^{h_i}e'_i = 0$, то $\mathcal{A}^{h_i}e_i \in V_0$, и $\mathcal{A}^{h_i+1}e_i = 0$. Прообразы $\mathcal{A}^j e_i$, $j = \overline{0, h_i - 1}$ векторов ${\mathcal{A}'}^j e'_i$ из диаграммы D' изображены темными точками $\bullet$. Эта часть диаграммы D – копия диаграммы D'. Векторы $\mathcal{A}^{h_i}e_i$, принадлежащие подпространству V_0, отмечены звездочками $\star$.

D



Выберем базис линейной оболочки векторов $\mathcal{A}^{h_1}e_1, \ldots, \mathcal{A}^{h_m}e_m$ в подпространстве V_0 и дополним его до базиса в V_0. Дополняющие векторы отмечены светлыми точками $\circ$ в диаграмме D.

Осталось проверить, что элементы диаграммы D действительно образуют базис в V. Во-первых покажем, что линейная оболочка векторов из D совпадает с пространством V. Пусть $v \in V$ – произвольный вектор; тогда его класс в факторпространстве V/V_0 равен $v' = v + V_0$, и по предположению индукции имеет место разложение $v' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{h_i-1} \alpha'_{ij}{\mathcal{A}'}^j e'_i$. В силу $\mathcal{A}$-инвариантности подпространства V_0 имеет место включение $v - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{h_i-1} \alpha'_{ij}\mathcal{A}^j e_i \in V_0$. Однако все векторы $\mathcal{A}^j e_i$ при $j \le h_i - 1$

расположены в строках диаграммы D, начиная со второй снизу. Подпространство V_0 порождено векторами первой строки по построению.

Во-вторых, векторы диаграммы D линейно независимы. Сначала заметим, что элементы нижней строки линейно независимы. Действительно, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна 0, то она имеет вид $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{A}^{h_i}e_i = 0$, поскольку остальные элементы нижней строки дополняют базис линейной оболочки $\langle\mathcal{A}^{h-1}e_1,\ldots,\mathcal{A}^{h_m}e_m\rangle$ до базиса подпространства V_0. Однако все показатели $h_i \geq 1$, поэтому

$$\mathcal{A}(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{A}^{h_i-1}e_i) = 0,$$

так что $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{A}^{h_i-1}e_i \in V_0$ и $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathcal{A}'^{h_i-1}e_i' = 0$. Из последнего соотношения сразу же имеем $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, т. к. векторы $\mathcal{A}'^{h_i-1}e_i'$ составляют нижнюю строку в D' и являются частью базиса в факторпространстве V/V_0.

В-третьих, из любой нетривиальной равной 0 линейной комбинации векторов диаграммы D можно получить нетривиальное линейное соотношение на векторы нижней строки. Отметим на диаграмме D те векторы, которые вошли в нетривиальную равную 0 линейную комбинацию с коэффициентами, отличными от 0. Пусть самая верхняя строка диаграммы D, содержащая отмеченный вектор, имеет номер h, считая снизу. Применив оператор $\mathcal{A}^h$, получим, что часть линейной комбинации, содержащая только векторы h-й строки, перейдет в нетривиальную линейную комбинацию векторов первой строки. Остальные векторы отобразятся в 0. Предложение доказано.

3.5.12 Единственность жордановой нормальной формы

Пусть фиксирован произвольный жорданов базис для оператора $\mathcal{A}$. Каждый диагональный элемент λ матрицы A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе является одним из собственных значений.

Рассмотрим часть базиса, отвечающую всем блокам матрицы с диагональными элементами, равными λ; пусть V_λ – ее линейная оболочка. Поскольку $(J_r(\lambda) - \lambda E)^r = 0$, то $V_\lambda \subset V(\lambda)$, где $V(\lambda)$ – корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ. Кроме того, по определению жорданова базиса $V = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V_\lambda$ и по теореме о прямой сумме корневых подпространств $V = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V(\lambda)$. Таким образом, $V_\lambda = V(\lambda)$ для всех собственных значений λ. При этом сумма размеров жордановых клеток и само подпространство V_λ для каждого λ не зависит от выбора жорданова базиса, Таким образом, достаточно доказать единственность жордановой формы для одного подпространства $V = V(\lambda)$ и даже для $V = V(0)$.

Размер жордановой клетки равен высоте соответствующего ей столбца в диаграмме D. Расположим столбцы в порядке убывания. Тогда высоты столбцов однозначно определятся, если известны длины строк диаграммы D, начиная с нижней строки, в порядке убывания.

Убедимся в том, что длина нижней строки равна $\dim V_0$. Возьмем любой собственный вектор $v \in V$ и представим его в виде линейной комбинации векторов из D. При этом векторы из строк выше первой войдут в эту линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами. Действительно, если бы самые высокие векторы с ненулевыми коэффициентами принадлежали строке с номером $h \geq 2$, то вектор $\mathcal{A}^{h-1}v$ был бы нетривиальной линейной комбинацией элементов нижней строки в D, что противоречит их линейной независимости. Таким образом, нижняя строка образует базис в V_0, ее длина равна $\dim V_0$ и одинакова для всех жордановых базисов. Точно так же длина второй строки равна $\dim\ker(\mathcal{A}')^2$ в V/V_0, и т. д. для всех строк.

3.5.13 Алгоритм приведения матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме

Здесь приводится один из возможных алгоритмов вычисления жордановой формы матрицы линейного оператора и его жорданова базиса. Он пригоден, в частности, для вычислений "вручную" и с матрицами любых порядков.

1. Вычислить характеристический полином и его корни.

2. Для каждого собственного значения λ вычислить количество и размеры соответствующих ему жордановых клеток. Количество дается числом линейно независимых собственных векторов, принадлежащих к данному λ, т. е. числом $\dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Это же длина первой строки. Длина второй строки равна

   $$\dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 - \dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}),$$

   длина третьей строки –

   $$\dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^3 - \dim\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$$

   и т. д.

3. Построить жорданову матрицу J.

   Для отыскания жорданова базиса необходимо решить матричное уравнение $AX = XJ$. Среди его решений найдутся невырожденные матрицы X; достаточно взять любую из них. Матричное уравнение $AX = XJ$ для матриц размера n приводит к системе n^2 линейных уравнений с n^2 неизвестными, среди решений которой необходимо выбрать невырожденную матрицу, что в совокупности достаточно трудоемко. Поэтому для вычисления матрицы X для каждого корневого подпространства $V(\lambda)$ выполняют следующее.

4. Если пространство решений системы $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x = 0$ одномерно, то в качестве базисного вектора x_0 первой строки выбирают любой ненулевой вектор. Если пространство решений имеет размерность большую чем 1, строят фундаментальную систему решений $e_1^0, \ldots, e_s^0$. Базисные векторы первой строки имеют вид линейных комбинаций $x_0 = \alpha_1 e_1^0 + \cdots + \alpha_s e_s^0$, коэффициенты которых подлежат определению.

5. Выбирают жорданову клетку максимального размера, соответствующую собственному значению λ. Пусть ее размер равен h. Вычисляют присоединенный вектор x_{h-1} высоты $h - 1$ как решение системы $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{h-1} x_{h-1} = x_0$. Если вектор x_0 зависит от неопределенных коэффициентов α_i, то поступают следующим образом. Используя критерий совместности системы (теорема Кронеккера – Капелли), находят те значения α_i, при которых система $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{h-1} x_{h-1} = x_0$ имеет решения. В качестве x_{h-1} выбирают любую фундаментальную систему ее решений. Ее ранг равен числу жордановых клеток размера h с данным λ.

6. Присоединенные векторы промежуточных высот находят "спуском" высшего вектора: $x_i = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{h-1-i} x_{h-1}$. Базис подпространства, соответствующего выбранной клетке, имеет вид $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$.

7. Выбирают жорданову клетку, следующую по размеру за наибольшей клеткой. Пусть размер выбранной клетки равен l. Вычисляют присоединенный вектор x'_{l-1} высоты $l - 1$ как решение системы $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{l-1} x_{l-1} = x'_0$, где x'_0 – собственный вектор. Если вектор x'_0 зависит от неопределенных коэффициентов α_i, то находят те значения α_i, при которых система $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{l-1} x'_{l-1} = x'_0$ имеет решения. В качестве x'_{l-1} выбирают любую подсистему ее решений, которая при объединении с ранее найденными присоединенными векторами той

же высоты образует линейно независимую систему. Ранг найденной подсистемы равен числу жордановых клеток размера l с данным λ.

8. Присоединенные векторы промежуточных высот находят "спуском" высшего вектора: $x'_i = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{l-1-i} x'_{l-1}$.

9. Выбирается следующая по размеру клетка и т. д.

3.5.14 Степень линейного оператора и дробление жордановых клеток

Исследуем вопрос о том, как меняется жорданова нормальная форма линейного оператора при возведении его в степень. Для этого достаточно ограничиться случаем, когда жорданова форма оператора $\mathcal{A}$ состоит из одной жордановой клетки. Ясно, что в этом случае оператор $\mathcal{A}$ обладает одним собственным значением; пусть оно равно λ.

Возводя жорданову клетку размера r в квадрат, получаем верхнетреугольную матрицу следующего вида (проверьте!)

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}. \tag{3.5.3}$$

Отсюда сразу же следует, что оператор $\mathcal{A}^2$ так же, как и оператор $\mathcal{A}$, обладает одним собственным значением. Собственное значение оператора $\mathcal{A}^2$ равно λ^2.

Осталось вычислить количество и размер жордановых клеток для оператора $\mathcal{A}^2$. Число клеток поставляется количеством линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ^m. Для этого необходимо найти размерность пространства решений матричного уравнения $(J_r^2(\lambda) - \lambda^2)X = 0$. Для нее реализуется один из следующих случаев:

1. При $2\lambda \neq 0$ фундаментальная система решений образована одним собственным вектором, и квадрат линейного оператора состоит из одной жордановой клетки размера r.

2. При $2\lambda = 0$ (это может быть либо при $\lambda = 0$, либо если характеристика основного поля равна 2) фундаментальная система решений состоит из двух собственных векторов оператора $\mathcal{A}^2$. В этом случае имеет место *дробление жордановой клетки*, поскольку квадрат линейного оператора имеет две клетки.

Для вычисления размеров жордановых клеток, полученных в результате дробления, обратимся к вычислению собственного и присоединенных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть v – собственный вектор ("присоединенный высоты нуль"), являющийся решением уравнения $(A-\lambda)X=0$. Понятно, что при $2\lambda = 0$ верна цепочка равенств

$$(A-\lambda)^2 X = (A^2-\lambda^2)X = 0,$$

откуда следует, что вектор v, собственный для оператора $\mathcal{A}$, также оказывается собственным и для его квадрата.

Теперь рассмотрим присоединенный вектор v_1 высоты 1, удовлетворяющий неоднородному уравнению $(A-\lambda)X = v$. Применив оператор $\mathcal{A}-\lambda$, получим $(A-\lambda)^2X = (A^2-\lambda^2)X = (A-\lambda)v = 0$. Иными словами, вектор v_1, являющийся присоединенным высоты 1 для оператора $\mathcal{A}$, является собственным для его квадрата (и порождает вторую жорданову клетку!). Продолжая такой анализ индуктивно по высоте, получим следующее правило сортировки: в последовательности присоединенных векторов $v = v_0, v_1, \ldots, v_{2l}, v_{2l+1}, \ldots, v_{r-1}$ для оператора $\mathcal{A}$ векторы с четными номерами составляют базис подпространства, отвечающего первой клетке для оператора $\mathcal{A}^2$, а векторы с нечетными номерами – базис подпространства, отвечающего второй клетке. Таким образом, клетка четного размера $r = 2m$ дробится на две клетки равных размеров, клетка нечетного размера – на две клетки размеров $m+1$ и m соответственно.

Упражнение 3.5.14. Убедитесь в том, что, возводя жорданову клетку размера r в степень m, получаем верхнетреугольную матрицу следующего вида

$$\begin{bmatrix} \lambda^m & C_m^1\lambda^{m-1} & C_m^2\lambda^{m-2} & \ldots & C_m^l\lambda^{m-l} & \ldots & C_m^{m-1}\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^m & C_m^1\lambda^{m-1} & \ldots & C_m^{l-1}\lambda^{m-l+1} & \ldots & C_m^{m-2}\lambda^2 & C_m^{m-1}\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^m & \ldots & C_m^{l-2}\lambda^{m-l+2} & \ldots & C_m^{m-3}\lambda^3 & C_m^{m-2}\lambda^2 & C_m^{m-1}\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^m \end{bmatrix}$$

Что можно сказать о собственных значениях оператора $\mathcal{A}^m$? Проанализируйте возможности дробления жордановых клеток для $m = 3$.

Глава 4

Двойственность

В этой главе мы введем и изучим новое понятие векторного пространства, двойственного к данному. Оно является инструментом, удобным для вывода ряда теоретических результатов и вычислительных алгоритмов. Кроме того, понятие двойственного пространства является одной из составляющих математического аппарата квантовой физики (так называемые "координатное" и "импульсное" представления в квантовомеханических вычислениях). Однако для квантовомеханических приложений необходима замена произвольного конечномерного векторного пространства бесконечномерным $\mathbb{C}$-векторным пространством функций с интегрируемым квадратом абсолютной величины. Вместе с тем рассматриваемый конечномерный случай служит хорошей моделью и для этой ситуации.

4.1 Двойственные пространства и двойственные гомоморфизмы

4.1.1 Двойственное пространство

Пусть V – k-векторное пространство.

Определение 4.1.1. Векторное пространство $V^\vee := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ называется *векторным пространством, двойственным к* V (или *дуальным к* V).

Понятно, что элементами двойственного векторного пространства являются гомоморфизмы $f : V \to k$ как векторных пространств; такие гомоморфизмы часто называются *линейными функциями* (или *линейными функционалами*) на исходном векторном пространстве V. Напомним, что сложение линейных функций и умножение их на скаляры из поля k определяется *поточечно* по формулам

$$\forall f_1, f_2 \in V^\vee,\ \forall v \in V\ \ (f_1+f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v);$$
$$\forall f \in V^\vee,\ \forall v \in V,\ \forall \alpha \in k\ \ (\alpha f)(v) := \alpha(f(v)).$$

4.1.2 Линейные функции

Пусть $f : V \to k$ – линейная функция, т. е. элемент $f \in V^\vee$. Будем считать, что размерность пространства V конечна и равна $\dim_k V = n$. Выберем какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_n$. Он поставляет координатное представление любого вектора $v = \sum_{i=1}^n e_i x_i$. Вычисляя значение функции f на векторе v и используя линейность функции f, получаем

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^n e_i x_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) x_i.$$

Заметим, что базис $e_1, \ldots, e_n$ снабжает функцию f "паспортными данными" – набором элементов основного поля $(f^1, \ldots, f^n)$, вычисляемых как образы базисных векторов по формулам $f^i = f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Обратно, в том же фиксированном базисе, выбрав элементы $(f^1, \ldots, f^n)$, $f^i \in k$, получим однозначно определенную линейную функцию

$$f : V \to k :\ \ v = \sum_{i=1}^n e_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^n f^i x_i.$$

Тем самым фиксация базиса векторного пространства V определяет биекцию $V^\vee \xrightarrow{\sim} k^n$, которая на самом деле является изоморфизмом векторных пространств.

Упражнение 4.1.2. Убедитесь в этом.

Объединяя полученный результат с теоремой классификации векторных пространств, имеем следующую теорему.

Теорема 4.1.3. *(Изоморфизм на двойственное пространство) Для любого конечномерного векторного пространства V имеет место (неканонический!) изоморфизм $V \cong V^\vee$ и, следовательно, равенство размерностей $\dim_k V = \dim_k V^\vee = n$.*

Замечание 4.1.4. Важно, что, хотя пространства, указанные в формулировке теоремы, изоморфны, отождествляющий их изоморфизм зависит от выбора базиса. В действительности таких изоморфизмов, т. е. соответствий $v \mapsto f$ между элементами пространств V и $V^\vee$, может быть построено много. При этом невозможно указать среди них изоморфизм, выделенный среди всех остальных в силу строения рассматриваемых алгебраических структур. Если в рассматриваемой алгебраической ситуации такой выделенный изо-, гомоморфизм существует, то его называют *каноническим*. Все остальные изо-, гомоморфизмы между теми же алгебраическими структурами тогда называются *неканоническими*. Как правило, неканонические изо-, гомоморфизмы зависят от выбора некоторых объектов (например, базисных векторов, как в только что описанной ситуации).

4.1.3 Двойственный гомоморфизм

Нетрудно выяснить, что происходит с гомоморфизмами векторных пространств при формировании двойственных пространств. Пусть $\phi : V_1 \to V_2$ – гомоморфизм k-векторных пространств; тогда любому гомоморфизму $f_2 : V_2 \to k$ ставится в соответствие композиция $f_1 := \phi \circ f_2 : V_1 \to k$. Это построение выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dotted, "f_1"'] & V_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & k \end{tikzcd}$$

для каждого элемента $f_2 \in V_2^\vee$. Таким образом, определено отображение $\phi^\vee : V_2^\vee \to V_1^\vee, f_2 \mapsto f_1 = \phi \circ f_2$. Непосредственная проверка показывает, что $\phi^\vee$ – гомоморфизм векторных пространств.

Упражнение 4.1.5. Убедитесь в том, что $\phi^\vee$ – гомоморфизм векторных пространств.

4.1.4 Композиции и диаграммы

Далее, построение коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"] & V_2 \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl] \\ k & V_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

показывает, что имеет место следующее правило для гомоморфизма, двойственного к композиции:

$$(\psi \circ \phi)^\vee = \phi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Таким образом, "двойственность обращает стрелки в коммутативных диаграммах":

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & V_2 \arrow[d, "\psi"] \\ & V_3 \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} V_1^\vee & V_2^\vee \arrow[l, "\phi^\vee"'] \\ & V_3^\vee \arrow[ul, "(\psi\circ\phi)^\vee"] \arrow[u, "\psi^\vee"'] \end{tikzcd}$$

4.2 Двойственная точная последовательность и двойственные базисы

4.2.1 Базис в $V^\vee$

Покажем, как, имея базис в пространстве V, построить базис в двойственном пространстве $V^\vee$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – какой-нибудь базис пространства V. Как было показано ранее, любая линейная на V функция $f \in V^\vee$ определяется набором ее значений на базисных векторах: $f^i := f(e_i)$. Поэтому можно сконструировать набор из n линейных функций

$$e^1 : \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e^2 : \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ldots;$$
$$e^i : \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ldots; \quad e^n : \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.2.1}$$

То же самое может быть записано в сокращенной форме:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \tag{4.2.2}$$

где δ^i_j – символ Кронеккера, принимающий значение 1 при $i = j$ и значение 0 в противном случае.

Легко заметить, что функции (4.2.1) линейно независимы. Применив теорему 4.1.3, видим, что их количество равно размерности двойственного пространства $V^\vee$. Таким образом, функции (4.2.1) составляют базис пространства $V^\vee$.

Замечание 4.2.1. Очевидно, такой базис в пространстве $V^\vee$ можно построить, используя *любой* базис пространства V.

Определение 4.2.2. Базис $e^1, \dots, e^n$ пространства $V^\vee$, удовлетворяющий соотношениям (4.2.1) (или, что равносильно, (4.2.2)), называется *двойственным* (или *дуальным*) к базису $e_1, \dots, e_n$ пространства V.

4.2.2 Смена базисов: "ко" и "контра"

Пусть в пространстве V выбраны два базиса: $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$, причем линейное выражение векторов (нового) базиса e'_i через векторы (старого) базиса e_j имеет вид:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.2.3}$$

Если интерпретировать коэффициенты a_{ji} как элементы матрицы с обычным расположением индексов (первый индекс нумерует строки, второй – столбцы), то такая *матрица перехода* $A = (a_{ji})_1^n$ устроена следующим образом: *ее столбцы образованы координатами нового базиса в старом.* Произвольный вектор $x \in V$ имеет разложение $x = \sum_{j=1}^n e_j x_j$ в базисе e_j и разложение $x = \sum_{i=1}^n e'_i x'_i$ в базисе e'_i. Подстановка (4.2.3) приводит к соотношениям

$$x = \sum_{i=1}^{n} e'_i x'_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} e_j a_{ji} x'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j.$$

Из однозначности разложения вектора по базису заключаем, что $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i$. В матричных обозначениях координаты векторов обычно интерпретируются как *векторы-столбцы*, и можно написать

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \; X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}, \; X = AX' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим линейную функцию $f : V \to k$; ее значение на векторе $x \in V$ можно вычислить двумя способами:

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^{n} e'_j x'_j) = \sum_{j=1}^{n} f^j x_j \;\text{ в старом базисе и}$$

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} e_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} f'^i x'_i \;\text{ в новом базисе.}$$

Выполнив подстановку равенства $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$, получим соотношения $\sum_{j=1}^n f^j x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^j a_{ji}x'_i = \sum_{i=1}^n f'^i x'_i$, верные при любых x'_i, $i = \overline{1,n}$. Отсюда заключаем, что $\sum_{j=1}^n f^j a_{ji} = f'^i$. Интерпретируя последовательность коэффициентов линейной функции как *вектор-строку*, можно записать

$$F^T = \left[\begin{array}{cccc} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{array}\right], F'^T = \left[\begin{array}{cccc} f'^1 & f'^2 & \dots & f'^n \end{array}\right],$$

$$F'^T = F^T A = \left[\begin{array}{cccc} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right],$$

т. е. коэффициенты линейной функции преобразуются при смене базиса так же, как сами базисные векторы. Такое преобразование называют *ковариантным* в отличие от преобразования координат векторов, которое называется *контравариантным* и имеет матричную запись $X = AX'$. Поэтому линейные функции как элементы двойственного пространства иногда называют *ковекторами*, в отличие от элементов самого векторного пространства V, которые по-прежнему называют просто *векторами*.

4.2.3 Гомоморфизмы в двойственных базисах

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ векторного пространства V, базис $g_1, \dots, g_m$ векторного пространства W, а также двойственные базисы $e^1, \dots, e^n$ и $g^1, \dots, g^m$ двойственных векторных пространств $V^\vee$ и $W^\vee$ соответственно. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ – гомоморфизм; тогда *двойственный* гомоморфизм $f^\vee$ определяется следующим образом. Для всякой линейной функции $w^\vee \in W^\vee$ ее образ $f^\vee(w^\vee)$ определяется как композиция $f^\vee(w^\vee) := w^\vee \circ f$ согласно диаграмме

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^\vee(w^\vee)"'] & & W \arrow[dl, "w^\vee"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Понятно, что указанное соответствие поставляет гомоморфизм из $W^\vee$ в $V^\vee$, который и будем обозначать символом $f^\vee$.

Тогда возьмем в качестве $w^\vee$ базисный элемент $g^i : g_j \mapsto \delta^i_j$, $j = \overline{1,m}$. Здесь по-прежнему δ^i_j– символ Кронеккера. Пользуясь определением двойственного гомоморфизма, имеем $f^\vee(g^i) = w^\vee \circ f : f(g_j) \mapsto \delta^i_j$.

Пусть $w^\vee$ имеет в базисе $g^1, \dots, g^m$ координатное представление

$w^\vee = \sum_i y_i g^i$; тогда образ этого вектора $f^\vee(w^\vee)$ допускает выражение

$$f^\vee(w^\vee) = f^\vee(\sum_i y_i g^i) = \sum_i y_i f^\vee(g^i) = \sum_i y_i(g^i \circ f).$$

Возьмем произвольный вектор $v = \sum_j x_j e_j \in V$ и вычислим значение функции $f^\vee(w^\vee)$ на этом векторе:

$$f^\vee(w^\vee)(v) = \sum_i \sum_j y_j(g^i \circ f)(x_j e_j) = \sum_i \sum_j y_i g^i \circ f(e_j)x_j.$$

Теперь заметим, что если известна матрица $F = (f_{rs})$ гомоморфизма f в паре базисов $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_m$, то $f(e_j) = \sum_l e_l f_{lj}$, и тогда

$$\begin{aligned} f^\vee(w^\vee)(v) &= \sum_i \sum_j y_i g^i \circ f(e_j)x_j = \sum_i \sum_j y_i g^i(\sum_l e_l f_{lj})x_j \\ &= \sum_i \sum_j \sum_l y_i g^i(e_l) f_{lj} x_j = \sum_i \sum_j \sum_l y_i \delta^i_l f_{lj} x_j. \end{aligned}$$

Выполняя суммирование по l, приходим к выражению

$$f^\vee(w^\vee)(v) = \sum_i \sum_j \sum_l y_i f_{ij} x_j$$

или, в матричной форме,

$$f^\vee(w^\vee)(v) = Y^T F X,$$

где X – столбец координат вектора v, Y^T – строка координат функции $w^\vee$. Пользуясь ассоциативностью матричного умножения, можно переписать выражение $f^\vee(w^\vee)(v)$ иначе:

$$f^\vee(w^\vee)(v) = (Y^T F)X = \sum_i \sum_j \sum_l (y_i f_{ij})x_j =$$

$$\sum_i \sum_j \sum_l y_i(f_{ij}x_j) = Y^T(FX) = w^\vee(f(v)).$$

Иными словами, двойственный гомоморфизм $f^\vee$ осуществляет соответствие $Y^T \mapsto Y^T F$ или, если координаты функции писать в столбец как координаты вектора, $Y \mapsto F^T Y$.

Предостережение. Указанное соответствие между матрицами гомоморфизма и двойственного к нему имеет место *только в случае, когда в пространствах V и $V^\vee$ выбраны двойственные базисы и в пространствах W и $W^\vee$ тоже выбраны двойственные базисы.* В произвольных базисах зависимость получается более сложной.

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ векторного пространства V, а также двойственный базис $e^1, \dots, e^n$ двойственного векторного пространства $V^\vee$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_k V$ – линейный оператор на векторном пространстве V; тогда *двойственный* линейный оператор $\mathcal{A}^\vee$ определяется следующим образом. Для всякой линейной функции $v^\vee \in V^\vee$ ее образ $\mathcal{A}^\vee(v^\vee)$ определяется как композиция $\mathcal{A}^\vee(v^\vee) := \mathcal{A} \circ v^\vee$ согласно диаграмме

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "\mathcal{A}^\vee(v^\vee)"'] & & V \arrow[dl, "v^\vee"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Понятно, что указанное соответствие поставляет линейный оператор на пространстве $V^\vee$, двойственном к V, который и будем обозначать символом $\mathcal{A}^\vee$.

4.2.4 Инъективность, сюръективность и двойственность

Пусть $f : V \to W$ – гомоморфизм векторных пространств; $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ – двойственный гомоморфизм.

Теорема 4.2.3. *(Дуализация гомоморфизмов) Если f сюръективен, то $f^\vee$ инъективен. Если f инъективен, то $f^\vee$ сюръективен.*

Доказательство. Пусть $f : V \to W$ – сюръективный гомоморфизм; рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "v^\vee"'] & W \arrow[d, "w^\vee"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Пусть $v^\vee = 0$; тогда поскольку $f(V) = W$, то $w^\vee = 0$, что доказывает инъективность $f^\vee$.

Пусть теперь f – инъективный гомоморфизм. Тогда выберем в W прямое дополнение U к образу $f(V) \cong V$. Для любого $v^\vee : V \to k$ построим гомоморфизм $w^\vee := (v^\vee, 0) : f(V) \oplus U \to k$, определяемый отображениями прямых слагаемых. Понятно, что $w^\vee \in (f^\vee)^{-1}(v^\vee)$, что доказывает сюръективность $f^\vee$. □

4.2.5 Двойственность и точная последовательность

Теорема 4.2.4. *(Двойственная точная последовательность) Если*

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

– точная последовательность векторных пространств, то двойственная последовательность $0 \to W^\vee \to V^\vee \to U^\vee \to 0$ тоже точна.

Доказательство. Применив к точной тройке $0 \to U \to V \to W \to 0$ предложение 2.4.2 о прямых дополнениях, перепишем ее в виде

$$0 \to U \to U \oplus W \to W \to 0. \tag{4.2.4}$$

Дуализация этой последовательности дает

$$0 \to W^\vee \to U^\vee \oplus W^\vee \to U^\vee \to 0.$$

Изоморфизм $V^\vee \cong U^\vee \oplus W^\vee$ поставляется выбором базисов, двойственных к базисам, задающим расщепление (4.2.4). $\square$

Теорема 4.2.5. *(Двойственность и инвариантные подпространства) Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ обладает инвариантным подпространством $U \subset V$ размерности d, тогда двойственный оператор $\mathcal{A}^\vee$ обладает инвариантным подпространством дополнительной размерности $n - d$.*

Доказательство. Инвариантное подпространство U приводит к точной диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}|_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & V/U \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\mathcal{A}}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] & V/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Формирование двойственных пространств и двойственных гомоморфизмов приводит к точной диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (V/U)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\mathcal{A}}^\vee"'] & V^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{A}^\vee"'] & U^\vee \arrow[r] \arrow[d, "(\mathcal{A}|_U)^\vee"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (V/U)^\vee \arrow[r] & V^\vee \arrow[r] & U^\vee \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\square$

Следствие 4.2.6. *(Инвариантное прямое разложение и двойствен ность) Если $V = U \oplus W$ – $\mathcal{A}$-инвариантное прямое разложение, то $V^\vee = U^\vee \oplus W^\vee$ – $\mathcal{A}^\vee$-инвариантное прямое разложение.*

Доказательство. Для доказательства достаточно обратить стрелки в точных последовательностях предыдущего доказательства. $\square$

4.3 Каноническое спаривание и его невырожденность

4.3.1 Каноническое спаривание

Пусть V – k-векторное пространство, $V^\vee = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ – двойственное к нему векторное пространство. По определению это векторное пространство, образованное k-значными линейными функциями на пространстве V. Тогда определено отображение (вычисления) $c : V^\vee \times V \to k$, ставящее в соответствие каждой линейной функции $x^\vee : V \to k$, $x^\vee \in V^\vee$ и каждому вектору $y \in V$ значение $x^\vee(y)$, принимаемое функцией $x^\vee$ на векторе y. Понятно, что построенное отображение *линейно относительно функций и линейно относительно векторов.*

Определение 4.3.1. Отображение c называется *каноническим спариванием.*

Чтобы понять, как устроено каноническое спаривание, выберем в пространствах V и $V^\vee$ пару двойственных базисов: $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве V и $e^1, \ldots, e^n$ в пространстве $V^\vee$. По определению двойственного базиса имеем $c(e^i, e_j) = e^i(e_j) = \delta^i_j$. Теперь возьмем произвольную функцию $x^\vee \in V^\vee$; в базисе $e^1, \ldots, e^n$ она имеет координатное представление $x^\vee = \sum_{i=1}^n x^i e^i$. Также выберем какой-нибудь вектор $y \in V$, который имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ координатное представление $y = \sum_{i=1}^n e_j y_j$. Вычислим значение канонического спаривания на паре $(x^\vee, y)$:

$$\begin{aligned} c(x^\vee, y) = c(\sum_{i=1}^n x^i e^i, \sum_{i=1}^n e_j y_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i e^i(e_j) y_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i \delta^i_j y_j = \sum_{i=1}^n x^i y_i. \end{aligned}$$

В матричной записи полученный результат имеет вид

$$c(x^\vee, y) = X^T E Y = X^T Y,$$

и можно заметить, что *в паре двойственных базисов каноническое спаривание задается единичной матрицей E.*

4.3.2 Невырожденность канонического спаривания

Теперь выберем в пространствах V, $V^\vee$ произвольные (не обязательно двойственные) базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $g^1, \ldots, g^n$. Тогда для функции $x^\vee = \sum_{i=1}^n x^i g^i$ и вектора $y = \sum_{j=1}^n e_j y_j$ получим

$$c(x^\vee, y) = c(\sum_{i=1}^n x^i g^i, \sum_{i=1}^n e_j y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i g^i(e_j) y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i c^i_j y_j.$$

Теперь выполним в пространстве $V^\vee$ замену базиса, выбрав в качестве нового базис $e^1, \ldots, e^n$, двойственный к базису $e_1, \ldots, e_n$. Тогда $x^\vee = \sum_{i=1}^n x^i g^i = \sum_{l=1}^n x'^l e^l$, и имеют место соотношения $g^i = \sum_{l=1}^n \overline{a}^{il} e^l$, а для координат $x^i = \sum_{l=1}^{n} x'^l a^{li}$. Здесь символами $\overline{a}^{il}$ обозначены элементы матрицы, обратной к матрице a^{il}. Подстановка этих соотношений в выражение для $c(x^\vee, y)$ дает

$$c(x^\vee, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i c^i_j y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x'^l a^{li} c^i_j y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x'^i \delta^i_j y_j.$$

Последний знак равенства справедлив, поскольку координаты $x^\vee$ и y берутся в двойственных базисах. Отсюда имеем $\sum_{i=1}^{n} a^{li} c^i_j = \delta^l_j$. Это означает, что матрица $C = (c^i_j)$ невырожденная. Поэтому говорят, что каноническое спаривание также является невырожденным.

Упражнение 4.3.2. Докажите, что значение $c(x^\vee, y)$, вычисляемое по координатам векторов $x^\vee \in V^\vee$ и $y \in V$, не зависит от выбора базисов в пространствах V и $V^\vee$. Это объясняет, почему рассматриваемое спаривание называют каноническим.

Замечание 4.3.3. В различных задачах алгебры могут возникать похожие отображения вида $V^\vee \times V \to k$, линейные по каждому из сомножителей. В произвольных базисах пространств $V^\vee$ и V такие отображения тоже вычисляются в координатах как $(x^\vee, y) \mapsto X^T C Y$ и их тоже называют спариваниями. Нетрудно доказать, что ранг матрицы C не зависит от выбора базисов в пространствах V и $V^\vee$. Если ранг матрицы C равен размерности пространств V и $V^\vee$, то спаривание невырожденное. В противном случае спаривание вырождено.

4.3.3 Рефлексивность векторных пространств

Пусть $V^{\vee\vee}$ – двойственное векторное пространство к $V^\vee$. Оно определяется как пространство линейных k-значных функций на $V^\vee$ и часто называется *дважды двойственным* к векторному пространству V.

Теорема 4.3.4. *(Рефлексивность векторных пространств) Для любого конечномерного векторного пространства V существует канонической изоморфизм $\varepsilon : V \to V^{\vee\vee}$, который для любого $x \in V$ и для любой функции $f \in V^\vee$ определяется соотношением $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$, где ε_x определяется равенством $\varepsilon_x(f) = f(x)$.*

Определение 4.3.5. Свойство конечномерных векторных пространств, заключенное в существовании канонического изоморфизма $V \cong V^{\vee\vee}$, называется *рефлексивностью.*

Благодаря рефлексивности векторных пространств дважды двойственное пространство $V^{\vee\vee}$ отождествляется с исходным векторным пространством V, и пространство V можно считать пространством k-значных линейных функций на $V^{\vee}$. В частности, для любого базиса в пространстве $V^{\vee}$ существует единственный двойственный к нему базис в пространстве V.

Доказательство. Поскольку отображение ε определено без использования базисов, то это каноническое отображение. Убедимся в том, что это гомоморфизм векторных пространств. Для этого рассмотрим линейную комбинацию $\alpha x+\beta y$ векторов $x, y \in V$ и вычислим $\varepsilon(\alpha x+\beta y)$. Рассмотрим выражение

$$\varepsilon_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha\varepsilon_x(f)+\beta\varepsilon_y(f).$$

Отсюда $\varepsilon_{\alpha x+\beta y}=\alpha\varepsilon_x+\beta\varepsilon_y$ и, наконец, $\varepsilon(\alpha x+\beta y)=\alpha\varepsilon(x)+\beta\varepsilon(y)$.

Теперь докажем, что канонический гомоморфизм ε осуществляет биекцию, т. е. является изоморфизмом. Для этого выберем в пространстве V базис $e_1,\ldots,e_n$, а в пространстве $V^{\vee}$ – двойственный базис $e^1,\ldots,e^n$. Имеем $\varepsilon_{e_i}(e^j)=e^j(e_i)=\delta_i^j$. Тем самым $V^{\vee\vee}=\langle\varepsilon_{e_1},\ldots,\varepsilon_{e_n}\rangle$, т. е. $\varepsilon_{e_1},\ldots,\varepsilon_{e_n}$ – базис пространства $V^{\vee\vee}$, двойственный к базису $e^1,\ldots,e^n$. $\square$

4.3.4 Другое доказательство теоремы 4.3.4

Альтернативное доказательство. Выберем какие-нибудь два базиса в пространстве V; пусть они соответствует коммутативной диаграмме изоморфизмов (согласно (1.7.2))

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\epsilon'"] & \\ k^n \arrow[r, "A^{-1}"'] & k^n \end{tikzcd}$$

Тогда двойственные к ним базисы в двойственном пространстве порождают коммутативную диаграмму (убедитесь в этом!)

$$\begin{tikzcd} V^{\vee} & \\ k^n \arrow[u, "\epsilon^{\vee}"] & k^n \arrow[l, "(A^{-1})^{\vee}"] \arrow[ul, "\epsilon'^{\vee}"'] \end{tikzcd}$$

Выполняя дуализацию еще раз, получим

$$\begin{tikzcd}
V^{\vee\vee} \arrow[d, "\epsilon^{\vee\vee}"'] \arrow[dr, "(\epsilon')^{\vee\vee}"] & \\
k^n \arrow[r, "(A^{-1})^{\vee\vee}"'] & k^n
\end{tikzcd}$$

Заметим, что горизонтальный морфизм осуществляет умножение столбца координат X слева на матрицу $((A^{-1})^T)^T = A^{-1}$. Искомый изоморфизм определим диаграммой

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\epsilon"'] & V^{\vee\vee} \arrow[d, "\epsilon^{\vee\vee}"] \\
k^n \arrow[r, "\mathrm{id}"] & k^n
\end{tikzcd}$$

Его каноничность следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[d, "\epsilon"'] \arrow[ddr, "\epsilon'"] & & V^{\vee\vee} \arrow[d, "\epsilon^{\vee\vee}"'] \arrow[ddr, "\epsilon'^{\vee\vee}"] & \\
k^n \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "A^{-1}"'] & & k^n \arrow[dr, "A^{-1}"'] & \\
& k^n \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & k^n
\end{tikzcd}$$

□

4.3.5 Существование инвариантной максимальной фильтрации

В этом пункте мы докажем результат, анонсированный в 3.4.9. Поле k предполагается алгебраически замкнутым.

Будем проводить построение индуктивно по размерности пространства V. Предположим, что такая фильтрация существует для любого линейного оператора на $n-1$-мерном векторном пространстве.

Образуем двойственное к V пространство $V^\vee$ и рассмотрим двойственный к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}^\vee \in \mathrm{End}_k V^\vee$. Поскольку поле k алгебраически замкнуто, то линейный оператор $\mathcal{A}^\vee$ имеет хотя бы один собственный вектор $x' \in V^\vee$. Таким образом, $\langle x' \rangle \subset V^\vee$ – $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство. Принимая во внимание канонический изоморфизм $V \cong V^{\vee\vee}$, определим подпространство V_{n-1} по следующей формуле

$$V_{n-1} := \{x \in V \cong V^{\vee\vee} | x(x') = 0\},$$

где $x(x')$ – образ спаривания $V^{\vee\vee} \times V^\vee \to k$. Понятно, что V_{n-1} – $\mathcal{A}$-инвариантное $n-1$-мерное подпространство в V.

Перейдем к ограничению $\mathcal{A}|_{V_{n-1}}$. По предположению индукции, пространство V_{n-1} обладает $\mathcal{A}|_{V_{n-1}}$-инвариантной максимальной фильтрацией $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1}$. Это поставляет искомую $\mathcal{A}$-инвариантную фильтрацию $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V$ пространства V.

Тем самым завершено доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.3.6. *(Треугольный вид матрицы линейного оператора) Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ на n-мерном векторном пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, в котором матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет верхнетреугольный вид. Иными словами, всякая матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$ подобна верхнетреугольной.*

4.3.6 Приведение матрицы линейного оператора к верхнетреугольному виду (алгоритм)

1. Выписать матрицу A линейного оператора $\mathcal{A}$ в исходном базисе и матрицу $A^\vee = A^T$ двойственного оператора $\mathcal{A}^\vee$ в базисе, двойственном к исходному.

2. Найти (какой-нибудь) собственный вектор x' для $A^\vee$.

3. Вычислить V_{n-1} как пространство решений линейной системы уравнений $g(x') = 0$ (относительно g). Указать в нем какой-нибудь базис $g_1, \dots, g_{n-1}$.

4. Выписать матрицу $A|_{V_{n-1}}$ оператора $\mathcal{A}|_{V_{n-1}}$ в базисе $g_1, \dots, g_{n-1}$ и матрицу $(A|_{V_{n-1}})^\vee$ двойственного оператора в двойственном базисе.

5. Найти (какой-нибудь) собственный вектор x'' для $(A|_{V_{n-1}})^\vee$.

6. Вычислить V_{n-2} как пространство решений уравнения $h(x'') = 0$. Указать его базис $h_1, \dots, h_{n-2}$. Продолжая процесс, получить убывающую фильтрацию $V \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_2 \supset V_1 \supset 0$, по которой легко построить диагонализирующий базис для $\mathcal{A}$.

4.4 Приложения и комментарии

4.4.1 Интерпретация однородных линейных систем

Пусть дана однородная линейная система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Тогда можно рассмотреть k-векторное пространство k^n с каноническим базисом

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

и двойственное векторное пространство $(k^n)^\vee$ с двойственным базисом. Выделим в $(k^n)^\vee$ s (ко)векторов

$$\begin{aligned} a^1 &= (a_{11}, \dots, a_{1n}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^s &= (a_{s1}, \dots, a_{sn}). \end{aligned}$$

Тогда система может быть переписана в следующей форме: $c(a^i, x) = 0$, $i = \overline{1, s}$, где символ c означает каноническое спаривание.

Теорема 4.4.1. *(Решения системы линейных уравнений) Если ранг системы векторов $a^1, \dots, a^s$ равен r, то размерность подпространства решений системы уравнений (4.4.1) равна $n - r$. Любое подпространство $U \subset V$ является пространством решений некоторой системы линейных однородных уравнений.*

Доказательство. Пусть векторы $a^1, \dots, a^r$ линейно независимы; тогда остальные векторы $a^{r+1}, \dots, a^s$ являются их линейными комбинациями. Поэтому система (4.4.1) равносильна системе $c(a^i, x) = 0, i = \overline{1, r}$. Размерность пространства ее решений равна $n - r$.

Пусть теперь $U \subset V$ – подпространство. Выберем в нем базис $e_1, \dots, e_s$ и дополним его до базиса всего пространства V: $e_1, \dots, e_n$. Образуем двойственное пространство $V^\vee$ и возьмем в нем базис $e^1, \dots, e^n$, двойственный к базису $e_1, \dots, e_n$ пространства V. Тогда все векторы подпространства U и только они удовлетворяют системе уравнений

$$c(e^i, x) = 0, i = \overline{s + 1, n}.$$

$\square$

4.4.2 Сумма, пересечение и двойственность

Обозначим за A линейную оболочку (ко)векторов $a^1, \dots, a^s$. Тогда систему (4.4.1) можно переписать в виде $c(A, x) = 0$, и пространство ее решений $X \subset V$ зависит от подпространства $A \subset V^\vee$, а не от выбора конкретных $a^1, \dots, a^s$. Поэтому назовем $A \subset V^\vee$ *подпространством соотношений*, а $X \subset V$ – *подпространством неизвестных* системы (4.4.1).

Поменяв ролями подпространства A и X, рассмотрим систему

$$c(a, X) = 0 \tag{4.4.2}$$

уравнений относительно ковекторов $a \in V^\vee$. Тогда если X – подпространство решений системы (4.4.1), то подпространство решений системы (4.4.2) содержит A. Подсчет размерностей по теореме 4.4.1 показывает, что это подпространство решений в точности равно A.

Пусть также $B \subset V^\vee$ – другое подпространство, определяющее систему $c(B, x) = 0$, и $Y \subset V$ – подпространство ее решений. Тогда имеет место следующее вполне ожидаемое

Предложение 4.4.2. *(Сумма, пересечение и спаривание) Пространство решений системы $c(A + B, x) = 0$ равно $X \cap Y$, а пространство решений системы $c(A \cap B, x) = 0$ определяется как $X + Y$.*

Доказательство. Выбрав какие-нибудь базисы в подпространствах A и B, мы можем перейти к эквивалентной системе

$$c(A + B, x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c(A, x) = 0, \\ c(B, x) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что пространство решений новой системы равно $X \cap Y$. Второе утверждение следует из первого, если поменять ролями подпространство соотношений и подпространство неизвестных. □

4.4.3 Замечания о двойственности*

Содержательные теории двойственности могут быть развиты в некоторых других разделах алгебры, а не только в теории векторных пространств. Такова, например, теория модулей над коммутативными ассоциативными кольцами. В этой ситуации поведение двойственности оказывается гораздо более сложным (см. определение 1.1.6 R-модуля). Например, рассмотрим $\mathbb{Z}$-модуль вида $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_m$. Назовем *подмодулем кручения* множество тех элементов, которые аннулируются какими-либо ненулевыми элементами кольца R. Непосредственная проверка определения показывает, что множество таких элементов содержит 0, замкнуто относительно сложения и действия скаляров из основного кольца, то есть действительно является подмодулем. В частности, подмодуль кручения в $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_m$ равен $\mathbb{Z}_m$. Модулем, двойственным к данному модулю M, называется R-модуль $M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. Заметим, что ненулевых гомоморфизмов вида $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}$ не существует и тем самым $(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_m)^\vee \cong \mathbb{Z}^n$. Можно даже показать, что двойственный модуль всегда не имеет кручения ("двойственность убивает кручение"). В частности, это означает, что, в отличие от k-векторных пространств, *не все* R-модули рефлексивны.

Литература

[1] Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — 5-изд., испр. — М.: МЦНМО, 1998. — 320 с.

[2] Зуланке, Р. Алгебра и геометрия: в 3 т. Т. 1: Введение / Р. Зуланке, А. Л. Онищик. — М.: МЦНМО, 2004. — 408 с.: ил.

[3] Зуланке Р. Алгебра и геометрия: в 3 т. Т. 2: Модули и алгебры / Р. Зуланке, А. Л. Онищик — М.: МЦНМО, 2008. — 336 с.: ил.

[4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. 2: Линейная алгебра: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2000. — 368 с.: ил.

[5] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. III: Основные структуры алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 2-изд. стереотип. — М.: Физматлит, 2001. — 272 с.: ил.

[6] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М.: Физматлит, 1980. — 303 с.: ил.

[7] Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. — М.: Физматгиз, 1963. — 264 с.

Учебное издание

Тимофеева Надежда Владимировна
Линейная алгебра. Современная алгебра

Учебное пособие

Редактор М. В. Никулина
Верстка Н. В. Тимофеева

Подписано в печать 17.05.12. Формат $60 \times 84\,{}^1/_{16}$.
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 7,0.
Тираж 36 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14