

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. О. Ширяева
А. И. Григорьев

Спонтанный распад струй

Монография

Ярославль 2011

УДК 532.5:537.1:541.037:621.319.7:66.069.83

ББК 253.13

Ш 64

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2011 года*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Коромыслов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Ширяева, С. О. Спонтанный распад струй: монография
Г 83 / С. О. Ширяева, А. И. Григорьев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Де-
мидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 204 с.

ISBN 978-5-8397-0849-5

В монографии в рамках аналитического асимптотического подхода исследуются общефизические закономерности линейного волнового движения на поверхности струй идеальной и вязкой жидкости и условия дробления струй на отдельные капли. Рассмотрены особенности спонтанного электростатического полидиспергирования жидкости, имеющего место при распаде на капли струй жидкости, выбрасываемых при реализации неустойчивости заряженной как плоской, так и криволинейной свободной поверхностью жидкости. Проведено теоретическое обоснование предлагаемой классификации экспериментально наблюдающихся режимов электростатического полидиспергирования жидкости.

При написании книги авторы пользовались частичной поддержкой грантов РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148 и Рособрнауки №РНП 2.1.1.13776

УДК 532.5:537.1:541.037:621.319.7:66.069.83

ББК 253.13

ISBN 978-5-8397-0849-5

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2011

1. Введение. Ретроспектива исследований устойчивости и спонтанного капиллярного распада заряженных струй

В самых различных академических, технических и технологических приложениях приходится сталкиваться с сильно заряженной свободной поверхностью жидкости или границей раздела несмешивающихся сред, которые можно моделировать несжимаемыми жидкостями. Когда отрицательное электростатическое давление на свободную поверхность жидкости (или границу раздела несмешивающихся сред), возмущенную капиллярным волновым движением теплового происхождения, превысит локальное значение давления капиллярных сил, с поверхности жидкости выбрасывается заряженная струйка жидкости, распадающаяся полидисперсным образом на отдельные капли [1–5]. Весь феномен носит название спонтанного электродиспергирования жидкости в противовес вынужденному капиллярному распаду струй, ориентированному на получение потоков монодисперсных заряженных капель [6].

Капиллярные волны теплового происхождения генерируются тепловым движением молекул жидкости и имеют амплитуды $\sim \sqrt{kT/\gamma}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура жидкости, γ – коэффициент поверхностного натяжения. Для большинства жидкостей эти амплитуды не превышают одной десятой нанометра. Такие волны в задачах гидродинамики обычно именуется волнами бесконечно малой амплитуды.

Под электростатическим полем будет пониматься электрическое поле, являющееся решением уравнения Пуассона (или Лапласа), изменяющееся во времени со скоростью много меньшей скорости распространения электромагнитной волны. Электрические поля, возникающие вблизи заряженной поверхности жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением, изменяются во времени со скоростями, не превышающими скорости звука в жидкости, а потому эффектами запаздывания

можно пренебрегать и считать их в проводимом рассмотрении электростатическими.

С феноменом спонтанного электродиспергирования жидкости приходится сталкиваться: в точном приборостроении при анализе физических закономерностей функционирования жидко-металлических источников ионов [7–10] и масс-спектрометров для анализа нелетучих, органических и термически нестабильных веществ [11, 12]; при распыливании горючего, ядохимикатов, лакокрасочных материалов [13–15]; в устройствах для получения порошков тугоплавких металлов [16]; в жидкометаллической эпитаксии и литографии [16]; ионных коллоидных реактивных двигателях [14, 15]; при получении капель жидкого водорода для установок термоядерного синтеза [18]; в связи с исследованием физических механизмов инициирования разряда молнии [19–22], зажигания огней св. Эльма [23, 24], электрических явлений в воронке смерча [25].

В связи с многочисленными приложениями феномена электродиспергирования жидкости, разнообразием установок, физико-химических свойств рабочих жидкостей и экспериментально выделенных режимов количество публикаций с описаниями феноменологии явления измеряется тысячами. Но теоретическое осмысление всего многообразия экспериментальных данных пока не завершено в силу нелинейности и сложности феномена, а также в силу «рыхлости» экспериментального материала. Говоря о «рыхлости», мы имеем в виду то обстоятельство, что экспериментальные результаты, полученные на различных установках, не всегда согласуются друг с другом; описания проведенных экспериментов весьма редко сопровождаются контролем физико-химических свойств рабочих жидкостей и погрешностями измерений. Результаты теоретических исследований, выполненных в различных техниках, идеализированных моделях и порядках приближений, оставляют ощутимые пробелы в системе представлений о физических механизмах электродиспергирования жидкости.

В связи со сказанным в настоящем анализе будет сделана попытка обобщения накопленных к настоящему времени теоретических представлений об обсуждаемом феномене.

1. Классические представления о капиллярном распаде струй. Хорошо известно [26–28], что любая изолированная система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому фиксированный объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью с формой, отличной от сферической, подверженной действию сил поверхностного натяжения, в отсутствие внешних силовых полей будет стремиться принять сферическую форму, т. е. форму с минимальной площадью свободной поверхности, обеспечивающую минимальность потенциальной энергии капиллярных сил. Сказанное относится и к цилиндрической струе жидкости, которая будет неустойчива по отношению к разбиению на капли, в чем несложно убедиться из простых рассуждений.

Идеальная несжимаемая жидкость. Пусть имеется участок бесконечной струи радиуса R_0 , длины L идеальной несжимаемой жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения γ . Зададимся вопросом, для какого соотношения между R_0 и L переход под действием сил поверхностного натяжения от цилиндрической струи к совокупности сферических капель будет энергетически выгоден. Для этого сравним потенциальную энергию U_{cyl} капиллярных сил боковой поверхности цилиндра длиной L с потенциальной энергией U_{sph} капиллярных сил поверхности N одинаковых сферических капель, на которые предположительно может распасться рассматриваемый участок струи. Приравнявая объем цилиндра объему N сферических капель, получим радиус одной капли: $r = \sqrt[3]{3R_0^2 L / 4N}$. Найдем теперь отношение потенциальной энергии капиллярных сил поверхности N сферических капель U_{sph} к потенциальной энергии капиллярных сил боковой поверхности участка струи U_{cyl} длиной L : $-(U_{sph}/U_{cyl}) \equiv \sqrt[3]{9R_0 N / 2L}$. Потребуем, чтобы это отношение было меньше единицы, и получим условие самопроизвольного разбиения участка струи на N отдельных капель в виде $9R_0 N / 2L < 1$. Полагая $N = 1$, найдем, что при $L \geq 4.5 \cdot R_0$ цилиндрической струе энергетически выгодно разбиваться на отдельные капли с радиусами $r \geq 3R_0 / \sqrt[3]{8}$. Сказан-

ное означает, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к волнам с длиной $\lambda \geq 4.5 \cdot R_0$. По отношению же к синусоидальным возмущениям поверхности с длинами волн λ , меньшими чем $4.5 \cdot R_0$, струя оказывается устойчивой. Следует отметить, что спектр волн с длинами, удовлетворяющими условию $\lambda \geq 4.5 \cdot R_0$, бесконечен, но инкременты нарастания неустойчивости волн с различными длинами будут различны и реальный распад струи на капли определится волной с максимальной величиной инкремента неустойчивости. Строгий анализ на основе принципа наименьшего действия [26, 27] показывает, что незаряженная струя дробится на капли с несколько большими радиусами, чем получено выше в качественных рассуждениях, а именно $r \approx 3R_0/\sqrt[3]{4}$.

Первое строгое аналитическое исследование устойчивости цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости по отношению к поверхностным капиллярным цилиндрическим осесимметричным волнам бесконечно малой (тепловой) амплитуды выполнено в конце позапрошлого века Рэлеем [26]. Рассматривая амплитуды цилиндрических капиллярных осесимметричных волн бесконечно малой амплитуды в качестве нормальных (главных) координат колебательной системы с бесконечно большим количеством степеней свободы, он составил функцию Лагранжа колебательной системы и выписал систему независимых уравнений Лагранжа для различных волновых чисел. Анализ полученной системы уравнений Лагранжа позволил исследовать устойчивость струи по отношению к капиллярным волнам различной длины. Поскольку использованный Рэлеем подход впоследствии неоднократно применялся к исследованию устойчивости струй при различных усложняющих факторах обозначим кратко его основные этапы.

Пусть в отсутствие поля силы тяжести имеется бесконечно протяженный прямой круговой цилиндрический столб (струя) жидкости плотностью ρ радиуса R_0 . Примем, что свободная поверхность струи деформирована осесимметричной капиллярной волной с волновым числом k бесконечно малой амплитуды $a_0(t)$. Изменение потенциальной энергии капиллярных сил U_γ ,

приходящееся на единицу длины, из-за деформации невозмущенной поверхности струи будет иметь вид

$$U_\gamma = \frac{\pi\gamma a_0^2}{2R_0}(x^2 - 1), \quad (1)$$

$x \equiv kR_0$ – здесь и ниже безразмерное волновое число. Кинетическая энергия волнового движения жидкости в единице длины струи запишется в виде

$$T = \frac{1}{2}\pi\rho R_0^2 \frac{J_0(ix)}{ix \cdot J_0'(ix)} \cdot \left(\frac{\partial a_0}{\partial t}\right)^2, \quad (2)$$

где $J_0(ix)$ – функция Бесселя, а $J_0'(ix)$ – первая производная от функции Бесселя; i – мнимая единица. Функция Лагранжа легко выписывается: $L = T - U_\gamma$, так же как и уравнение Лагранжа для отыскания временной зависимости амплитуды волны на поверхности струи:

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{ix \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)} \cdot (x^2 - 1)a_0 = 0.$$

С математической точки зрения полученное уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами и, следовательно, имеет решения экспоненциального типа с показателем экспоненты, определяющимся знаком и величиной коэффициента при a_0 . В области устойчивости $x > 1$ амплитуда a_0 изменяется периодически $a_0 \sim \exp(i\omega t)$ и для отыскания связи между частотой волны и волновым числом получается дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{ix \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)} \cdot (x^2 - 1).$$

В диапазоне длин волн $x < 1$ решения уравнения Лагранжа имеют экспоненциально нарастающий со временем либо экспоненциально убывающий вид, т. е. $a_0 \sim \exp(\pm\eta t)$, где η – вещественное. Тогда

$$\eta^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{ix \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)} \cdot (1 - x^2).$$

В приближении $x^2 \ll 1$ Рэлей разложил правую часть полученного соотношения по степеням x^2 приравнял нулю производную от полученного разложения по x и получил, ограничиваясь первыми тремя слагаемыми разложения, квадратичное по x^2 алгебраическое уравнение. Найдя положительный корень этого уравнения, Рэлей выяснил, что максимальное значение инкремент неустойчивости достигает при $x^2 \approx 0.4858$. Это условие соответствует длине волны $\lambda \approx 9.016 \cdot R_0$. Волны с указанной длиной волны имеют максимальный инкремент неустойчивости и определяют закономерности дробления струи на отдельные капли.

Обращает на себя внимание тот факт, что условие $x = 1$ разделяет движения жидкости в струе на периодические при $x > 1$ и аperiodические при $x < 1$. Сам распад струи на капли происходит за счет экспоненциального роста со временем амплитуды аperiodических движений.

Влияние вязкости жидкости. В последующих теоретических работах Рэля [29], Бассета [30] и Вебера [31] было исследовано влияние вязкости жидкости на условия разбиения струи на капли. Выяснилось, что вязкость жидкости, не влияя на ширину диапазона длин неустойчивых волн, играет стабилизирующую роль в феномене распада струи на капли, увеличивая длину волны, обладающей максимальным инкрементом, снижая величины инкрементов неустойчивых волн и увеличивая длину не распавшейся части струи. Последняя характеристика феномена распада струи на капли обусловлена реалиями проведения экспериментов со струями, которые под действием некоторого давления вытекают из отверстий (например, из капилляров) с некой скоростью V . Характерное время отделения капли от струи τ определится величиной $\tau \sim \eta_{\max}^{-1}$. За это время торец струи (место отрыва капли) удаляется от среза капилляра на расстояние $L \sim V \cdot \eta_{\max}^{-1}$. Величина L и определяет нераспавшуюся часть струи.

Для идеальной жидкости зависимости от времени поля скоростей течения жидкости, поля давлений и формы струи в обла-

сти устойчивости были чисто периодическими: $\sim \exp(i\omega t)$, где ω – вещественная частота. Для вязкой жидкости частота становится комплексной: $s \equiv \omega + i\beta$, где β – декремент затухания обусловленного влиянием вязкого трения. Проведенные исследования показали, что дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту s волн на поверхности цилиндрической струи вязкой несжимаемой жидкости с коэффициентом кинематической вязкости ν и волновым числом k имеет вид [32]

$$s^2 + \frac{2\nu k^2 s}{I_0(x)} \left[I_1'(x) - \frac{2kq}{k^2 + q^2} \frac{I_1(x)}{I_1(x)} I_1'(lR_0) \right] = \frac{\gamma x^2}{\rho R_0^3} (1 - x^2) \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \frac{q^2 - k^2}{q^2 + k^2},$$

где $q^2 \equiv k^2 + (s/\nu)$; $I_n(x) \equiv i^n I_n(ix)$ – модифицированные функции Бесселя. При $x^2 < 1$ появляются чисто вещественные решения этого дисперсионного уравнения, одно определяет декремент затухания β , а другое – инкремент η неустойчивости волны. Выражение для инкремента имеет максимум при определенном волновом числе k_{\max} , положение которого определяется условием обращения в нуль производной от η по волновому числу

Влияние вязкости на закономерности распада струи на капли удобно проанализировать в пределе длинных волн, когда длина волны много больше радиуса струи, т. е. когда выполняются условия $x \equiv kR_0 \ll 1$, $qR_0 \ll 1$. В этом случае дисперсионное уравнение принимает более простой вид:

$$s^2 + 2\nu k^2 s = \frac{\gamma x^2}{\rho R_0^3} (1 - x^2),$$

а его решения легко выписываются:

$$s = -\nu k^2 \pm \sqrt{(\nu k^2)^2 + \frac{\gamma x^2}{\rho R_0^3} (1 - x^2)}.$$

Отсюда легко найти, что величина инкремента неустойчивости достигает своего максимального значения при

$$k_{\max} = 1 / \sqrt{\nu R_0 \sqrt{(\rho R_0 / 2\gamma) + 2R_0^2}}.$$

Величина инкремента неустойчивости определится выражением

$$\eta_{\max} = \sqrt{\gamma/8\rho R_0^3} / (1 + \nu\sqrt{2\rho/\gamma R_0}).$$

Если вязкость жидкости велика так, что выполняется условие $\sqrt{\gamma R_0/\rho\nu^2} \gg 1$, то для k_{\max} и η_{\max} получим соответственно

$$k_{\max} \approx 0.5 \cdot \sqrt[4]{\gamma/\nu^2 \rho R_0^3}, \quad \eta_{\max} \approx \gamma/6\nu\rho R_0.$$

Характерное время распада струи определится соотношением: $\tau = \eta_{\max}^{-1} \approx 6\nu\rho R_0/\gamma$. Длина нераспавшейся части струи определится выражением $L \approx V \cdot 6\nu\rho R_0/\gamma$.

Влияние окружающей среды. В реальных условиях движущаяся со скоростью V струя окружена воздухом, который можно моделировать несжимаемой жидкостью, когда V много меньше скорости звука. Очевидно, что граничные условия на поверхности струи, окруженной внешней средой, будут отличаться от граничных условий на поверхности струи в вакууме. Моделируя в простейшей ситуации жидкость движущейся струи и неподвижную окружающую среду идеальными несжимаемыми жидкостями, при $V \neq 0$ на границе раздела сред будем иметь тангенциальный скачок поля скоростей, т. е. получим аналог ситуации, приводящей к реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [33]. В отличие от капиллярной неустойчивости струи, имеющей, как отмечалось выше, апериодический характер, так что временная зависимость решения записывается в виде $\sim \exp(\eta t)$, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца соответствует экспоненциальному росту со временем амплитуды неустойчивой волны: $\sim \exp(\eta t) \cdot \cos(\omega t)$, т. е. является колебательной. Из общефизических соображений очевидно, что в указанных условиях наличие внешней для струи среды будет приводить к ее дестабилизации, что и было обнаружено Рэлеем и Бассетом в [30, 34]. Впоследствии эта проблема детально исследовалась при различных усложняющих предположениях (см., например, обзор [35] и указанную там литературу), но в настоящем рассмотрении, посвященном заряженным струям, не будем на нем останавли-

ливаться, поскольку тема в общем случае достаточно сложна и связана со взаимодействием неустойчивостей различных типов – апериодической и колебательной.

2. Капиллярные осесимметричные волны и распад струй в радиальном электрическом поле. Еще на заре исследования электрических явлений Вильям Гилберт заметил, что капля воды на сухой подложке приобретает коническую (вершиной вверх) форму, если над ней на небольшом расстоянии поместить наэлектризованный кусок янтаря [36]. Как было показано уже в наше время [37, 38], при этом на свободной поверхности капельки появляется индуцированный электрический заряд и она деформируется к вытянутому сфероиду. На вершине сфероида за счет суперпозиции высоких мод осцилляций капли формируется эмитирующий выступ, названный «конусом Тейлора», с вершины которого выбрасывается тоненькая струйка воды, распадающаяся на отдельные капельки. По-видимому, первые наблюдения эмиссии струек жидкости, распадающихся на отдельные капельки, при электризации свободной поверхности жидкости связаны с работами одного из первых исследователей электрических явлений аббата Ж. Ноле. В середине XVIII века он заметил, что если человека поместить на изолирующую подставку и подвергнуть электризации (с помощью созданного О. Герике прообраза электрофорной машины), то из ранок и порезов на коже человека начинают бить очень тонкие струйки крови, распадающиеся на отдельные капли [39].

В конце XIX века Рэлей создал строгую теорию капиллярного распада струй, обобщившую итоги экспериментов Савара, Магнуса, Плато, Бидона [26, 27, 40] и, в частности, провел эксперименты по исследованию влияния электризации на закономерности капиллярного распада струи на капли [41]. Он обратил внимание на то, что, если к струе, вытекающей из некоего отверстия и распадающейся на некотором расстоянии L от отверстия на капли, поднести слегка наэлектризованное тело, распад струи на капли прекращается, т. е. увеличивается длина нераспавшейся части струи L . Качественный комментарий к этому феномену, сводящийся к электростатическому притяжению цепочки замороженных на струе капель, предложен в работе [42] (с. 238–242).

Если же подносимое к струе тело сильно наэлектризовано, то длина не распавшейся части струи сокращается, а каплеобразование идет с большей скоростью. Суть феномена дестабилизации струи под влиянием сильной электризации можно понять из нижеследующих рассуждений, высказанных Бассетом [30].

Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя идеальной несжимаемой электропроводной жидкости кругового сечения радиуса R_0 , окруженная соосным цилиндрическим электродом радиуса $R_* \gg R_0$. Примем, что между струей и внешним электродом поддерживается разность постоянная потенциалов так, что на невозмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности струи однородно распределен электрический заряд с плотностью χ так, что $\mu \equiv 2\pi R_0 \chi$ – заряд, приходящийся на единицу длины струи. Поправка к потенциальной энергии электрического поля в окрестности свободной поверхности струи, появляющаяся вследствие искажения ее исходной цилиндрической поверхности осесимметричным капиллярным волновым движением теплового происхождения, запишется в виде

$$U_\chi = -\frac{\mu^2}{2} \frac{a_0^2}{R_0^2} \left[1 - \frac{x \cdot K_1(x)}{K_0(x)} \right],$$

где $K_n(kR_0)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда). Подставляя это выражение в функцию Лагранжа, определенную на основе потенциальной энергии капиллярных сил (1) и кинетической энергии волнового движения в струе (2), легко выписать уравнение Лагранжа для отдельных волн и, отыскивая в области $x^2 > 1$ решения $\sim \exp(i\omega t)$, получить дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \left[x^2 - 1 + w \cdot H(k, 0) \right] \cdot D(k, 0);$$

$$D(k, 0) \equiv \frac{x \cdot I_1(x)}{I_0(x)}; \quad H(k, 0) \equiv 1 - \frac{x \cdot K_1(x)}{K_0(x)}; \quad w \equiv \frac{\mu^2}{\pi R_0 \gamma}.$$

В диапазоне длин волн $x < 1$ решения уравнения Лагранжа имеют экспоненциально нарастающий либо экспоненциально убывающий со временем вид, т. е. $a_0 \sim \exp(\pm \eta t)$, где η – вещественное. Тогда

$$\eta^2 = -\frac{\gamma}{\rho R_0^3} \left[x^2 - 1 + w \cdot H(k, 0) \right] \cdot D(k, 0). \quad (3)$$

Дисперсионное уравнение такого вида с точностью до множителя $R_0/4$ при w , ошибочно появившегося в расчетах, было получено еще Бассетом [30] (учитывавшим также вязкость жидкости и наличие внешней среды). Тейлор [36] исправил ошибку Бассета и записал дисперсионное уравнение в виде (3).

Следует отметить, что за два года до появления работы Тейлора [36] вышла статья [43], где исследовалась устойчивость заряженной струи и была исправлена ошибка в дисперсионном уравнении, допущенная Бассетом, но совершены свои ошибки, одна из которых была исправлена в работе [44], а другая, связанная с размерностью (в обеих цитированных выше работах дисперсионные уравнения содержат выражения вида $\ln r$, где r – размерная величина), переключалась из [43] в работу [44].

В [45] предпринята попытка записать дисперсионное уравнение для произвольной моды (с произвольным значением азимутального параметра волны m) идеальной несжимаемой электропроводной струи для конечного радиуса R_* внешнего цилиндрического соосного со струей электрода. Однако полученное дисперсионное уравнение в асимптотике $R_* \rightarrow \infty$, $x \ll 1$ приводит к ошибочному результату, согласно которому устойчивость осесимметричной волны ($m = 0$) не зависит от наличия заряда на струе.

В [46] исследование устойчивости и распада наэлектризованных капиллярных струй проводилось численным методом, а также путем экспериментальных измерений. Теоретически и в экспериментах показано, что с увеличением заряда на струе размеры капель, образующихся при ее распаде, уменьшаются. При описании решения для электрического потенциала в окрестности струи в [46] допускаются та же небрежности в применении опера-

ции логарифмирования к размерному расстоянию r , что и в работах [43, 44].

Из теоретических построений Бассета [30] следовало, что влияние электризации струи зависит от знака слагаемого $w \cdot H(k, 0)$, учитывающего вклад электрического поля в потенциальную энергию струи в дисперсионном уравнении. Бассет выяснил, что при $x < 0.6$ (более точные вычисления [47] дают $x < 0.595$) вклад электрического поля в полную потенциальную энергию струи противоположен по знаку вкладу капиллярных сил. Следовательно, наличие на струе электрического заряда приводит к стабилизации струи относительно виртуальных волновых возмущений из диапазона волновых чисел $0 < k < 0.595 \cdot R_0^{-1}$, т. е. величины инкрементов неустойчивости волн из указанного диапазона снижаются. Это можно видеть из рис. 1а [47], иллюстрирующего ход зависимостей инкремента от волнового числа, обезразмеренного на R_0 , при различных значениях параметра w , характеризующего давление электрического поля на свободную поверхность струи, в окрестности точки $k = 0.595$, где функция $H(k, 0)$ меняет знак.

Из рис. 1а видно, что при $x < 0.595$ (левее точки пересечения кривых на рис. 1а), т. е. для длинных капиллярных волн, с ростом w величина инкремента снижается. О стабилизирующем влиянии на волну с $k = 0$ электрического заряда на объемно заряженной струе говорилось также в теоретической работе [48]. Для значений волновых чисел $x > 0.595$ инкременты неустойчивости быстро растут с увеличением поверхностной плотности заряда на струе (с увеличением w), так же как и k_{\max} – волновое число волны, обладающей максимальной величиной инкремента неустойчивости.

Как можно видеть из (3) (см. [47]), наличие заряда на струе приводит к расширению диапазона длин устойчивых волн в область волн, более длинных по сравнению с волнами в незаряженной струе. В соответствии с анализом Рэлея на незаряженной струе граница между устойчивыми и неустойчивыми волнами определяется условием $x^2 = 1$.

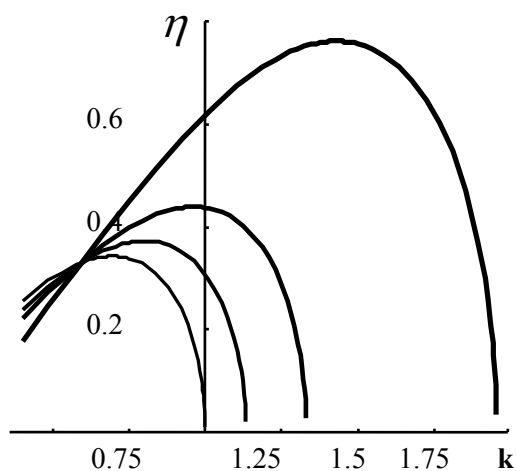


Рис. 1а. Зависимости величины безразмерного инкремента осесимметричных волн ($m = 0$) от безразмерного волнового числа k , рассчитанные при значении безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\nu = 0.002$ для значений параметра w , равных: 0 (самая тонкая кривая), 0.5, 1 и 2 (самая толстая кривая). Кривые расположены в порядке возрастания безразмерного параметра w

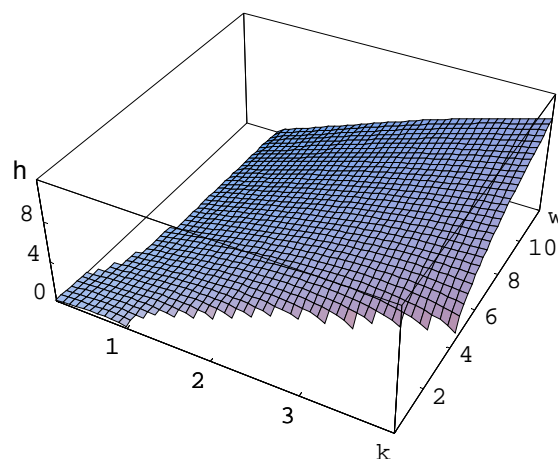


Рис. 1б. Зависимость инкрементов осесимметричных волн от безразмерного волнового числа k безразмерного параметра w

Согласно же результатам Бассета на заряженной струе граница между устойчивыми волнами и неустойчивыми определяется условием $x^2 = \{1 - w \cdot H(k, 0)\}$. При $x > 0.595$ слагаемое $w \cdot H(k, 0)$, отрицательно и, следовательно, положение границы между устойчивыми волнами и неустойчивыми смещается в область больших волновых чисел или более коротких волн. Внутри диапазона волновых чисел, определенных неравенствами $0.595 \leq x \leq \sqrt{1 - w \cdot H(k, 0)}$, электрический заряд на струе увеличивает инкременты неустойчивости. Это можно видеть из рис. 1б, на котором приведена зависимость инкрементов осесимметричных волн для различных волновых чисел k , обезразмеренных на R_0 , и значений безразмерного параметра w . Видно также, что появление на струе электрического заряда приводит к расширению диапазона неустойчивых волн в область больших значений волновых чисел.

Увеличение с ростом поверхностной плотности заряда χ (с ростом параметра w) величин инкрементов неустойчивых волн на поверхности струи в общем случае полностью согласуется с дестабилизирующей ролью электрического заряда. Так, например, для заряженных капель увеличение собственного заряда приводит к увеличению их равновесных деформаций во внешних силовых полях: в поле аэродинамических [49, 50], гравитационных [51, 52] и инерционных [52–54] сил. Появление электрического заряда на поверхности, претерпевающей капиллярную осесимметричную (варикозную) неустойчивость струи, увеличит как величины текущих деформаций, так и величины сил, приводящих к разбиению струи на капли.

Из рис. 1b видно, что при достаточно больших значениях параметра w (при достаточно больших зарядах, приходящихся на единицу струи μ) самые длинные волны становятся устойчивыми. Иными словами, достаточно большие заряды на струе стабилизируют струю относительно длинноволновых возмущений. С формальной точки зрения из (3) видно, что в области $x < 0.595$, где функция $H(k, 0)$ положительна, при достаточно больших w становятся устойчивыми наиболее длинные волны, удовлетворяющие условию

$$x^2 < w \cdot H(k, 0) - 1. \quad (4)$$

Согласно [47] при $k \rightarrow 0$ максимальное значение функции $H(k, 0) \approx 1$. Это означает, что при $w > 1$ в окрестности точки $k = 0$ появляется область устойчивых волн с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению (4). С ростом параметра w размеры этой области увеличиваются. Иначе говоря, появляется левая по k граница области неустойчивости. Само геометрическое место точек на плоскости $\{k, w\}$, в котором цилиндрические волны на поверхности заряженной струи неустойчивы по отношению к дроблению на капли, определится системой неравенств:

$$w < 1: 0 \leq x \leq \sqrt{w \cdot |H(k, 0)| + 1};$$

$$w > 1: \sqrt{w \cdot |H(k, 0)| - 1} \leq x \leq \sqrt{w \cdot |H(k, 0)| + 1}.$$

В области реализации неустойчивости капиллярные и электростатические силы, действующие на свободную поверхность струи, всегда осесимметричны и приводят к росту амплитуды виртуальной волны с максимальной при заданных условиях величиной инкремента. В таких условиях струя дробится на капли с размерами, уменьшающимися с ростом поверхностной плотности заряда на струе χ (с ростом параметра w), поскольку, согласно рис. 1a-b, с увеличением χ длина волны, обладающей максимальной величиной инкремента $\gamma = \gamma_{\max}$, уменьшается. Это согласуется с данными экспериментов [47, 55–60].

В зависимости от величины поверхностной плотности заряда на струе χ (величины параметра w) соотношение между осесимметричными капиллярными и электростатическими силами меняется, и в соответствии с данными экспериментов [47, 56–58] можно выделить несколько режимов распада струи на капли. Неустойчивость, реализующуюся в отсутствие электрического заряда на струе (при $w = 0$), естественно назвать *капиллярной*. При малых плотностях поверхностного заряда на струе χ (согласно (3) при $\chi < \sqrt{|(1-x^2)/4\pi \cdot H(k,m)|}$), когда капиллярные силы преобладают над электрическими: $(1-x^2) > w \cdot H(k,0)$, неустойчивость следует именовать *капиллярно-электростатической*. При большой поверхностной плотности заряда, когда в приведенных соотношениях выполняются противоположные неравенства, неустойчивость будем называть *электростатически-капиллярной*.

О возможности выделения различных областей на плоскости $\{k, w\}$, в которых роли капиллярных и электростатических сил для волн с $m = 0$ различны, говорилось и в теоретической работе [48]. Однако проведенный в [48] полукачественный анализ устойчивости волн с $m = 0$ на поверхности объемно заряженной струи не вполне корректен, и вывод работы [48] о существовании определенного диапазона величин зарядов, приходящихся на единицу длины струи, в котором осесимметричные волны любых длин на струе устойчивы, представляется ошибочным.

3. Капиллярные неосесимметричные волны и распад струй в радиальном электрическом поле. При исследовании

осцилляций и устойчивости заряженных струй специальный интерес представляет изучение неосесимметричных волн на струе, описываемых функциями вида более общего вида по сравнению с осесимметричными, а именно $\sim \exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(st)$, где φ – азимутальный угол; m – азимутальное число, отличное от нуля. Осесимметричная волна в таком представлении соответствует ситуации $m=0$ (в нижеследующем изложении волны с различными азимутальными числами m будем называть модами). Интерес к неосесимметричным волнам объясняется тем, что для незаряженной струи в отсутствие внешних силовых воздействий такие волны всегда устойчивы независимо от длины волны. Они могут стать неустойчивыми только при отличной от нуля поверхностной плотности заряда на струе.

Еще в конце позапрошлого века Рэлей в пределе весьма длинных волн, $k^2 a^2 \ll 1$, исследовал устойчивость однородно заряженной струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости по отношению к виртуальным волновым возмущениям с различными азимутальными числами m [1]. Полагая, что временная эволюция волновой деформации струи описывается законом $\sim \exp(i\omega t)$, он получил дисперсионное уравнение для m -й моды бесконечно длинной волны на заряженной поверхности струи в виде

$$\omega_m^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} m(m-1)[(m+1) - 2w]. \quad (5)$$

Из анализа этого дисперсионного уравнения следует, что наличие поверхностного заряда приводит к снижению устойчивости струи по отношению к неосесимметричным возмущениям поверхности. В самом деле, при $2w > (m+1)$ квадрат частоты становится отрицательным и все моды m , удовлетворяющие этому условию, претерпевают неустойчивость.

Тейлор [36] экспериментально и теоретически исследовал изгибающую неустойчивость струи для произвольной длины волны, связанную с возбуждением моды с $m=1$. Он отталкивался от известного по экспериментальным исследованиям [36] факта, что при достаточно большой плотности заряда на струе ее конец на-

чинает совершать хлыстообразное движение, распадаясь при этом на отдельные капельки. Тейлор записал форму струи в виде $r = R_0 + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\varphi) \cdot \exp(i\omega t)$ и получил дисперсионное уравнение для изгибной неустойчивости струи идеальной несжимаемой заряженной электропроводной струи:

$$\omega^2 = -\frac{\gamma}{\rho R_0^3} \frac{x \cdot I_1'(x)}{I_1(x)} \left\{ x^2 + w \left[1 + \frac{x \cdot K_1'(x)}{K_1(x)} \right] \right\}, \quad (6)$$

где штрих у модифицированных функций Бесселя означает производную по аргументу. Из полученного дисперсионного уравнения следовало, что мода с $m = 1$ неустойчива при любых значениях поверхностного заряда, поскольку выражение, стоящее в квадратных скобках, всегда отрицательно. Приравнивая нулю выражение, стоящее в фигурных скобках, можно получить положение правой границы диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым изгибным волнам при заданном w .

В работе [48] предпринята попытка исследования влияния вязкости и электрического поля на устойчивость неосесимметричных волн произвольных длин на поверхности объемно заряженных струй и подтвержден вывод работы [1] о наличии порогов по w для начала реализации неустойчивости неосесимметричных волн с различными азимутальными числами $m \geq 2$, хотя сами пороги определены неверно. Более информативна и содержательна работа [61], в которой исследовано влияние вязкости и электрического поля на устойчивость неосесимметричных волн произвольных длин на поверхности заряженных струй идеально электропроводной жидкости. В [61] выведены дисперсионные уравнения для струи с произвольной вязкостью и для ситуации весьма большой вязкости. Показано, что в ситуации большой вязкости инкремент неустойчивости изгибной моды с $m = 1$ может превышать инкремент неустойчивости осесимметричной моды (см. также [47, 62]), и делается вывод, что вязкость сильнее подавляет неустойчивость осесимметричной моды по сравнению с неосесимметричными модами с $m \geq 1$. Критические условия реализации длинных волн m -й моды имеют вид $w = (m + 1)$. При больших напряженностях электрического поля у поверхности струи инкремент неустойчивости моды с $m = 2$, так

же как и инкремент изгибной моды с $m = 1$, может превышать таковой для осесимметричной моды. Говорится, что для ситуации большой вязкости максимальным инкрементом неустойчивости из осесимметричных волн обладают бесконечно длинные волны ($k = 0$), что приводит к разрыву струи на большие куски.

В [62] обсуждаемая задача решена в рамках метода прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса путем разделения поля скоростей течения жидкости на потенциальную и вихревую части, как это подробно описано в [32]. Дисперсионное уравнение для произвольной моды m имеет громоздкий вид, и приводить его полностью в данном рассмотрении нецелесообразно, а потому ограничимся его асимптотическим представлением в пределе малой вязкости ν , которое в безразмерных переменных, где $R_0 = \gamma = \rho = 1$, имеет вид [62]

$$S^2 + 2S\nu \cdot F(k, m) = f(k, m, w) \cdot D(k, m) + O(\nu^2); \quad (7)$$

$$F(k, m) \equiv (k^2 + m^2 - D(k, m)); \quad D(k, m) \equiv m + k \cdot I_{m+1}(k)/I_m(k);$$

$$f(k, m, w) \equiv 1 - m^2 - k^2 - w \cdot H(k, m); \quad H(k, m) \equiv 1 + m - k \cdot K_{m+1}(k)/K_m(k).$$

Несложно видеть, что при $\nu = 0$ и $m = 1$ (7) приводится к (6). Решения дисперсионного уравнения (7) легко выписываются:

$$S_{1,2} = -\nu \cdot F(k, m) \pm \sqrt{\nu^2 \cdot F^2(k, m) + f(k, m, w) \cdot D(k, m)}. \quad (8)$$

В пределе малой вязкости ($\nu \ll 1$), когда собственно и справедливо уравнение (7), в (8), согласно формальным требованиям теории возмущений, следует опустить слагаемые под корнем $\sim \nu^2$, однако решения, записанные таким образом, будут не вполне корректны в ситуации, когда слагаемые в подкоренном выражении в (8) имеют один порядок малости:

$$|f(k, m, w)| \sim \nu^2 F^2(k, m) / D(k, m).$$

Это обстоятельство актуально при анализе критических условий реализации неустойчивости волн на заряженной поверхности струи, поскольку независимо от вязкости жидкости они определяются требованием обращения в нуль функции

$f(k, m, w)$, т. к. $D(k, m)$ для любых m и k положительно. Иными словами, в проводимом анализе важны именно малые значения функции $f(m, w, k)$, а потому для характеристики инкрементов неустойчивости целесообразно использовать соотношение (8).

При $0 < f(k, m, w) < v^2 F^2(k, m) / D(k, m)$ решения (8) вещественные, причем одно положительно, а другое отрицательно. Вещественное отрицательное решение дает декремент апериодического затухания виртуальной деформации, а вещественное положительное решение определяет инкремент неустойчивости цилиндрической волны, имеющий вид

$$\eta(x, m) = -v \cdot F(x, m) + \sqrt{v^2 \cdot F^2(k, m) + f(k, m, w) \cdot D(k, m)}. \quad (9)$$

Знак множителя $f(k, m, w)$ в существенной степени определяется функцией $H(k, m)$, график которой для пяти первых значений параметра m приведен на рис. 2. Принимая во внимание то обстоятельство, что произведение $w \cdot H(k, m)$ определяет вклад электрического поля в величину множителя $f(k, m, w)$, несложно видеть, что стабилизирующую роль ($H(k, m) > 0$) заряд на струе играет только для осесимметричной волны ($m = 0$) при $k \leq 0.595$. Для значений $k > 0.595$ и $m = 0$, а также при любых k и $m > 0$ заряд на струе играет дестабилизирующую роль, т. к. $H(k, m) < 0$.

Условие $f(k, m, w) \geq 0$ позволяет определить диапазоны значений волновых чисел, в которых волны с заданными значениями m и w на цилиндрической поверхности струи неустойчивы. Это проиллюстрировано на рис. 3, где приведены зависимости $w = w(k)$, определяющие положения правых границ диапазонов волновых чисел неустойчивых волн $k = k_*$ от величины параметра w для первых пяти значений азимутального параметра m – от $m = 0$ до $m = 4$ – рассчитанные по соотношению

$$f(k, m, w) = 0. \quad (10)$$

Неустойчивым состояниям волн с заданным значением азимутального числа m соответствует множество точек $\{k, w\}$,

расположенных выше (и левее для $m = 0$) соответствующей кривой. Внутри диапазонов неустойчивости физическая картина реализации самой неустойчивости определяется волнами с максимальными значениями инкремента.

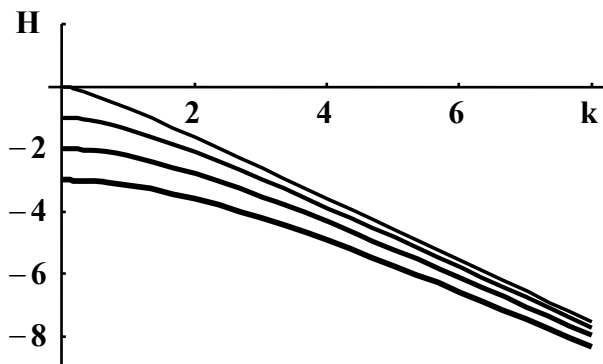


Рис. 2. Зависимости величины коэффициента $H = H(k, m)$ для первых пяти мод, расположенные в порядке возрастания номеров (толщины линий), самая тонкая линия соответствует $m = 0$, самая толстая – $m = 4$

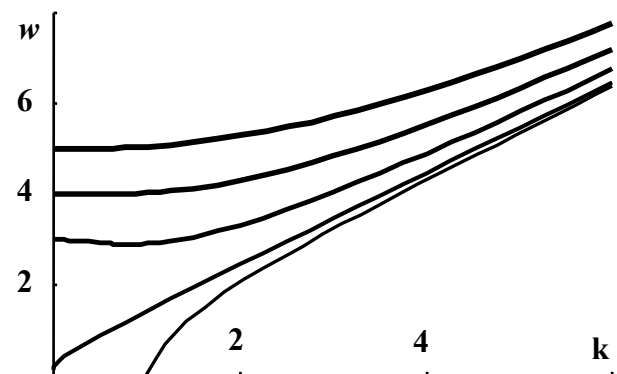


Рис. 3. Зависимости $w = w(k)$, определяющие правые и нижние границы области неустойчивости первых пяти азимутальных мод, расположенные в порядке возрастания номеров (толщины линий); самая тонкая линия соответствует $m = 0$, самая толстая – $m = 4$

Волновое число волны с максимальным значением инкремента $k = k_{\max}$ найдется из условия [32]:

$$(d\eta(k, m)/dk) = 0. \quad (11)$$

Отыскивая из (11) k_{\max} и подставляя его в (10), можно найти значение параметра $w = w_{\max}$, т. е. то значение поверхностной плотности электрического заряда, при котором инкремент неустойчивости волны с $k = k_{\max}$ максимален. На рис. 4а приведены найденные подобным образом зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$. Для всех мод, кроме моды с $m = 2$, кривые зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ на плоскости $\{k, w\}$ лежат выше зависимостей $w = w(k)$, рассчитанных по (10) и приведенных на рис. 3. Для моды с $m = 2$ кривые $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ и $w = w(k)$, приведенные на рис. 4б, пересекаются в точке, являющейся решением системы (10)–(11). Неустойчивым состояниям заряженной поверхности

жидкости соответствуют точки кривой $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$, лежащие выше точки пересечения с кривой $w = w(x)$, определенной соотношением (10).

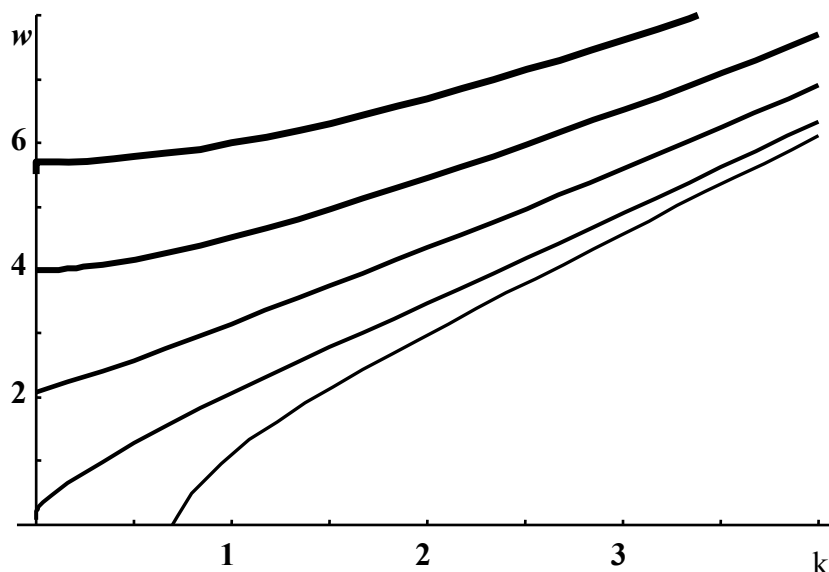


Рис. 4а. Зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$, связывающие значения w_{\max} и k_{\max} , соответствующие максимальным значениям инкремента для волн с заданными азимутальными числами m , расположенные в порядке возрастания номеров мод (толщины линий); самая тонкая линия соответствует $m = 0$, самая толстая – $m = 4$

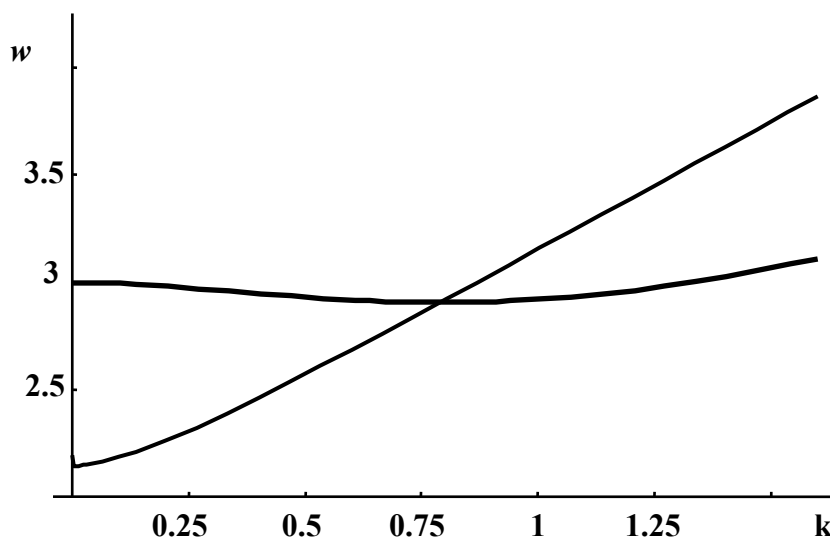


Рис. 4б. Зависимость $w = w(k)$ для волны с $m = 2$, полученная по (10), определяющая правую и нижнюю границы области неустойчивости (толстая линия), и зависимость $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ для $m = 2$, построенная по (10)–(11) (тонкая линия)

Подставляя k_{\max} и w_{\max} в (9), можно найти величину самого инкремента, соответствующего волне, наиболее быстро растущей

со временем. Описанная процедура отыскания экстремальных значений k_{\max} и w_{\max} подобна процедуре поиска критических условий реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля – неустойчивости капиллярно-гравитационных волн на плоской заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости [63]. Волновое число наиболее неустойчивой волны, а также величину инкремента ее неустойчивости можно найти и из графиков зависимости величин инкрементов от волнового числа. На рис. 5а–б приведены зависимости величин инкрементов неустойчивости $\eta(k, m)$ мод $m=1; 2$ от волнового числа k при различных значениях параметра w , построенные по (9) при $w \geq 0$.

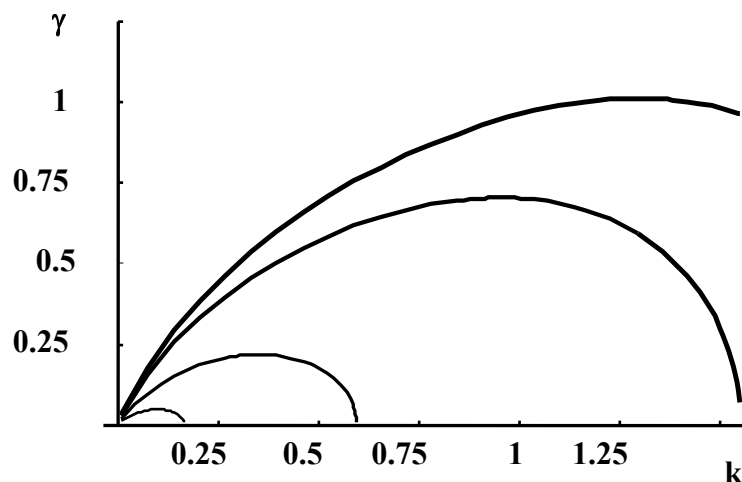


Рис. 5а. Зависимости величины безразмерного инкремента моды с $m = 1$ от безразмерного волнового числа k , при $\nu = 0.002$ и значениях параметра w , равных 0.5 (самая тонкая кривая), 1, 2 и 2.5 (самая толстая кривая), расположенные в порядке возрастания w

На рис. 5а приведены зависимости величины $\eta(k, m)$ – инкремента неустойчивости моды с $m = 1$ – от волнового числа k , построенные по (9) при различных $w \geq 0$. Несложно видеть, что величина инкремента неустойчивости $\eta(k, m)$ и волнового числа k волны, соответствующей его максимальному значению с ростом w увеличиваются от нулевых значений. Возбуждение моды с $m = 1$ приводит к изгибу и закручиванию оси струи, которая в линейном приближении по амплитуде волны ε описывается винтовой линией с шагом x^{-1} :

$$r(z, \varphi, t) = \varepsilon \cdot \cos(k \cdot z + m \cdot \varphi - \omega \cdot t); \quad m = 1,$$

а также к появлению зависимости поля скоростей течения жидкости в струе от азимутального угла φ [47, 62].

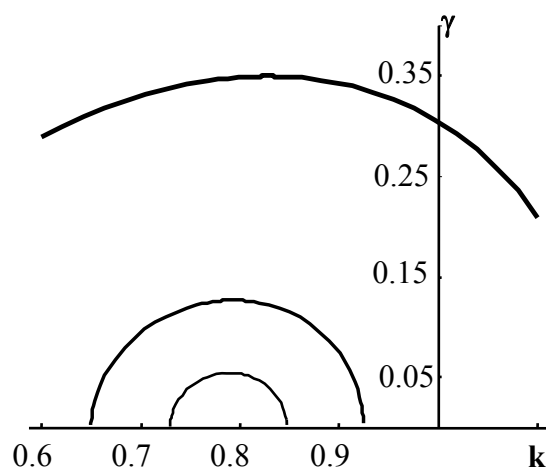


Рис. 5b. Зависимости величины безразмерного инкремента моды с $m = 2$ от безразмерного волнового числа k при $\nu = 0.002$ и значениях параметра w , равных 2.905 (самая тонкая кривая), 2.91 и 2.95 (самая толстая кривая)

Неосесимметричные волны с $m = 2$ и произвольными волновыми числами на поверхности струи при $w < 2.904$ устойчивы. При $w = 2.904$ претерпевает неустойчивость волна с волновым числом $x = 0.789$. Зависимости величины γ – инкремента неустойчивости моды с $m = 2$ – от волнового числа k при различных значениях параметра w , построенные по (9) при $w > 2.9$ проиллюстрированы на рис. 5b. Реализация неустойчивости моды с $m = 2$ приводит к эллиптической деформации поперечного сечения струи и ее скручиванию относительно оси z . Ориентация осей эллипса в поперечном сечении струи зависит от времени и продольной координаты [47, 64, 65]. Сама струя при этом имеет вид эллиптического цилиндра, скрученного вокруг оси.

Критические условия реализации электростатической неустойчивости мод с $m = 3$ и $m = 4$ согласно рис. 4а имеют вид: $w = 4, k = 0$ и $w \approx 5.7, k = 0$ соответственно. Анализ зависимости величин инкрементов неустойчивости мод с $m = 3$ и $m = 4$ от волнового числа x показывает, что волнам с $x = 0$ соответствуют отличные от нуля инкременты.

Дисперсионное уравнение, получающееся в асимптотике большой вязкости, остается громоздким (см. [61, 62]), поэтому

приведем лишь результаты расчета по нему (см. [62]) для осесимметричной $m=0$ и изгибной $m=1$ мод в ситуации, когда безразмерная вязкость струи велика: $\nu=3$, проиллюстрированные на рис. 6а–б. Из приведенных рисунков видно, что в полном соответствии с результатами [61] инкремент неустойчивости изгибной моды в несколько раз превышает таковой для осесимметричной моды, а вот волновое число волны осесимметричной моды с максимальным инкрементом в несколько раз больше волнового числа изгибной моды с максимальным инкрементом. Сказанное объясняет, почему для тонких струй в экспериментах [2, 3, 5, 36, 57, 58, 66, 67] нераспавшаяся часть струи велика, сама струя изогнута (ее конец совершает «хлыстообразное» движение), а характерные линейные размеры отрывающихся капелек малы. Роль вязкости увеличивается с уменьшением радиуса струи, поскольку обезразмеривание коэффициента кинематической вязкости ν ведется на $\sqrt{\gamma R_0/\rho}$, и, следовательно, чем меньше радиус струи, тем меньше масштаб измерения вязкости для нее и тем сильнее влияние диссипации на закономерности распада струи.

4. Общие закономерности реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи. При достаточно большой напряженности электростатического поля E_0 у граничащей с вакуумом плоской свободной поверхности электропроводной жидкости при выполнении соотношения [4, 63]: $(E_0^2/8\pi\sqrt{\rho g\gamma})=1$ претерпевает неустойчивость волна с волновым числом $k=\sqrt{\rho g/\gamma}\equiv 1/\alpha$, где $\alpha=\sqrt{\gamma/\rho g}$ – капиллярная постоянная жидкости, и амплитуда волны начинает расти со временем по экспоненциальному закону. Такая неустойчивость называется неустойчивостью Тонкса-Френкеля [4, 63]. При ее реализации на поверхности жидкости возникают эмиссионные выступы – конусы Тейлора [68], с вершин которых выбрасываются заряженные струйки, распадающиеся на отдельные капли. Квадрат плотности электрического заряда χ на свободной поверхности на пороге реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля определится соотношением $\chi^2=(\gamma/2\pi\alpha)$.

Сферическая капля радиуса R_0 несжимаемой электропроводной жидкости, несущая заряд Q , в вакууме претерпевает электростатическую неустойчивость при выполнении соотношения [1]: $(Q^2/16\pi R_0^3\gamma) \geq 1$. При этом становится неустойчивой основная мода капиллярных осцилляций капли с $n=2$, соответствующая деформации сферической капли к форме вытянутого сфероида. Возбуждение осцилляций с $n=0$, соответствующей радиальным центрально симметричным осцилляциям сферической капли, в несжимаемой жидкости невозможно. Также невозможно в системе координат, связанной с центром масс капли, возбуждение моды с $n=1$, соответствующей смещению капли как целого [1]. При реализации неустойчивости моды с $n=2$ капля вытягивается в сфероид, поверхностная плотность электрического заряда на ее вершинах при этом увеличивается, что приводит к реализации неустойчивости более высоких мод осцилляций капли, чем основная [69]. В результате суперпозиции амплитуд всех неустойчивых мод на вершинах капли образуются эмитирующие выступы, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда [70]. Квадрат поверхностной плотности заряда на капле на пороге реализации электростатической неустойчивости удовлетворяет условию $\chi^2 = 2 \cdot (\gamma/2\pi R_0)$.

Видно, что для реализации электростатической неустойчивости сильно заряженной капли квадрат плотности электрического заряда на ее поверхности в два раза больше, чем для реализации электростатической неустойчивости плоской поверхности жидкости. Причиной такого положения дел является действие капиллярных сил, сжимающих каплю и оказывающих на ее возмущенную поверхность давление $2\gamma/R_0$, тогда как на плоской возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости такое давление отсутствует. Из соображений симметрии можно предположить, что для реализации *электростатической* неустойчивости боковой поверхности цилиндрической струи радиуса R квадрат поверхностной плотности электрического заряда на ней должен лежать внутри интервала значений, ограниченных соответствующими значениями для капли и плоской поверхности, т. е. в диапазоне $(\gamma/2\pi R_0) \leq \chi^2 \leq 2 \cdot (\gamma/2\pi R_0)$. Это

условие согласуется с критическим условием реализации неустойчивости неосесимметричной моды струи с $m=2$ при $k \approx 0.789$: $w \equiv 4\pi\chi^2 R_0 / \gamma = 2.904$, откуда следует соотношение для квадрата поверхностной плотности электрического заряда: $\chi^2 \approx 1.45 \cdot (\gamma / 2\pi R_0)$. (Качественно сходные рассуждения положены в основу исследования устойчивости заряженной струи по отношению к расщеплению на две при возбуждении неустойчивости моды с $m=2$ в [69], но авторы ограничились приравниванием капиллярного и электростатического давлений на поверхности невозмущенной струи и пришли к критерию реализации неустойчивости: $\chi^2 = 1.5 \cdot (\gamma / 2\pi R_0)$).

Как только выполнится условие $\chi^2 > 1.45 \cdot (\gamma / 2\pi R_0)$ для моды с $m=2$ амплитуда волны с $k \approx 0.789$ на свободной поверхности струи начнет увеличиваться и, согласно сказанному выше, поперечное сечение струи станет деформироваться, принимая форму эллипса. Ориентация осей эллипса при фиксированном z будет зависеть от времени t , а при фиксированном t – от координаты z , определяющей положение поперечного сечения струи вдоль оси. При эллиптической деформации сечения струи поверхностная плотность электрического заряда в окрестности вершин эллипса будет увеличиваться по сравнению с ее значением на цилиндрической струе. Когда χ^2 достигнет величины $\chi^2 = 4$, претерпит неустойчивость мода с $m=3$; когда χ^2 достигнет величины $\chi^2 \approx 5.7$, претерпит неустойчивость мода с $m=4$, и т. д. По аналогии с заряженной каплей [70–72] можно ожидать, что эта последовательность возбуждения все более высоких мод будет реализовываться, пока на боковой поверхности струи (на ребрах скрученного эллиптического цилиндра), не сформируются эмиссионные выступы, с вершин которых будут выброшены тонкие струйки, распадающиеся на отдельные заряженные капельки, как это и отмечается в экспериментах [57, 58]. Тем не менее представляется, что описанная картина несколько идеалистична, а реальный физический механизм реализации *электростатической* неустойчивости боковой поверхности струи связан с формированием сложного рельефа на поверхности струи в

результате нелинейного взаимодействия волн, определяющих начальную деформацию струи, как это описано, например, в [47, 64, 65].

5. Влияние электропроводности жидкости (или эффекта релаксации электрического заряда). Исследование неустойчивости неосесимметричных волн на поверхности вязкой несжимаемой однородно объемно заряженной струи диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_d (в модели «вмороженного заряда») проведено в [73] методом прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса [32, 63]. Математическая формулировка задачи отличается от такой же задачи для идеально проводящей жидкости [62] необходимостью расчета электрического поля внутри и вне струи и заменой граничного условия постоянства потенциала на свободной поверхности струи в [62] на условие равенства его значений внутри и вне струи на границе раздела в [73]. Получающееся дисперсионное уравнение в асимптотике малой вязкости в общем виде записывается как (7), а все физические параметры, связанные с диэлектричностью жидкости, сосредоточены в функции $f(m, w, k)$, имеющей теперь в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \gamma = \rho = 1$, вид

$$f(k, m, w) \equiv 1 - k^2 - m^2 + \frac{w}{\varepsilon_d} \left[\varepsilon_d + 1 - \frac{\{2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)[H(k, m) - 1]\}(\varepsilon_d - 1)D(k, m) + 2}{1 + \varepsilon_d D(k, m) - H(k, m)} \right].$$

Параметр w определяется через заряд, приходящийся на единицу длины струи, тем же выражением, что и раньше. При переходе от диэлектрической жидкости к идеально проводящей (при $\varepsilon_d \rightarrow \infty$) это выражение для $f(k, m, w)$ сводится к определенному выше соотношением (7) (см. [62]).

Для объемно заряженных струй диэлектрических жидкостей [73] величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод снижаются по сравнению с идеально проводящей жидкостью, а также при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости ε_d . Эффект снижения инкрементов с уменьшением ε_d

проявляется тем сильнее, чем меньше азимутальное число m (чем меньше степень несимметричности), и достигает максимума для осесимметричных мод ($m=0$). Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями (например, водорода, гелия и т. п.) инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных условиях заметно превышать величины инкремента неустойчивости осесимметричных мод, как это видно из рис. 6а-б (см. [73]), что существенно скажется на закономерностях дробления струи на капли.

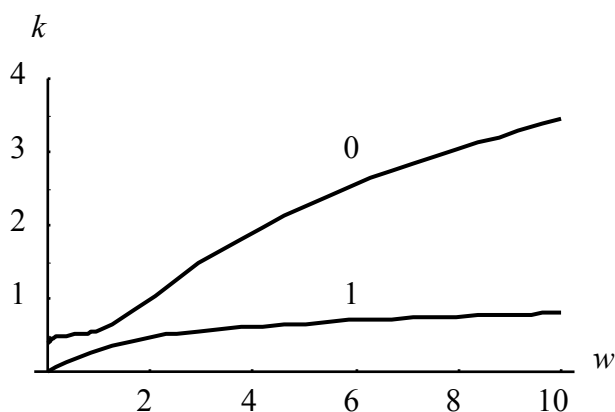


Рис. 6а. Зависимость волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом, от зарядового параметра w для осесимметричной и изгибающей волн

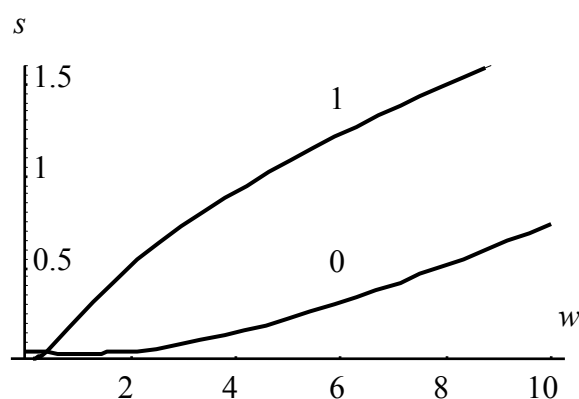


Рис. 6б. Зависимость максимального инкремента от зарядового параметра w для осесимметричной и изгибающей волн

Экспериментально и теоретически в рамках методики вынужденного капиллярного распада струй [6] распад поверхностно заряженной струи диэлектрической жидкости изучался в [74]. Экспериментально обнаружено увеличение длины нераспавшейся части струи при увеличении поверхностной плотности электрического заряда. В теоретической формулировке задачи авторы [74] намеревались учесть эффект релаксации электрического заряда. Однако в уравнении баланса поверхностной плотности электрического заряда на свободной поверхности струи они потеряли слагаемое, пропорциональное средней кривизне струи, а потому результаты теоретического анализа [74] не вполне корректны и могут содержать ошибки как количественного, так и ка-

чественного характера. Здесь целесообразно отметить, что попыток учета эффекта релаксации электрического заряда, содержащих указанную ошибку, в задачах расчета линейной устойчивости струй было много (см., например, [75–79]), на что указано в [80], где уравнение баланса строго выведено для произвольной криволинейной поверхности. Причина распространенности обсуждаемой ошибки – в механическом переносе уравнения баланса, выписанного для плоской поверхности и не содержащего слагаемого, пропорционального средней кривизне невозмущенной поверхности жидкости, на криволинейную поверхность. Отметим сразу, что в расчетах нелинейных волновых движений на заряженной поверхности жидкости с реальной электропроводностью учет обсуждаемого слагаемого необходим и в случае плоской равновесной поверхности жидкости [81].

Задача исследования устойчивости неосесимметричных волн на заряженной струе вязкой жидкости с конечной электропроводностью для струи в реальном поле, имеющем и радиальную и продольную компоненты, на основе правильно выписанного уравнения баланса заряда решена в [82] методом прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса [32, 62, 73]. От задач, решаемых в модели идеально проводящей жидкости или идеально диэлектрической, задача расчета волнового движения на заряженной поверхности жидкости с конечной проводимостью отличается тем, что локальное значение поверхностной плотности электрического заряда на струе является функцией координат и времени. Математическая формулировка задачи по сравнению с идеально проводящей струей пополняется уравнением баланса поверхностной плотности заряда:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi^{in} + \nabla_S \cdot (\chi \mathbf{U} + \chi b E_\tau \cdot \ddot{\mathbf{A}}) + \chi \frac{U_r}{r} = 0; \quad (12)$$

$$\nabla_S \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z; \quad 4\pi\chi = \mathbf{n} \cdot (\varepsilon_d \nabla \Phi^{in} - \nabla \Phi^{ex}),$$

здесь σ – удельная проводимость реальной жидкости; b – подвижность носителей заряда в жидкости; \mathbf{e}_φ и \mathbf{e}_z – орты осей цилиндрической системы координат; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – орты нормали и ка-

касательной к поверхности струи; Φ^{in} и Φ^{ex} – потенциалы электрического поля внутри и вне струи; U_r – нормальная компонента поля скоростей.

При записи уравнения баланса принято, что ее электрический потенциал выравнивается вдоль ее свободной поверхности за счет трех механизмов: 1) нормального к свободной поверхности тока проводимости, приводящего к выравниванию потенциала за характерное время максвелловской релаксации $\tau \sim \varepsilon_d/\sigma$; 2) переноса носителей заряда касательными к поверхности течениями жидкости, связанными с волновым движением в струе, выравнивающим потенциал поверхности за время порядка периода волны; 3) направленного переноса ионов вдоль свободной поверхности струи касательной к поверхности компонентой напряженности электрического поля $(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau})$ со скоростью движения ионов по поверхности \mathbf{V} , определяемой соотношением $\mathbf{V} = b(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$, где b – подвижность ионов, принимаемая для нижеследующих оценок одинаковой для ионов разных знаков.

Дисперсионное уравнение задачи относительно комплексной частоты s имеет в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \gamma = \rho = 1$, вид

$$\omega_m^2 = g_m(k) \left[k^2 + m^2 - 1 + w F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) + W F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \right]; \quad (13)$$

$$F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \equiv \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k))};$$

$$F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \equiv \frac{1}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)) \varepsilon_{in} \varepsilon_{ex}} \left[(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 g_m(k) h_m(k) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{in} (\varepsilon_{in} - 3\varepsilon_{ex}) g_m(k) - \varepsilon_{ex} (\varepsilon_{ex} - 3\varepsilon_{in}) h_m(k) + 4\varepsilon_{in} \varepsilon_{ex} \right];$$

$$h_m \equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \quad g_m \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}; \quad w \equiv E_0^2 / 4\pi; \quad W \equiv \pi \mu^2,$$

где μ – объёмная плотность индуцированного заряда.

При анализе решений дисперсионного уравнения (13) выяснилось [82], что релаксационные движения жидкости в струе имеют формально периодический характер, но декремент их затухания весьма велик. Они приводят к дополнительному (по сравнению с идеально электропроводной жидкостью) рассеиванию энергии в струе и, как следствие, к увеличению декрементов затухания и снижению инкрементов неустойчивости. Влияние эффекта релаксации заряда наиболее заметно сказывается на капиллярных движениях в струях слабопроводящих жидкостей.

6. Устойчивость струи в продольном электрическом поле.
В реальных установках для электродиспергирования жидкости, применяющихся в разнообразных приложениях феномена, используется система электродов, отличная от рассмотренной выше. Электродиспергирование происходит в системе электродов типа «игла-плоскость» [2, 5, 14, 39, 42, 57, 58, 66, 67] или «плоскость – игла – плоскость» [36, 42], когда продольная компонента электрического поля весьма велика. То же относится и к капле, выбрасывающей струи при реализации неустойчивости во внешнем электростатическом поле [3]. В системе электродов типа «игла-плоскость» распадающаяся на капли струя жидкости выбрасывается под влиянием электрического поля между капилляром и перпендикулярным к нему плоским противоэлектродом с вершины жидкого мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему. В такой системе электродов электрическое поле в окрестности струи реальной жидкости ориентировано преимущественно вдоль струи, а не радиально симметрично, как это принималось в п. 1–5. В этой связи встает проблема исследования устойчивости и капиллярного распада струй в продольном электрическом поле, которая рассматривалась в [69, 75, 79, 83–87].

В [83] в рамках энергетического подхода Рэлея [1, 26, 27, 29] рассмотрена устойчивость осесимметричной волны на поверхности идеальной несжимаемой цилиндрической струи диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_d^{(1)}$ в продольном электростатическом поле E_0 и сделан вывод, что такое поле увеличивает устойчивость струи. Дифференциальные урав-

нения (уравнения Лагранжа) для отыскания временной зависимости амплитуд a осесимметричных волн на струе согласно [83] имеют вид

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \left(\frac{\gamma}{\rho R_0^3} \right) \left[(1-x^2) - W \frac{(\varepsilon_d^{(2)} - \varepsilon_d^{(1)})^2 \cdot x \cdot I_0(x) \cdot K_0(x)}{\left[\varepsilon_d^{(1)} I_1(x) K_0(x) - \varepsilon_d^{(2)} I_0(x) K_1(x) \right]} \right] \left(\frac{x \cdot I_1(x)}{I_0(x)} \right) a;$$

$$W \equiv E_0^2 R_0 / 4\pi\gamma.$$

$\varepsilon_d^{(2)}$ – диэлектрическая проницаемость окружающей среды. Из этого уравнения, задавая вид искомого решения $\sim \exp(i\omega t)$ или $\sim \exp(\eta t)$ в зависимости от знака множителя при амплитуде a справа, можно получить дисперсионное уравнение. Из полученного уравнения в [83] делается вывод, что короткие капиллярные осесимметричные волны, для которых $x > 1$, на струе динамически устойчивы независимо от наличия электрического поля. Длинные капиллярные волны с $x < 1$ будут приобретать устойчивость с ростом напряженности внешнего продольного электростатического поля. При заданном значении величины напряженности электрического поля левая граница диапазона волновых чисел устойчивых волн ($x = 1$ в отсутствие электрического поля) определится из соотношения

$$\frac{\left[\varepsilon_d^{(1)} I_1(x) \cdot K_0(x) - \varepsilon_d^{(2)} I_0(x) \cdot K_1(x) \right]}{(\varepsilon_d^{(2)} - \varepsilon_d^{(1)})^2 (1-x^2) \cdot x \cdot I_0(x) \cdot K_0(x)} = W.$$

С ростом напряженности поля эта граница смещается в область более малых волновых чисел (более длинных волн). Область же неустойчивых волн будет при этом сужаться, а величина инкремента наиболее неустойчивой волны уменьшаться. Естественно ожидать, что для некоторой критической величины напряженности поля область неустойчивости исчезнет совсем. Тем не менее можно показать, что в использованной в [83] модели идеальной жидкости для как угодно большой величины напряженности поля существует область значений волновых чисел в окрестности $x = 0$, в которой волны будут неустойчивы, хотя инкременты неустой-

чивости и будут малы. На появление порогового для прекращения реализации неустойчивости осесимметричных волн на поверхности струи значения напряженности электрического поля вроде бы можно рассчитывать при учете реальной вязкости жидкости. С другой стороны, известно, что в нормальном к свободной заряженной поверхности электростатическом поле вязкость на критические условия реализации аperiodической неустойчивости не влияет, хотя и снижает величину инкремента неустойчивости. Это физически понятно: вязкость жидкости снижает скорости относительного движения элементарных объемов жидкости друг относительно друга, но не препятствует возникновению самого движения. Как угодно малой силой, действующей в течение достаточно длительного интервала времени, жидкость или тело, погруженное в нее, можно привести в движение. В этой связи заключение работы [84] о возможности полного подавления неустойчивости капиллярных волн на поверхности струи продольным электрическим полем представляется ошибочным. Но общий вывод работы [83], что продольное электрическое поле повышает устойчивость осесимметричных волн на поверхности струи диэлектрической жидкости, справедлив.

Саму неустойчивость осесимметричных волн следует именовать капиллярной, так как именно капиллярные силы приводят к дроблению струи, а электрические силы мешают этому процессу.

Интересно, что заметное сужение диапазона волновых чисел, в котором реализуется капиллярная неустойчивость, имеет место при достаточно малых напряженностях внешнего поля. Диапазон неустойчивости в отсутствие поля (при $W = 0$) $x < 1$, при $\varepsilon_d^{(1)} = 80$ и $\varepsilon_d^{(2)} = 1$ снижается до $x < 0.82$ уже при $W = 0.001$, и до $x < 0.064$ при $W = 0.1$. Для сравнения отметим, что в нормальном к поверхности струи электрическом поле параметр $w \equiv \mu^2 / \pi R_0 \gamma$, являющийся аналогом W , начинает реально сказываться на ширине диапазона неустойчивых волн и на величинах инкрементов лишь при больших величинах, начинающихся с $w \sim 1$ (см. рис.1а). По-видимому, именно этот эффект позволяет истолковать результаты экспериментов Рэля [26] и Френкеля [42] по стабилизации струй при малой их электризации, поскольку электризация струй вызыва-

лась внешним электрическим полем, имеющим большую продольную составляющую. Усиление диспергирования струй при интенсивной электризации связано с усилением действия нормальной компоненты внешнего электрического поля.

Условие (13) и основные выводы [83] относительно стабилизирующего влияния продольного электрического поля на осесимметричные волны на поверхности струи совпадают с полученными ранее в работе [85], где в рамках прямого решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса для струи вязкой диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле в вакууме получено более общее дисперсионное уравнение, учитывающее вязкость жидкости:

$$\begin{aligned} & (\omega - 2ik^2\nu)^2 \frac{I_0(x)}{k \cdot I_1(x)} + 2i \frac{\nu}{R_0} (\omega - 2ik^2\nu) + \frac{4k^2\nu^2}{R_0 I_1(qR_0)} [qR_0 I_0(qR_0) - I_1(qR_0)] - \\ & - \frac{\gamma}{\rho R_0^2} (1 - x^2) - \frac{(\varepsilon_d^{(1)} - 1)^2 \cdot E_0^2 \cdot k \cdot I_0(x) \cdot K_0(x)}{4\pi\rho [\varepsilon_d^{(1)} I_1(x) K_0(x) - I_0(x) K_1(x)]} = 0; \quad q^2 \equiv k^2 + i\omega/\nu. \end{aligned}$$

В [85] говорится о стабилизирующем влиянии вязкости жидкости, но конкретных численных оценок не проводится.

В [86] подтвержден вывод [83, 85] об увеличении устойчивости осесимметричных волн на поверхности струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле и исследована устойчивость такой струи в периодическом во времени продольном электрическом поле. Как и следовало ожидать, в последнем случае дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее временную эволюцию мод капиллярных волн под влиянием периодического электрического поля, является уравнением Матье. В соответствии с теорией уравнения Матье вопрос об устойчивости капиллярных волн той либо иной частоты на поверхности струи зависит от частоты приложенного продольного периодического электрического поля. Однако для получения более строгих физических результатов необходимо принять во внимание вязкость жидкости. Учет вязкости приведет к появлению порога по амплитудному значению величины электрического поля, начиная с которой возможна периодическая раскачка волн

(см. [87]). В работе [87] устойчивость волн на поверхности струи вязкой жидкости с реальной электропроводностью в продольном периодическом во времени электрическом поле рассматривается при одновременном учете тепло- массообмена с окружающей средой.

В [84] решается более общая задача – об устойчивости осесимметричных волн на поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в продольном электростатическом поле при наличии вязкой внешней среды, обладающей отличной от нуля электропроводностью. Собственно говоря, в этой работе делается попытка одновременно учесть наличие и продольной, и нормальной к поверхности струи компонент электрического поля. Однако физическая модель формирования электрического поля у поверхности струи очерчена весьма поверхностно, а реальный перенос заряда по струе не принимается во внимание. Это делает весьма интересную по постановке работу не вполне корректной. Тем не менее в [84] подтверждается вывод [83, 85–88] об увеличении устойчивости осесимметричных волн в продольном электростатическом поле. В более поздней работе [75] формулировка задачи устойчивости волн на поверхности струи реальной жидкости [84] несколько изменяется: внешняя среда убирается, но учитывается эффект релаксации заряда (как и в более поздних работах [76, 77]). Дисперсионное уравнение, полученное в работе [75], выписывается для произвольной моды m , что позволяет автору исследовать и осесимметричные волны $m = 0$ и изгибные $m = 1$. К сожалению, уравнение баланса заряда на поверхности струи выписывается не полностью: опускается слагаемое, пропорциональное кривизне поверхности невозмущенной струи (см. предыдущий раздел п. 5), что делает полученные в [75] не вполне корректными. Та же ошибка делается и в основательных работах [76, 77].

В работах [79, 89] рассмотрена устойчивость первых трех мод струи реальной вязкой жидкости с конечной электропроводностью в продольном электростатическом поле. Причем проявление неустойчивости моды с $m = 2$ интерпретируется как расщепление струи на две. Экспериментально такой феномен зафиксирован [69, 79, 89] для полимерных веществ и является основой

для целого направления электродиспергирования жидкостей, называемого электропрядением (electrospinning) [90]. Однако теоретические модели феномена поперечного расщепления струй не вполне четко очерчены. Так, в [69] в основу теоретической модели положена идея распада заряженной струи электропроводной жидкости, когда давление электрического поля собственного заряда на поверхность струи превысит давление капиллярных сил под цилиндрической поверхностью струи. На самом деле, такой порог существует, о чем говорилось в п. 4 настоящего обзора, но при его достижении становится неустойчивой по отношению к давлению электрического поля боковая поверхность струи и струя начинает деформироваться к фигуре типа скрученного цилиндра эллиптического сечения. Чтобы можно было говорить о расщеплении струи на две, необходимо, прежде всего, ограничить рассмотрение бесконечно длинными волнами, как сделано в [91, 92]. Дальше необходимо обосновать подавление неустойчивости мод с $m > 2$ на ребрах скрученного эллиптического цилиндра, чтобы не начался сброс поверхностного заряда путем эмиссии дочерних сильно заряженных струек или капелек. Это можно обосновать влиянием вязкости жидкости, наиболее сильно подавляющей неустойчивость высоких мод, как это сделано, например, при анализе механизма сброса избыточного заряда сильно заряженной каплей [71, 93]. Так, в [71, 93] показано, что для очень маленьких ($R \sim 0.1 \mu m$) капелек, заряженных выше Рэлеевского предела [1], вязкость жидкости подавляет неустойчивость высоких мод, тогда как амплитуда основной моды нарастает экспоненциально со временем и капля, в конце концов, может разделиться на две дочерние равных размеров. В теоретических моделях [69, 90, 91] вязкость жидкости во внимание не принималась, жидкости считались идеально проводящими, струи поверхностно заряженными и их распад на две рассматривался в поле электрических сил, перпендикулярных поверхности струи, а не в продольном поле, как в [79, 89]. В этой связи, предложенные в [69, 89] модели не вполне адекватны.

7. Исследование устойчивости волн на поверхности заряженной струи с формой, отличной от прямого кругового цилиндра. В работах [79, 89] физическая и математическая модели

работы [75] обобщаются для учета отличия формы струи от цилиндрической. Реальная форма струи, вытягиваемой из капилляра внешним электрическим полем, не является прямым круговым цилиндром, что отмечалось и исследовалось в значительном количестве работ [89, 94–98]. По мере удаления от места возникновения радиус струи уменьшается по закону $R \sim z^{-1/4}$. Это приводит к тому, что влияние давления электрического поля и вязкости жидкости в различных сечениях струи (на разных расстояниях от торца капилляра) будут неодинаковы. Так, если рассмотреть идеализацию идеально проводящей струи, то для струи, поддерживаемой при постоянном потенциале, давление электрического поля на ее поверхность при уменьшении радиуса будет изменяться обратно пропорционально квадрату радиуса. В итоге различные участки струи будут не эквивалентны по отношению к реализации неустойчивости волн с различными волновыми и азимутальными числами.

Экзотичность формы боковой поверхности струи, не совпадающей ни с одной из существующих координатных поверхностей, исключает возможность записи дисперсионного уравнения для всей струи. Как правило, выбирают участок струи с формой, мало отличающейся от прямого кругового цилиндра, принимают, что форма участка является цилиндрической, и для него выписывают дисперсионное уравнение, которое и анализируют [89]. Такой анализ, проведенный для различных участков струи, которые можно заменять цилиндрическими струями разных радиусов, позволяет получить информацию о закономерностях реализации неустойчивости волн на различных частях струи. Но вместе с тем существует более корректный регулярный асимптотический метод разложения невозмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности струи по ее отклонению от поверхности, совпадающей с одной из координатных. В близких по тематике задачах этот метод с успехом применяется для исследования закономерностей реализации неустойчивости сильно заряженных капель, равновесные формы которых в совокупности внешних силовых полей отличны от сферической [38, 51, 52, 70, 99–102].

В связи со сказанным в [47, 101] путем разложения невозмущенной границы струи по малому отклонению от формы прямого кругового цилиндра решена модельная задача, позволяющая в одном дисперсионном уравнении учесть влияние деформации формы струи. Модельная задача, рассмотренная в [47, 101] сводится к следующему. На бесконечную однородно поверхностно заряженную цилиндрическую струю электропроводной вязкой несжимаемой жидкости наложено длинноволновое синусоидальное возмущение конечной амплитуды a , много меньшей радиуса струи: $a \cdot \sin(k_* \cdot z)$, где $(a/R) \ll 1$, а длина волны $\lambda_* \equiv (2\pi/k_*) \gg R$. Исследуется устойчивость волн произвольной симметрии с волновыми числами, много большими волнового числа модельной синусоидальной деформации (см. рис. 7а-б) на участке струи между максимумом и минимумом синусоиды, где синусоиду можно аппроксимировать прямой линией. Уравнение свободной поверхности струи запишется в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + a \cdot \sin(k_* z) + \xi(\varphi, z, t) \equiv r(z) + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll a \ll R,$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение, вызванное капиллярным волновым движением теплового происхождения с амплитудой $\sim \sqrt{\kappa T / \gamma}$.

Математическая формулировка задачи выписывается в линейном по a и $|\xi|$ приближении с сохранением слагаемых, пропорциональных a , $|\xi|$ и $a \cdot |\xi|$, как это делалось в [38, 51, 52, 70, 99–102] при исследовании осцилляций и устойчивости сфероидальных капель (сплюснутых и вытянутых) в сферической системе координат, т. е. с формально матфизической точки зрения речь идет об аналитическом асимптотическом методе анализа устойчивости струи при наличии двух малых параметров, различающихся порядками малости.

Получающееся в итоге последующего решения классическими методами дисперсионное уравнение имеет громоздкий вид, поэтому выпишем его в линейном приближении по вязкости. В безразмерных переменных, в которых $R_0 = \rho = \gamma = 1$, указанная асимптотика дисперсионного уравнения для участка струи, показанного на рис. 7б, имеет вид

$$S^2 \cdot B_2(k, m, \eta) + 2Sv \cdot B_1(k, m, \eta) + B_0(k, m, w, \eta) = 0; \quad (14)$$

$$B_0(k, m, w, \eta) \equiv \left[2D(k, m) + \eta \cdot 2\gamma_1(k) + \eta^2 \cdot \gamma_2(k) \right] \left\{ -f(k, m, w) + \eta \left[2 - 2m^2 - w \left[3 - k^2 - m^2 + (1 + H(k, m))(H(k_*, 0) - 1) + (2 + H(k, m))(H(k, m) - 1) \right] \right] \right\} + \eta^2 \cdot \left\{ 3m^2 - 0.5 \cdot w \left[5k^2 + 7m^2 - (10 - 2k^2 - 2m^2 + 7H(k, m) + 2H^2(k, m))H(k, m) \right] \right\};$$

$$B_1(k, m, \eta) \equiv 2\gamma_1(k) + \eta \cdot 2\gamma_2(k) + \eta^2 \cdot \gamma_3(k) - 4ik \cdot D(k, m) \cdot \eta';$$

$$B_2(k, m, \eta) \equiv 2 + 2\eta \cdot D(k, m) + \eta^2 \cdot \gamma_1(k); \quad \eta \equiv a \cdot \sin(k_* \cdot z);$$

$$\eta' = ak_* \cdot \cos(k_* z);$$

$$\gamma_1(x) \equiv x^2 + m^2 - D(k, m); \quad \gamma_2(x) \equiv -x^2 - 3m^2 + (x^2 + m^2 + 2) \cdot D(k, m);$$

$$\gamma_3(x) \equiv x^4 + (3 + 2m^2)x^2 + m^2(11 + m^2) - 2(x^2 + 3m^2 + 3)D(k, m).$$

Численные расчеты по (14), ориентированные на исследование зависимости инкрементов неустойчивости волн в области неустойчивости и частот волн в области их устойчивости от величины деформации формы струи, показывают, что изменение деформации от a до $-a$ для осесимметричной волны ($m = 0$) приводит к монотонному увеличению инкрементов неустойчивости и снижению частот волн. Положения максимумов инкрементов при этом смещаются в область более длинных волн, и этот эффект проявляется более отчетливо с ростом w . Амплитуда изменения величин инкрементов измеряется десятками процентов от их значений при $a = 0$ и растет с увеличением амплитуды деформации a и параметра w . Ширина диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам, при изменении деформации от a до $-a$ уменьшается. Для изгибной моды ($m = 1$), в отличие от осесимметричной моды ($m = 0$), величина инкремента изменяется немонотонно. Все же остальное, сказанное про осесимметричную моду, остается в силе и для изгибной моды.

В качественном отношении большинство полученных в [47, 101] результатов предсказуемо из общезначимых соображений на основе результатов расчетов для струй, имеющих формы прямого кругового цилиндра, но теперь зависимости величин инкрементов и частот волн от величин деформации можно исследовать в рамках одного дисперсионного уравнения.

8. Нелинейные волны на поверхности струи заряженной идеальной несжимаемой жидкости. Первые два аналитические теоретические анализа устойчивости осесимметричных волн конечной амплитуды на поверхности незаряженных цилиндрических струй идеальной несжимаемой жидкости появились практически одновременно [104–105] во второй половине прошлого века. В обоих исследованиях использовался метод растянутых координат, но в работе [104] он применялся ко времени и к продольной координате, в [105] – только ко времени. Основное внимание уделялось возможному уточнению результатов линейной теории, а именно исследованию влияния конечности амплитуды волн на волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости, и на положение границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами (напомним, что в линейной теории положение этой границы определялось соотношением $k^2 R_0^2 = 1$ [26]). Выяснилось, что результаты расчетов зависят от вида начальных условий и что поправки квадратичны по малому параметру, в качестве которого принималась амплитуда начальной деформации. Сами же искомые поправки, полученные в работах [104–105], различались между собой. В последующем исследовании [106] было высказано предположение, что метод растянутых координат не подходит для расчета нелинейных волн на поверхности струи, предложено использовать метод разных временных масштабов и получены результаты, отличные от результатов работ [104–105]. Дальнейшие исследования выявили еще одно приложение теории нелинейных волн на струе – феномен сателлитообразования. В экспериментах (см., например, обзор [107]) выяснилось, что струя редко распадается на капли одинаковых размеров, определяемых волновым числом наиболее неустойчивой волны. В реальности отделяющаяся от струи капля связана со струей перемычкой, которая образует еще одну малень-

кую капельку – сателлит. В рамках линейной теории этот феномен непонятен, в нелинейных расчетах выясняется, что вследствие нелинейности уравнений гидродинамики, кроме волны с волновым числом k_* , определяющей распад струи на капли в рамках линейных представлений, на струе возникают и волны с кратными волновыми числами $j \cdot k_*$, где j – целое число. Реальный распад струи на капли определяется суперпозицией всех существующих на струе волн, что и приводит к образованию перетяжки и капель сателлитов. Впрочем, сведения о первых экспериментальных и теоретических исследованиях нелинейных волн на поверхности незаряженных цилиндрических струй идеальной несжимаемой жидкости и их устойчивости можно найти в обзорах [35, 107].

Теоретические аналитические исследования нелинейных осцилляций и устойчивости заряженных цилиндрических струй начались с работ [108, 109], в которых изучалась устойчивость струи электропроводной жидкости в радиальном электростатическом поле. А точнее, исследовалось влияние электрического поля на волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости, на положение границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами и на закономерности образования капель сателлитов. В [108] решение с сохранением нелинейных поправок третьего порядка малости искалось методом растянутых параметров в диапазоне волновых чисел, в котором реализовывалась капиллярная неустойчивость. Было найдено, что граница диапазона устойчивых волн зависит от квадрата амплитуды начальной деформации и параметра w , к которому чувствительны и размеры сателлитов. Очевидным недостатком работы [108] является то, что не все используемые в ней обозначения, в том числе и входящие в запись окончательного результата, пояснены в тексте.

В [109] методом многих пространственных и временных масштабов исследовалась устойчивость волнового пакета на поверхности заряженной струи, составленного из капиллярных волн по отношению к которым струя капиллярной неустойчивости не претерпевает. Условие исчезновения секулярных слагаемых третьего порядка малости позволило выписать нелинейное эволюционное уравнение для амплитуд волн, на поверхности струи,

имеющее вид нелинейного уравнения Шредингера. Выяснилось, что волновой пакет модуляционно неустойчив. Выписано решение второго порядка малости для коротких периодических капиллярных волн на поверхности заряженной струи, в котором, однако, отсутствуют компоненты, описывающие нелинейное резонансное взаимодействие волн. Нелинейные поправки к частотам волн не найдены.

Кроме того, имеются и работы, выполненные численными методами [46, 110], посвященные исследованию влияния электрического поля на закономерности отрыва капель и образования сателлитов при капиллярном распаде струи. На этих работах, однако, не будем останавливаться, ввиду стандартных ограничений общности рассмотрений, проведенных численными методами.

Одновременно с работами [108, 109] начались систематические теоретические аналитические исследования нелинейных осцилляций заряженных капель (см., например, обзоры [111, 112] и указанную там литературу). В этих исследованиях были отработаны методы аналитического расчета и определены объекты изучения нелинейной устойчивости заряженной поверхности жидкости: внутренние нелинейные резонансы, нелинейные поправки к частотам и критическим условиям реализации неустойчивости.

В [113–116] исследовались нелинейные волны на заряженной поверхности струи идеальной электропроводной несжимаемой жидкости. Главное различие между задачами исследования линейных и нелинейных волн проявляется в том, что, как правило, целью линейных задач является вывод и анализ дисперсионного уравнения, а нелинейные задачи по своему смыслу являются эволюционными и решаются при наличии начальных условий. Для задач о волнах на поверхности бесконечно протяженных струй жидкости (равно как и для расчета нелинейных осцилляций заряженных капель [111–113] и нелинейных волн на плоской заряженной поверхности жидкости [114]) в качестве таких условий обычно берут деформацию струи в начальный момент времени и, например, распределение поля скоростей [108, 114–118]. Иногда второе начальное условие формулируется на финальной стадии решения задачи, исходя из требования наименьшей громоздкости получаемого решения [47, 111, 112, 114–118]. Начальная дефор-

мация струи может задаваться в виде единичной виртуальной волны [47, 115, 116, 118] и в виде волнового пакета [117]. Вторая ситуация является более общей и на ней следует остановиться подробнее.

В [117] методом многих временных масштабов исследовались волны конечной амплитуды на поверхности струи идеальной электропроводной несжимаемой жидкости в ситуации, когда начальная деформация формы струи определяется суперпозицией нескольких в общем случае неосесимметричных волн. В качестве малого параметра использовалось отношение амплитуды начальной деформации к радиусу струи. Искомыми функциями являлись: возмущение формы поверхности струи $\xi(\varphi, z, t)$, потенциал поля скоростей течения жидкости в струе $\Psi(r, \varphi, z, t)$ и потенциал электростатического поля вне струи $\Phi(r, \varphi, z, t)$.

Форма струи для случая, когда ее начальная деформация определена суперпозицией двух волн с волновыми числами $k_1 = k$ и $k_l \equiv l \cdot k$ с азимутальными числами m_1 и m_l в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \rho = \gamma = 1$, определяется выражением

$$\begin{aligned}
 r(z, \varphi, t) = & 1 + \varepsilon \cdot [h_1 \cos(m_1 \varphi) \cos(\vartheta_1) + h_l \cos(m_l \varphi) \cos(\vartheta_l)] + \quad (15) \\
 & + 0.25 \varepsilon^2 \cdot \left\{ [-0.5(h_1^2 + h_l^2) + h_1^2 a_1^{(2)} \cos(2m_1 \varphi) + h_l^2 a_l^{(2)} \cos(2m_l \varphi)] + \right. \\
 & + h_1^2 [\alpha_{11}^{(1)} \cos(2m_1 \varphi) + \alpha_{11}^{(3)}] \cos(2\theta) + h_l^2 [\alpha_{ll}^{(1)} \cos(2m_l \varphi) + \alpha_{ll}^{(3)}] \cos(2\vartheta_l) + \\
 & + h_1 h_l [(\alpha_{1l}^{(1)} + \alpha_{1l}^{(1)}) \cos[(m_1 + m_l) \varphi] + (\alpha_{1l}^{(3)} + \alpha_{1l}^{(3)}) \cos[(m_1 - m_l) \varphi]] \cos(\vartheta_1 + \vartheta_l) + \\
 & \left. + h_1 h_l [(\alpha_{1l}^{(2)} + \overline{\alpha_{1l}^{(2)}}) \cos[(m_1 + m_l) \varphi] + (\alpha_{1l}^{(4)} + \overline{\alpha_{1l}^{(4)}}) \cos[(m_1 - m_l) \varphi]] \cos(\vartheta_1 - \vartheta_l) \right\}; \\
 \alpha_{nl}^{(1)} \sim & 1 / \left[(\omega_{m_n}(k_n) + \omega_{m_l}(k_l))^2 - \omega_{(m_n+m_l)}^2(k_n + k_l) \right]; \\
 \alpha_{nl}^{(2)} \sim & 1 / \left[(\omega_{m_n}(k_n) - \omega_{m_l}(k_l))^2 - \omega_{(m_n+m_l)}^2(|k_n - k_l|) \right], \quad n \neq l;
 \end{aligned}$$

$$\alpha_{nl}^{(3)} \sim 1/\left[\left(\omega_{m_n}(k_n) + \omega_{m_l}(k_l) \right)^2 - \omega_{(m_n-m_l)}^2(k_n + k_l) \right];$$

$$\alpha_{nl}^{(4)} \sim 1/\left[\left(\omega_{m_n}(k_n) - \omega_{m_l}(k_l) \right)^2 - \omega_{(m_n-m_l)}^2(|k_n - k_l|) \right], \quad n \neq l;$$

$$\mathcal{G}_n \equiv n \cdot k_n \cdot z - \omega_{m_n} \cdot t,$$

где h_l – парциальный вклад l -й волны в начальную деформацию формы струи; $\omega_{m_n} \equiv \omega_{m_n}(k_n, m_n)$ – частота n -ой волны с волновым числом k_n и азимутальным числом m_n , являющаяся решением дисперсионного уравнения (7) при $\nu = 0$. Качественно схожую структуру имеют и решения для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе $\Psi(r, \varphi, z, t)$ и потенциала электростатического поля вне струи $\Phi(r, \varphi, z, t)$.

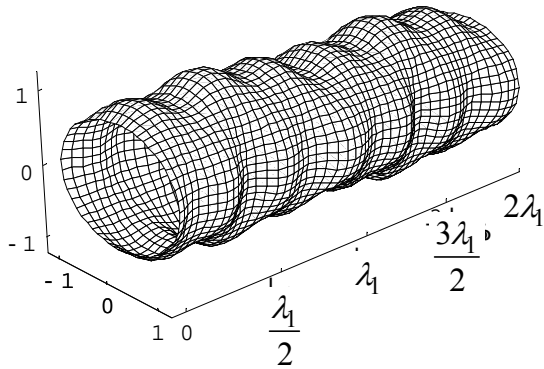


Рис. 8. Форма поверхности струи, рассчитанная по (12) при $k_1 = 1.25$, $k_1 = 3.75$, $m_1 = m_2 = 2$, $\chi = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$

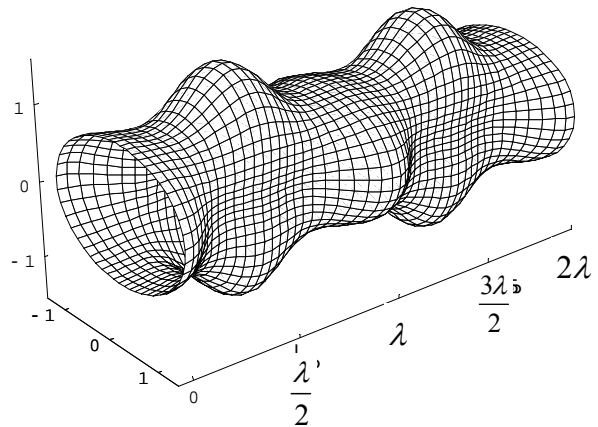


Рис. 9. Форма поверхности струи при $k = 2$, $m = 2$, $\varepsilon = 0.2$, $w = 3.3296$, $t = 0.5 T$

На рис. 8 приведен внешний вид струи, рассчитанный по (15) для ситуации, когда начальная форма определена суперпозицией двух волн. Согласно (15) за счет нелинейного взаимодействия волн, определяющих начальную деформацию струи, во втором порядке малости возбуждаются волны как с удвоенными волновыми и азимутальными числами, так и с волновыми и азимутальными числами, получающимися в результате сложения и вычитания волновых и азимутальных чисел. Из вида коэффициентов

$\alpha_{nq}^{(j)}$ при нелинейных поправках к форме струи, $\sim \varepsilon^2$, несложно видеть, что они имеют резонансный вид, т. е. при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами:

$$\left(\omega_{m_n}(k_n) \pm \omega_{m_l}(k_l) \right)^2 = \omega_{(m_n \pm m_l)}^2(k_n \pm k_l); \quad (16)$$

где $\omega_{m_n}(k_n)$ и $\omega_{m_l}(k_l)$ определяются дисперсионным уравнением (7). Для частот $\omega_{(m_n \pm m_l)}(k_n \pm k_l)$ дисперсионное уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} & \omega_{(m_n \pm m_l)}^2(k_n \pm k_l) = \\ & = D_{(m_n \pm m_l)}(|k_n \pm k_l|) \{ (k_n \pm k_l)^2 + (m_n \pm m_l)^2 - 1 + w[1 + H_{(m_n \pm m_l)}(|k_n \pm k_l|)] \}. \end{aligned}$$

Из теории нелинейного взаимодействия волн известно, что волны на поверхности жидкости могут эффективно обмениваться энергией при квадратичной нелинейности, характерной для гидродинамических задач, если их частоты ω_j и волновые вектора \vec{k}_j удовлетворяют соотношениям [119]:

$$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0; \quad (17)$$

$$\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, во взаимодействии должны участвовать, как минимум, три волны, а само взаимодействие называется трехволновым. Если волны не удовлетворяют указанным соотношениям, то эффект их взаимодействия имеет первый порядок малости по безразмерной амплитуде волны [119]. Для волн на поверхности струи, бегущих вдоль оси z , соотношение (18) примет скалярный вид:

$$k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0. \quad (19)$$

Сравнение (16) и (17) показывает, что, если принять $\omega_1 = \omega_{m_n}(k_n)$; $\omega_2 = \omega_{m_l}(k_l)$; $\omega_3 = \omega_{(m_n \pm m_l)}(k_n \pm k_l)$, эти условия идентичны, а условие (19) выполняется автоматически при $k_1 = k_n$; $k_2 = k_l$; $k_3 = k_n \pm k_l$. Поскольку частоты связаны с волновыми числами дисперсионным соотношением (7), то несложно видеть, что в отсутствие электрического заряда на струе условие (17) может выполняться только случайно. Для ситуации, когда начальная деформация струи определяется одной волной [116], этот вывод наглядно подтвержден расчетами по (7). Появление дополнительной степени свободы, связанной с наличием заряда на струе (с наличием параметра w), позволяющего изменять и частоты, и волновые числа волн и неодинаково сказывающегося на волнах с различными k и m , обеспечивает выполнение условий (17) и (19) для многочисленных комбинаций волновых k и азимутальных m чисел. Ситуация качественно такая же, как и для детально исследованной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, не имеющей резонансов в отсутствие заряда, но приобретающая значительное их количество при наличии заряда [120–124].

Если $k_n = k_l$ и $m_n = m_l$, то реализуется случай вырожденного нелинейного резонансного взаимодействия, характеризуемого тем, что одна волна из спектра волн, определяющих начальную деформацию, например k_1 , дважды взаимодействует с нелинейно возбуждающейся волной, например k_3 , передавая ей энергию. В этом случае условия резонансного взаимодействия (17), (19) переписутся в виде

$$2\omega_1 = \omega_3; \quad 2k_1 = k_3.$$

Вырожденное резонансное взаимодействие является единственным реализующимся в ситуации, когда начальная деформация струи определена одной волной. Если в резонансном взаимодействии принимают участие три различных волны – две, входящие в спектр волн, определяющих начальную деформацию, и одна из волн, возбуждающаяся за счет нелинейности, – то говорят о вторичном комбинационном резонансном взаимодействии. Когда начальная деформация струи определена суперпозицией несколь-

ких волн (волновым пакетом), то реализуется и вторичное комбинационное резонансное взаимодействие, и вырожденное.

В [116] проанализирована ситуация, когда начальная деформация струи определяется одной в общем случае неосесимметричной волной (см. рис. 9), и исследованы закономерности реализации вырожденного резонансного взаимодействия этой волны с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Выяснилось, что положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи. Оказалось, что осесимметричная волна ($m = 0$) может взаимодействовать с изгибной волной ($m = 1$). При вырожденном нелинейном резонансном взаимодействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из волны с $m = 1$, определяющей начальную деформацию, энергия может перекачиваться как в осесимметричную волну ($m = 0$) с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную с $m = 2$, также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с $m > 2$ возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе. Последнее условие может выполняться для тонкого конца электропроводной струи, выброшенной заряженной поверхностью жидкости, имеющей постоянный потенциал поверхности и, следовательно, неоднородное распределение поверхностного заряда, плотность которого будет увеличиваться с уменьшением радиуса струи по мере удаления от места ее зарождения [89, 94–98]. В итоге закономерности перераспределения энергии нелинейной волны за счет нелинейного резонансного взаимодействия будут различны для начального и конечного участков струи, что, в свою очередь, приведет к различию условий дробления струи на разных ее участках. При многомодовой начальной деформации общие закономерности реализации нелинейного волнового движения на струе остаются прежними, но, кроме вырожденных резонансов, появляются и вторичные комбинационные. В комбинационных резонансах возможен обмен энергией между длинными и короткими волнами в обоих направ-

лениях (от коротких к длинным и обратно), а также между волнами с различной симметрией (различающимися значениями азимутальных чисел).

В выражении (15) бросается в глаза, что нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации:

$$r(z, \varphi) = 1 - 0.25\varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}(h_1^2 + h_l^2) - h_1^2 a_1^2 \cos(2m_1\varphi) - h_l^2 a_l^2 \cos(2m_l\varphi) \right].$$

В [118] волны конечной амплитуды на поверхности электропроводной струи идеальной несжимаемой жидкости в ситуации, когда начальная деформация струи определяется одной в общем случае неосесимметричной волной, рассчитывались с сохранением слагаемых третьего порядка малости. В частности, для формы струи найдено выражение, имеющее в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \gamma = \rho = 1$, вид [118]:

$$\begin{aligned} r(\varphi, z, t) = & 1 + \varepsilon \cdot \cos(m\varphi) \cos \left\{ \mathcal{G} - \varepsilon^2 t [g(k)/\omega_m(k)] \right\} - (20) \\ & - 0.25 \cdot \varepsilon^2 [0.5 - (a_1 \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\mathcal{G}) - a_3 \cos(2m\varphi)] + \\ & + (\varepsilon^3/16) \{ [\alpha_1 \cos(3m\varphi) + \alpha_2 \cos(m\varphi)] \cos(3\mathcal{G}) + \alpha_3 \cos(3m\varphi) \cos(\mathcal{G}) \}; \\ a_1 \sim & 1/\left[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) \right]; \quad a_2 \sim 1/\left[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) \right]; \\ \alpha_j \sim & 1/\left[\omega_j^2 - \left(\omega_{m_j}(k_j) \right)^2 \right]; \quad \mathcal{G} \equiv k_m \cdot z - \omega_m \cdot t; \\ \omega_j \equiv & \{ 3\omega_m(k_j), 3\omega_m(k_j), \omega_m(k_j) \}; \quad k_j \equiv \{ 3k, 3k, k \}; \quad m_j \equiv \{ 3m, m, 3m \}. \end{aligned}$$

Коэффициенты, входящие в это выражение, подробно не выписываются ввиду их громоздкости. В них определены лишь резонансные ситуации. Коэффициент, определяющий нелинейную поправку к частоте, также является резонансным и содержит оба вырожденных резонанса, характерных для расчетов второго по-

рядка малости: $1/\left[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)\right]$; и $1/\left[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)\right]$. Резонансы, появляющиеся в поправках третьего порядка малости являются четырехволновыми, т. е. в них участвуют четыре волны. В вырожденной форме они записываются, например, в виде $1/\left[9\omega_m^2(k) - \omega_{3m}^2(3k)\right]$. В этом соотношении $\omega_{3m}(3k)$ – частота волны, в которую энергия перекачивается, а $\omega_m(k)$ – частота волны, определяющей форму начальной деформации, от которой энергия отбирается в трехкратном взаимодействии.

В расчетах третьего порядка малости, кроме поправок третьего порядка малости к амплитудным значениям потенциала поля скоростей волнового течения жидкости, электростатического потенциала и рельефу струи, мало сказывающихся на общих закономерностях реализации волнового движения конечной амплитуды, наиболее интересным результатом является появление нелинейных поправок к частотам волн $\sim \varepsilon^2 \cdot g(k, w)$. Наличие этих поправок приводит к изменению критических условий (критической длины волны и величины поверхностной плотности электрического заряда) реализации неустойчивости струи [56, 114, 118].

Как было показано выше в п. 3, условие реализации неустойчивости струи по отношению к действию сил поверхностного натяжения и давлению электрического поля заключается в прохождении квадрата частоты через нуль в область отрицательных значений. С учетом наличия нелинейной поправки к частоте в третьем порядке малости это условие приводит к соотношению

$$\left(\omega_m + \varepsilon^2 \frac{g(k, w)}{\omega_m}\right)^2 \approx \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 \cdot g(k, w) = 0.$$

Несложно видеть, что влияние нелинейной поправки на ширину диапазона волновых чисел, в котором волны на струе претерпевают капиллярную неустойчивость, волновое число наиболее неустойчивой волны k_{\max} , критическое значение параметра w_{\max} и на величину инкремента неустойчивости γ_{\max} будет различным при $g(k, w) > 0$ и при $g(k, w) < 0$.

В работе [125] методом растянутых временных и пространственных координат в расчетах третьего порядка малости при одноволновой неосесимметричной начальной деформации поверхности струи идеальной электропроводной жидкости были исследованы закономерности разбиения струи на капли. Показано, что нелинейная деформация профиля волны конечной амплитуды приводит к уменьшению характерного времени разбиения струи на капли. Нелинейное резонансное взаимодействие волн не исследовалось.

В работах [126, 127] рассмотрена устойчивость неосесимметричных волн конечной амплитуды на поверхности объемно заряженной (модель «вмороженного» заряда) струи идеальной диэлектрической несжимаемой жидкости. При сравнении с параметрами нелинейных волн на поверхности заряженной струи идеально проводящей жидкости выяснилось, что при равных электрических зарядах, приходящихся на единицу длины струи, характеристики волн (амплитуды нелинейных поправок, положения резонансов и т. п.) на поверхности объемно заряженной струи диэлектрической жидкости с малыми диэлектрическими проницаемостями могут существенно (на десятки процентов) отличаться от таковых для струи идеально проводящей жидкости.

Следует также отметить, что все аналитические исследования нелинейных осцилляций струй, как незаряженных, так и заряженных, проведены для модели идеальной жидкости, что существенно ограничивает возможность практического использования полученных результатов. Поэтому представляется необходимым проанализировать нелинейные осцилляции струи вязкой жидкости.

9. Нелинейные волны на поверхности цилиндрической струи заряженной вязкой электропроводной несжимаемой жидкости. Строгий учет вязкости жидкости в задачах о нелинейных волнах на плоской [128] и цилиндрической [129] заряженной поверхности жидкости или о нелинейных осцилляциях заряженных капель [130] и пузырьков [131] является достаточно сложной проблемой. Он стал возможен лишь в начале этого века с появлением мощной компьютерной техники и разработкой компьютерных пакетов аналитических вычислений. Тем не менее учет вязко-

сти жидкости в нелинейных расчетах устойчивости струй проводился начиная с семидесятых годов прошлого века в модели «тонкой струи» или квазиодномерной теории. В рамках этой теории струя рассматривается как одномерный объект, лишенный поперечных размеров, описываемый, однако, набором интегральных характеристик: радиусом сечения струи, коэффициентом поверхностного натяжения, коэффициентом вязкости, массовым расходом в сечении и т. п. [35, 60, 97, 107, 132, 133]. Поле скоростей волнового течения жидкости в струе при этом считается однородным по сечению струи (не зависящим от расстояния до оси). В основе такого подхода лежат идеи, заимствованные из теории пограничного слоя и теории течения вязкой жидкости в тонких слоях на твердом дне [32, 35]. Такое предположение выполняется для тонких струй, радиусы которых много меньше длины наиболее неустойчивой волны, когда радиус струи и скорость волнового течения медленно меняются вдоль продольной координаты. Обсуждаемая модель широко употребляется для анализа закономерностей дробления на капли заряженных струй (см., например, недавние работы [59, 60] и указанную там литературу) и, в частности, для исследования изгибной неустойчивости струй [35], весьма часто наблюдаемой при электродиспергировании жидкости [36, 57, 58, 65, 66]. В исследовании электропрядения (electrospinning) [90, 134] квазиодномерные уравнения являются основной математической моделью феномена. Следует отметить, что в линейном по амплитуде волн приближении квазиодномерная теория капиллярного распада струй начала разрабатываться с середины шестидесятых годов прошлого века [35, 107]. И тем не менее область применимости квазиодномерной теории недостаточно широка. Так, она вряд ли применима к представляющему большой практический интерес исследованию распада струи на капли в весьма сильном радиальном электрическом поле. Согласно сказанному в п. 2–3 с ростом величины заряда, приходящегося на единицу длины струи, длина волны, обладающей максимальным инкрементом, уменьшается и требование малости радиуса струи по сравнению с длиной наиболее неустойчивой волны уже не выполняется. Наложение на струю продольного электрического поля, согласно п. 6 и согласно экспериментальным данным [36, 57, 58, 65, 66] приводит

к увеличению длины нераспавшейся части струи, и в рамках классических представлений (см. [26] и п. 1 настоящей работы) должно приводить к разбиению струи на длинные куски, из которых будут получаться крупные капли. Однако в экспериментах по электродиспергированию жидкости отмечается (см. фотографии и рисунки в [36, 57, 58, 65, 66]), что струя дробится на капли с радиусами, сравнимыми с радиусами струй. По всей видимости, при наличии у поверхности струи и радиальной, и продольной компонент электрического поля большой величины одновременно реализуются несколько механизмов распада, характерных и для радиального, и для продольного электрических полей по отдельности. В таких условиях квазиодномерная теория также неприменима. Кроме того, эта теория не позволяет корректно учесть эффект релаксации электрического заряда на поверхности струи с реальной электропроводностью, хотя и часто используется в указанном контексте [87–89]. Это видно, например, из рис. 10а-d, где приведены зависимости от r и z радиальной и продольной компонент поля скоростей осесимметричного волнового течения жидкости в струе, рассчитанные в различные моменты времени для незаряженной струи воды для безразмерного волнового числа $k = 1.1$ и безразмерного значения коэффициента кинематической вязкости $\nu = 0.01$.

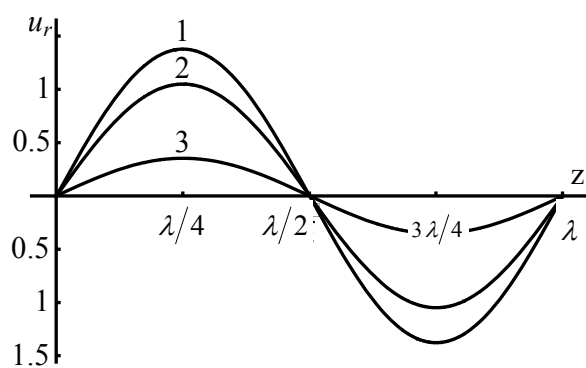


Рис. 10а. Зависимости от координаты z величины радиальной компоненты безразмерной скорости u_r на свободной поверхности струи ($r = 1$) в разные моменты времени, измеренного в периодах волны: 1) $t = 0$; 2) $t = T$; 3) $t = 5T$, рассчитанные при $k = 1.1$;

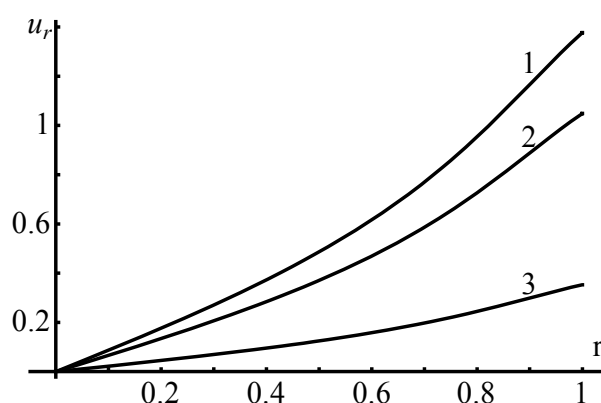


Рис. 10б. Зависимости от координаты r величины радиальной компоненты скорости u_r при $z = \lambda/4$ в разные моменты времени: 1) $t = 0$; 2) $t = T$; 3) $t = 5T$, рассчитанные при $k = 1.1$; $w = 0$; $\nu = 0.01$

$$w = 0; \nu = 0.01$$

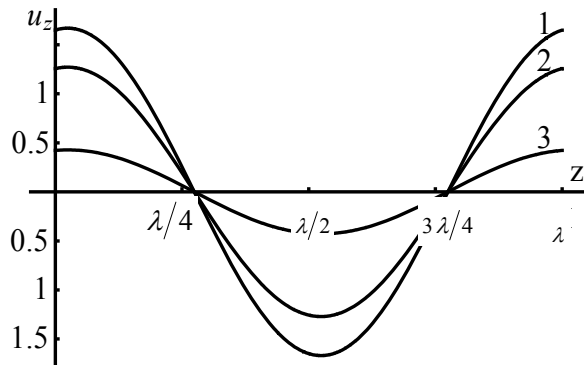


Рис. 10с. Зависимости от координаты z величины продольной компоненты скорости u_z на свободной поверхности струи ($r = 1$) в разные моменты времени: измеренного в периодах волны: 1) $t = 0$; 2) $t = T$; 3) $t = 5T$, рассчитанные при $k = 1.1$; $w = 0$; $\nu = 0.01$

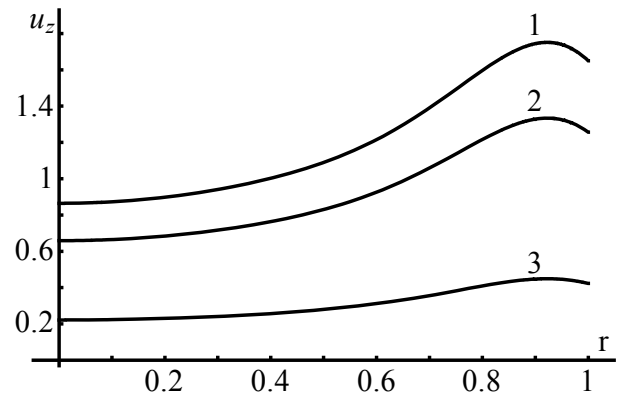


Рис. 10d. Зависимости от координаты r величины продольной (осевой) компоненты скорости u_z при $z = 0$; λ в разные моменты времени, измеренного в периодах волны: 1) $t = 0$; 2) $t = T$; 3) $t = 5T$; рассчитанные при $k = 1.1$; $w = 0$; $\nu = 0.01$

Из рис. следует, что входящие в гидродинамические граничные условия и уравнение баланса электрического заряда на поверхности струи (12) характеристики поля скоростей U_r и U_z непостоянны ни по радиальной, ни по продольной координатам, а производные $\partial U_r / \partial r$, $\partial U_z / \partial r$ и $\partial U_r / \partial z$, $\partial U_z / \partial z$ немалы и при достаточно больших временах от начала процесса, являясь функциями точки. Впрочем, и само исходное предположение о быстром установлении однородного по радиусу распределения поля скоростей в струе выполняется только при достаточно больших значениях безразмерной вязкости.

Вопрос о применимости модели одномерной струи для расчета закономерностей распада заряженных струй в линейном по амплитуде волн приближении неоднократно обсуждался в научной литературе (см., например, [136, 137]). Результаты аналитических расчетов линейного приближения сравнивались с результатами нелинейных численных расчетов для трехмерной струи вязкой жидкости [136]. Были предложены модификации одномерного приближения с постулированием заранее заданных закономерностей рас-

пределения поля скоростей по радиусу струи в широком диапазоне изменения физико-химических характеристик жидкости [137].

Результаты проведенных оценок вселяют сдержанный оптимизм (при условии принятия некоторых ограничений на физико-химические характеристики жидкостей) по поводу возможности использования одномерных моделей для расчета закономерностей электродиспергирования заряженных струй со значительной вязкостью и указывают на заметные погрешности, допускаемые в расчетах для маловязких жидкостей [137]. В связи со сказанным строгое аналитическое асимптотическое решение задачи расчета волн конечной амплитуды на поверхности толстой струи вязкой несжимаемой жидкости, выполненное в [129] методом прямого разложения по безразмерной амплитуде волны, представляется своевременным.

Выражение для образующей формы поверхности струи вязкой электропроводной несжимаемой жидкости, выписанное с точностью до второго порядка малости в безразмерных переменных, в которых $R_0 = \gamma = \rho = 1$, согласно [129] имеет вид

$$r(z, t) = 1 + \varepsilon \xi_{k_0}^{(1)}(t) \exp(-ik_0 z) + \varepsilon^2 \left[\xi_{2k_0}^{(2)}(t) \exp(-i2k_0 z) + \xi_2^{(2)}(t) \right]; \quad (21)$$

$$\xi_{k_0}^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\xi}^{(n)} \exp(S_{k_0}^{(n)} t); \quad \xi_2^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{\xi}^{(n)} \overline{a_{\xi}^{(m)}} \exp\left[\left(S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}}\right)t\right];$$

$$\xi_{2k_0}^{(2)}(t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\frac{\beta_{nm}(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})}{\left(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)}\right)^2 D(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})} \exp\left[\left(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)}\right)t\right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}(2k_0, S_{2k_0}^{(j)})}{\left(S_{2k_0}^{(j)} - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)}\right) \left(S_{2k_0}^{(j)}\right)^2 \left(\partial_S D(2k_0, S)\right)\big|_{S=S_{2k_0}^{(j)}}} \exp\left[S_{2k_0}^{(j)} t\right] \right].$$

В приведенных выражениях $\partial_S D(k_0, S_{k_0}^{(n)})$ – значение производной по переменной S от функции $D(k, S)$, определяющей вид

дисперсионного уравнения, вычисленное при $k = k_0$ и $S = S_{k_0}^{(n)}$. Каждое из дисперсионных уравнений $D(k_0, S) = 0$ и $D(2k_0, S) = 0$ (по корням которых ведётся суммирование в выражениях для амплитуд $\xi_{k_0}^{(1)}(t)$ и $\xi_{2k_0}^{(2)}(t)$) имеет по паре комплексно сопряжённых корней, соответствующих затухающему колебанию поверхности струи, и бесконечное количество вещественных отрицательных корней, описывающих апериодически затухающие её движения. С ростом номера корня абсолютная величина вещественных корней быстро нарастает, т. е. движения, соответствующие этим корням, весьма быстро затухают и практически не реализуются. Поэтому при конкретных расчётах по выражениям (21) в суммах достаточно ограничиться учётом конечного числа слагаемых. Для расчёта амплитуд первого порядка $\xi_{k_0}^{(1)}(t)$ существенным является только первый комплексный корень, учёт вещественных корней практически не изменяет вида этой функции. Сходимость рядов в выражении для амплитуды второго порядка $\xi_{2k_0}^{(2)}(t)$ хуже: количество значений j , необходимых для учёта членов, приходится оценивать отдельно для различных наборов начальных данных, но, как правило, оно лежит в пределах $j \leq 15$ для уравнения $D(k_0, S) = 0$ и $j \leq 5$ для уравнения $D(2k_0, S) = 0$.

Увеличение поверхностной плотности заряда χ (параметра w) приводит как к уменьшению частоты осцилляций, так и к уменьшению декремента затухания. Расчёты показывают, что амплитуды $\xi_{2k_0}^{(2)}(t)$ в течение примерно половины периода волны, определяющей начальную деформацию, нарастают и лишь потом гасятся вязкостью, причём при умеренных значениях безразмерной вязкости ($\nu < 0.1$) достигаемые максимальные амплитудные значения превышают аналогичные значения, реализующиеся в струе идеальной жидкости (кривые, соответствующие нулевой вязкости, изображены на рисунках пунктирными линиями). Такая временная эволюция характерна для малых возмущений, накладываемых на основное течение маловязкой жидкости, удовлетворяющее уравнению Навье-Стокса, и является предметом исследования теории гидродинамической устойчивости [138]. Обна-

руженный феномен интересен тем, что связан не с возмущением, обусловленным внешними силами, а проявляется как результат нелинейного взаимодействия волны, определяющей начальную деформацию струи, с поправкой, появляющейся в асимптотических расчетах второго порядка малости.

10. Численное моделирование капиллярного распада струй. На обсуждении теоретических работ по осцилляциям и дроблению струй, выполненных численными методами, не будем останавливаться детально, поскольку они обладают стандартными для численных методов ограничениями общности проведенных рассматриваний. Отметим лишь, что такие работы ведутся как при расчетах линейных задач, осложненных внешними воздействиями, так и при расчетах нелинейных волн на поверхности струй (см., например, [6, 28, 35, 46, 107, 119, 139–148]).

11. Экспериментальные исследования феномена капиллярного распада наэлектризованных струй. В связи с многообразием практических технических и технологических приложений феномена электродиспергирования жидкости количество экспериментальных исследований капиллярного распада наэлектризованных струй весьма велико. В выше упомянутых статьях описания экспериментальных исследований обсуждаемого феномена можно найти, например, в [2, 3, 5–8, 13–17, 35, 36, 39, 40, 57–60, 66, 67, 96].

Одним из наиболее очевидных выводов, к которому приводит даже поверхностное знакомство с проведенными экспериментами, является вывод о высокой чувствительности обсуждаемого феномена к физическим свойствам рабочей жидкости, особенностям экспериментальной установки и таким характеристикам процесса, как давление жидкости в капилляре, из которого вытягивается струя, и потенциал. В зависимости от величины и соотношения этих параметров выделяются около десятка режимов феномена электродиспергирования жидкости, сильно различающихся как внешним видом, так и характеристиками формирующегося капельного аэрозоля (спектрами размеров, зарядов и удельных зарядов капель), приведенных на основе наблюдаемой феноменологии в систему в работах [47, 56–58, 159–161].

Несмотря на значительное число экспериментальных работ, для большинства из них характерны отсутствие системности в исследовании влияния физико-химических характеристик жидкости на процесс распыления, а также случайность в выборе оборудования и объекта изучения – рабочей жидкости (как правило, используется та жидкость, которая имеется под руками, либо то вещество и те параметры установки, с которыми связан конкретный практический интерес). Естественно, выделяются два направления экспериментальных работ [149, 57, 149–159]:

1) изучение физических закономерностей распыления какой-либо одной жидкости в зависимости от внешних характеристик процесса: потенциала, подаваемого на капилляр, объемного расхода жидкости (или гидростатического давления жидкости в капилляре), вида электродов (металлический или стеклянный капилляр со смачиваемыми или несмачиваемыми стенками; различная конфигурация противоэлектродов, располагающихся на различных расстояниях от капилляра и т. п.). При этом авторы обычно ограничиваются сообщением названия используемой жидкости (или смеси жидкостей), не затрудняя себя измерением основных физико-химических характеристик [[149, 57, 149–159];

2) исследование влияния на процесс распыления какого-либо одного из свойств рабочей жидкости (обычно проводимости) [149, 151, 152]. В этих случаях эксперимент проводится с целым набором жидкостей, подобранных таким образом, чтобы интересующее свойство изменялось в достаточно широком диапазоне значений. Основным недостатком работ такого типа является отсутствие контроля над изменением других физико-химических свойств используемых жидкостей. Хотя интуитивно ясно, что авторы должны бы стремиться к тому, чтобы все неконтролируемые в данном эксперименте свойства жидкостей изменялись очень слабо, однако это, как правило, не оговаривается и не приводятся даже приблизительных значений основных физических характеристик жидкостей (по-видимому, малоинтересных, с точки зрения авторов).

Перечисленные выше недостатки экспериментальных работ препятствуют формированию единого взгляда на явление электрогидродинамического диспергирования жидкости и созданию

единой классификации его разнообразных режимов. Многие из авторов заново выделяют наблюдающиеся в проводимом ими эксперименте режимы электродиспергирования, приводя описательную их характеристику и пользуясь собственной терминологией для их обозначения. Сопоставить же результаты различных работ, как указывалось выше, невозможно из-за недостатка информации об условиях проведения эксперимента.

Наиболее детально описанные экспериментальные исследования закономерностей электродиспергирования жидкости при распаде заряженных струй, выполненные в последний десяток лет, содержащие и сравнения с теоретическими данными, ориентированы в основном на один режим электродиспергирования из десятка – «конусно-струйный» (cone-jet). В этом режиме длинная устойчивая струя выбрасывается из вершины «конуса Тейлора» (см., например, [57, 60, 162–166]), и вышеупомянутые теоретические модели распада заряженных струй наиболее адекватно применимы для сравнения с результатами экспериментов, выполненных для этого режима, так что построение общей строгой теоретической классификации экспериментально наблюдаемых режимов электродиспергирования жидкости – дело не самого ближайшего будущего.

2. Линейные осцилляции и капиллярный распад заряженных жидких струй

Проблема корректного теоретического аналитического исследования устойчивости бесконечного цилиндрического столба жидкости под действием капиллярных сил впервые была сформулирована и решена Рэлеем [26, 27, 29, 34, 41]. В своих работах он опирался на результаты экспериментальных исследований Савара, Магнуса, Плато, Бидона. В их экспериментах была детально изучена феноменология распада струи. В частности, было показано, что длина нераспадающейся ее части зависит от вида начального возмущения. Было установлено, что струя жидкости, подверженная синусоидальному осесимметричному возмущению, с длиной волны, превышающей длину окружности, ограничивающей сечение струи, неустойчива по отношению к этому возмущению. Сама же неустойчивость возникает в результате действия капиллярных сил, а виртуально возникшее возмущение нарастает с течением времени.

В самом деле, из общефизических соображений следует, что любая замкнутая механическая система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. Если рассмотреть виртуально созданный жидкий цилиндр радиуса R и длины L , то его потенциальная энергия в отсутствие внешних силовых полей будет равна его площади $2\pi R^2 + 2\pi RL$, умноженной на коэффициент поверхностного натяжения γ . Объем этого цилиндра будет равен $\pi R^2 L$, радиус же r равновеликой сферы $r = \sqrt[3]{3R^2 L/4}$, а энергия сил поверхностного натяжения этой сферы — $4\pi\gamma(3R^2 L/4)^{2/3}$. Беря отношение энергии сил поверхностного натяжения сферы к энергии сил поверхностного натяжения исходного цилиндра, несложно убедиться, что во всех возможных диапазонах изменения R и L

$$\frac{4\pi\gamma R(9RL^2/16)^{1/3}}{2\pi\gamma R(R+L)} \equiv \frac{\sqrt[3]{9RL^2/2}}{(R+L)} < 0.8 < 1.$$

Сказанное означает, что исходный виртуальный цилиндр, будучи предоставлен действию сил поверхностного натяжения, стремясь к положению с минимальной потенциальной энергией, под их действием свернется в сферическую каплю.

Рассмотрим теперь участок длины L жидкой бесконечной струи радиуса R и посмотрим, для какого соотношения между R и L переход под действием сил поверхностного натяжения от цилиндрической струи к совокупности сферических капель будет энергетически выгоден. Для этого сравним потенциальную энергию сил поверхностного натяжения боковой поверхности цилиндра с длиной L с потенциальной энергией сил поверхностного натяжения поверхности N сферических капель, на которые предположительно может распасться цилиндр. Приравняв объем цилиндра объему N сферических капель, определим радиус одной капли:

$$r = \sqrt[3]{3R^2L/4N}.$$

Найдем теперь отношение потенциальной энергии сил поверхностного натяжения поверхности N сферических капель к потенциальной энергии сил поверхностного натяжения боковой поверхности участка струи длиной L :

$$\frac{N4\pi\gamma R(9RL^2/16N^2)^{1/3}}{2\pi\gamma RL} \equiv \sqrt[3]{\frac{9RN}{2L}}.$$

Потребуем теперь, чтобы это отношение было меньше единицы, и получим условие самопроизвольного разбиения струи на N отдельных капель в виде

$$\frac{9RN}{2L} < 1. \quad (1)$$

Очевидно, что это условие тем лучше будет выполняться, чем меньше N . Полагая $N=1$, найдем, что при $L \geq 4.5 \cdot R$ цилиндрической струе энергетически выгодно разбиваться на отдельные капли с радиусами $r \geq 3R/\sqrt[3]{8}$. Сказанное означает, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к волнам с длиной

$\lambda \geq 4.5 \cdot R$. По отношению же к синусоидальным возмущениям поверхности с длинами волн λ , меньшими чем $4.5 \cdot R$, струя оказывается устойчивой. Следует отметить, что спектр волн с длинами, удовлетворяющими условию $\lambda \geq 4.5 \cdot R$, бесконечен, но инкременты нарастания неустойчивости волн с различными длинами будут различны, и реальный распад струи на капли определится волной с максимальной величиной инкремента неустойчивости. Однако в рамках проведенного качественного рассмотрения найти длину волны с максимальным инкрементом не представляется возможным.

Еще в конце позапрошлого века в корректных аналитических расчетах (см. нижеследующие разделы настоящей главы) Рэлея получил соотношение, связывающее скорость роста амплитуды волнового возмущения и его длину волны. Время от момента возникновения синусоидального возмущения до момента распада струи на капли, вычисленное при помощи теории Рэлея, хорошо согласовывалось с результатами опытов. В рамках линейного по амплитуде возмущения теоретического анализа удалось выяснить, что коротковолновые возмущения ($kR \gg 1$) на струе жидкости устойчивы и могут распространяться вдоль струи в виде капиллярных волн. Однако они быстро затухают под действием имеющейся в реальных условиях вязкости жидкости [27, 29, 30]. Длинноволновые же возмущения ($kR < 1$) неустойчивы, и при всех длинах волн, удовлетворяющих условию $kR < 1$, реализуется капиллярная неустойчивость струи, сопровождающаяся разбиением последней на капли. Максимальным инкрементом обладают волны с длиной $\lambda_* \approx 9R$. Выяснилось, что вязкость оказывает стабилизирующее действие на распад струи, а вязкая диссипация внутри струи и вязкое трение на ее поверхности приводят к изменению профиля скорости и возрастанию времени релаксации.

Тем не менее сложившиеся на основе линейной теории представления об осцилляциях, развитии капиллярной неустойчивости и распаде струи, несмотря на успешное объяснение многих экспериментальных фактов, не являются исчерпывающими и должны быть обобщены с учетом внутренних течений в струе, эффектов релаксации вязкости, заряда и коэффициента поверхностного натяжения, а также с учетом реальной нелинейности фе-

номена (см. следующую главу). Кроме того, среди необходимых обобщений следует указать и на полуограниченность реальных струй. Для истолкования расхождений теории и экспериментальных данных было предложено несколько гипотез: динамическое воздействие окружающего воздуха на осесимметричные возмущения струи, увеличивающее давление в сужениях и уменьшающее – на выпуклостях струи, что приводит к более быстрому росту возмущений [31, 32]; влияние вязкости окружающего воздуха [167]; изменение механизма распада струи – переход от осесимметричных возмущений к изгибным (изгибается ось струи) [168–169]; переход к турбулентному режиму течения в струе [170]; влияние релаксации начального профиля скорости в струе [35].

Еще на заре исследования электрических явлений Вильям Гилберт заметил, что капля воды на сухой подложке приобретает коническую (вершиной вверх) форму, если над ней на небольшом расстоянии поместить наэлектризованный кусок янтаря [171]. Как было показано уже в наше время [37, 172], при этом на свободной поверхности капельки появляется индуцированный электрический заряд и капля претерпевает неустойчивость: она деформируется к вытянутому сфероиду, на ее вершине формируется эмитирующий выступ, названный «конусом Тейлора», с вершины которого выбрасывается тоненькая струйка воды, распадающаяся на отдельные капельки. По-видимому, первые наблюдения эмиссии струек жидкости, распадающихся на отдельные капельки, при электризации свободной поверхности жидкости связаны с работами одного из первых исследователей электрических явлений аббата Ж. Нолле в середине XVIII века [173]: он заметил, что если человека поместить на изолирующую подставку и подвергнуть электризации (с помощью созданного О. Герике прообраза электрофорной машины), то из ранок и порезов на коже человека начинают бить очень тонкие струйки крови, распадающиеся на отдельные капли.

Систематические исследования феномена электризации менисков жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, сопровождающегося выбросом заряженных струй, распадающихся на отдельные капли, начались лишь в начале XX века и связаны с именем Дж. Зелени [2, 174–

175], который детально исследовал закономерности эмиссии капель и струй жидкости при электризации ее свободной поверхности. В связи с многообразием академических, технических и технологических приложений феномена электродиспергирования жидкости эксперименты с ним были продолжены. При этом было обнаружено около десятка различных режимов электродиспергирования жидкости, приведенных в систему в [56–58, 176–177]. Но для проводимого рассмотрения важно, что во всех этих работах имел место выброс с заряженной поверхности жидкости заряженных струй, распадающихся на отдельные капли. Следует отметить, что в последние двадцать лет регулярно проводятся международные симпозиумы по электродиспергированию жидкости, собирающие сотни докладов, посвященных этому феномену. И хотя подавляющее большинство докладываемых работ носят экспериментальный характер и посвящены в основном особенностям электродиспергирования конкретных жидкостей в конкретных установках и устройствах, тем не менее общее количество публикаций по обсуждаемой теме исчисляется тысячами. Поэтому насущной проблемой является построение общей теории электродиспергирования (дробления заряженной струи на капли) с учетом реальных физико-химических характеристик жидкостей и многообразия релаксационных эффектов.

В настоящей главе, в нижеследующем изложении, будут рассмотрены основные идеи и методы расчета осцилляций и устойчивости струй жидкости в линейном приближении – от использования Лангражева подхода для расчета линейных осцилляций цилиндрических незаряженных струй идеальной электропроводной жидкости до расчета в рамках метода операторной скаляризации осцилляций и устойчивости заряженных струй вязкой жидкости с конечной проводимостью, виртуальная форма которых отлична от цилиндрической.

2.1. Линейные осцилляции и распад незаряженной цилиндрической струи идеальной жидкости

Начнем наше рассмотрение с первой работы Рэля [26], посвященной исследованию устойчивости незаряженной струи идеальной жидкости. Изложение проведем, придерживаясь варианта расчета, приведенного в [27].

Широкий класс интересных явлений, проливающих свет и на другие, еще более темные явления, получает объяснение в связи с изменениями, которые претерпевает цилиндрическое жидкое тело, равновесная цилиндрическая форма которого медленно деформирована и затем предоставлена восстанавливающему действию сил поверхностного натяжения. Такой цилиндр образуется при истечении жидкости под давлением сквозь круглое отверстие, по крайней мере, в случае, когда можно пренебречь силой тяжести; при этом поведение струи, изученное экспериментально Саваром, Магнусом, Плато и другими, практически независимо от общего движения вперед всех ее частей.

Начнем исследование с теории бесконечного жидкого цилиндра, рассматриваемого в качестве системы, находящейся в равновесии под действием силы капиллярности. Большинство экспериментальных результатов легко будет связать с решением этой механической задачи.

В цилиндрических координатах r, φ, z уравнение слегка возмущенной поверхности можно написать в виде

$$r = a_0 + h(\varphi, z), \quad (1)$$

где $h(\varphi, z)$ – величина, малая по сравнению с радиусом a_0 . По теореме Фурье произвольная функция может быть разложена в ряд, состоящий из членов вида $a_m \cdot \cos m\varphi \cdot \cos kz$, и каждый из этих членов можно рассматривать независимо от других. Косинус может быть заменен синусом; суммирование распространяется на все положительные значения k и на все целые положительные значения m , включая нуль.

Величина a_0 не остается абсолютно постоянной во время движения; ее значение должно определяться условием неизменности заключенного в цилиндре объема V . Для поверхности

$$r = a_0 + a_m(t) \cdot \cos m\varphi \cdot \cos kz, \quad (2)$$

находим

$$V = \frac{1}{2} \iint r^2 d\varphi \cdot dz = z \left(\pi a_0^2 + \frac{1}{4} \pi a_m^2 \right);$$

таким образом, если обозначить через a радиус сечения невозмущенного цилиндра, то

$$a^2 = a_0^2 + \frac{1}{4} a_m^2,$$

откуда приближенно

$$a_0 \approx a \left(1 - \frac{1}{8} \frac{a_m^2}{a^2} \right). \quad (3)$$

Это соотношение хорошо удовлетворяется при $m=1, 2, 3, \dots$. При $m=0$ формула (2) дает вместо (3)

$$a_0 \approx a \left(1 - \frac{1}{4} \frac{a_0^2}{a^2} \right). \quad (4)$$

Потенциальная энергия системы в любой конфигурации, создаваемая силой капиллярности, просто пропорциональна площади поверхности. Для выражения (2) площадь поверхности S струи будет иметь вид

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz = z \left(2\pi a_0 + \frac{1}{4} \pi k^2 a_m^2 a + \frac{1}{4} \pi m^2 k^2 \frac{a_m^2}{a} \right),$$

так что в силу (3), обозначая через s поверхность, соответствующую в среднем единице длины, найдем

$$s = 2\pi a + \frac{1}{4} \pi (k^2 a^2 + m^2 - 1) \frac{a_m^2}{a}. \quad (5)$$

Следовательно, потенциальная энергия U_γ , связанная с силой капиллярности, определенная на единицу длины из равновесной конфигурации, есть

$$U_\gamma = \left[\frac{1}{4} \pi \gamma (k^2 a^2 + m^2 - 1) \frac{a_m^2}{a} \right]. \quad (6)$$

где γ обозначает коэффициент поверхностного натяжения.

В выражении (6) предполагается, что ни k , ни m не равны нулю. Если $k = 0$, то нужно удвоить (6), чтобы получить потенциальную энергию, соответствующую

$$r = a_0 + a_m \cdot \cos m\varphi, \quad (7)$$

а если $m = 0$, то нужно принять потенциальную энергию

$$U_\gamma = \left[\frac{1}{2} \pi \gamma (k^2 a^2 - 1) \frac{a_0^2}{a} \right] \quad (8)$$

в соответствии с

$$r = a_0 + a_0 \cdot \cos kz. \quad (9)$$

Из соотношения (6) следует: когда $m=1$ равно единице или какому-нибудь большему целому числу, то U_γ имеет положительное значение. Это показывает, что при всех смещениях такого рода начальное положение равновесия является устойчивым. Для случая смещений, симметричных относительно оси ($m=0$), из (8) мы видим, что равновесие устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, будет ли ka больше или меньше единицы, т. е. в зависимости от того, будет ли длина волны ($\lambda \equiv 2\pi a$) симметричной деформации меньше или больше окружности цилиндра, — положение, впервые установленное Плато. Иными словами, струя устойчива по отношению к коротковолновым деформациям с длинами волн, удовлетворяющими условию $\lambda < 2\pi a$. По отношению к длинноволновым деформациям ($\lambda \geq 2\pi a$) струя неустойчива.

Если выражение (2) для r содержит несколько членов с различными значениями m и k и с произвольной заменой косинусов

на синусы, то соответствующее выражение для U_γ находится путем простого сложения выражений для отдельных компонент и содержит только квадраты величин a_m (но не произведения их).

Теперь нам нужно получить аналитическое выражение для кинетической энергии движения жидкости вызванного движением поверхности струи. Поскольку жидкость предполагается невязкой, существует потенциал скоростей ϕ , который удовлетворяет уравнению Лапласа в силу несжимаемости жидкости:

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

или, если для получения соответствия с (2) мы предположим, что переменная часть пропорциональна $\cos m\varphi \cdot \cos kz$, то

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \phi = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) при условии, что нет притока и оттока жидкости вдоль оси симметрии, имеет вид

$$\phi = \beta_m \cdot J_m(ikr) \cdot \cos m\varphi \cdot \cos kz, \quad (11)$$

где $J_m(ikr)$ – функция Бесселя. Постоянную β_m следует определить из условия, согласно которому радиальная скорость $\partial\phi/\partial r$ при $r=a$ совпадает со скоростью, предполагаемой в выражении (2) dr/dt (кинематическое граничное условие). В итоге получим

$$ik \cdot \beta_m \cdot J'_m(ika) = \frac{\partial a_m}{\partial t}. \quad (12)$$

Если массовую плотность жидкости обозначить ρ , то кинетическая энергия движения, в силу теоремы Грина

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS,$$

равна

$$\frac{1}{2} \rho \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} a \cdot d\phi \cdot dz = \frac{1}{4} \pi \rho z \cdot ika \cdot J_m(ika) \cdot J'_m(ika) \cdot \beta_m^2;$$

так что если обозначить через T кинетическую энергию движения жидкости, приходящуюся на единицу длины, то, в силу (12),

$$T = \frac{1}{4} \pi \rho a^2 \frac{J_m(ika)}{ika \cdot J'_m(ika)} \cdot \left(\frac{\partial a_m}{\partial t} \right)^2. \quad (13)$$

При $m = 0$ вместо (13) следует принять

$$T = \frac{1}{2} \pi \rho a^2 \frac{J_0(ika)}{ika \cdot J'_0(ika)} \cdot \left(\frac{\partial a_0}{\partial t} \right)^2. \quad (14)$$

Наиболее общее значение T получается из частных значений, определяемых выражениями (13) и (14), простым сложением. Поскольку выражения для U_γ и T содержат только квадраты, а не произведения величин a_m , $\partial a_m / \partial t$, а также соответствующие величины, в которых косинусы заменены синусами, то отсюда следует, что движения, выражаемые соотношением (2), происходят совершенно независимо друг от друга, пока величина начальной деформации цилиндрической струи в целом мала.

Имея аналитическое выражение для кинетической энергии T (13) и потенциальной энергии U_γ системы (6), можно выписать функцию Лагранжа $L \equiv T - U_\gamma$ и уравнение Лагранжа для отдельных волн, которые, согласно сказанному выше, независимы:

$$\frac{\partial^2 a_m}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ika \cdot J'_m(ika)}{J_m(ika)} \cdot (m^2 + k^2 a^2 - 1) a_m = 0, \quad (15)$$

что без всяких изменений применимо и к случаю $m = 0$. Таким образом, если a_m изменяется пропорционально $\cos(\omega t - \alpha)$, то

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ika \cdot J'_m(ika)}{J_m(ika)} \cdot (m^2 + k^2 a^2 - 1) \quad (16)$$

определяет частоту колебаний в случаях устойчивости.

Если $m = 0$, а $ka < 1$, то решение меняет свой вид. Если предположить, что a_0 изменяется со временем пропорционально $\exp(\pm\eta t)$, то

$$\eta^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ika \cdot J'_0(ika)}{J_0(ika)} \cdot (1 - k^2 a^2). \quad (17)$$

Когда m больше единицы, то условия обычно таковы, что движение приближенно происходит только в двух измерениях. Тогда мы можем с успехом предположить в (16), что ka мало по сравнению с единицей. Таким путем получим

$$\omega^2 = m(m^2 - 1 + k^2 a^2) \frac{\gamma}{\rho a^3} \left[1 + \frac{k^2 a^2}{2m(m+1)} \right], \quad (18)$$

или, если совершенно пренебречь ka , получим двумерную формулу

$$\omega^2 = m(m^2 - 1) \frac{\gamma}{\rho a^3}. \quad (19)$$

При $m = 1$ нет восстанавливающей силы при чисто двумерном смещении. При $m \gg 1$, выражая длину волны в длинах окружности цилиндра, получим $\lambda = 2\pi a/m$ и в (19) при бесконечно больших m и a найдем

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \quad (20)$$

в согласии с теорией капиллярных волн на плоской поверхности.

Аналогичное заключение можно вывести, рассматривая волны, длина которых измеряется по оси. Так, если $\lambda = 2\pi/k$ и $a \rightarrow \infty$, то (16) приводится к (20) в силу соотношения

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i \cdot J'_m(ika)}{J_m(ika)} = 1.$$

Рассматривая выражение (17) как уравнение относительно η , получим, что оно при положительной правой части имеет два решения разных знаков: одно из них со знаком минус определяет декремент затухания волнового движения в струе, а второе – по-

ложительное – инкремент нарастания неустойчивости. В [26] Рэлей в приближении $k^2 a^2 \ll 1$ разложил правую часть (17) по степеням $k^2 a^2$, приравнял нулю производную по аргументу ka от полученного разложения, получил, ограничиваясь первыми тремя слагаемыми разложения, алгебраическое уравнение для отыскания $k^2 a^2$, соответствующего максимальному инкременту

$$0.98928 - 2.25 \cdot k^2 a^2 + (7/16)k^4 a^4 = 0.$$

Найдя положительный корень этого уравнения, Рэлей установил, что максимальное значение инкремент неустойчивости достигает при $k^2 a^2 \approx 0.4858$. Это условие соответствует длине волны $\lambda \approx 9.016 \cdot a$. Волны с указанной длиной волны имеют максимальный инкремент неустойчивости и определяют закономерности дробления струи на отдельные капли. Плато на основе анализа экспериментов Савара получил соотношение $\lambda \approx 8.76 \cdot a$.

2.2. Линейные осесимметричные осцилляции и распад незаряженной цилиндрической струи вязкой жидкости

1. Первые теоретические исследования влияния вязкости жидкости на условия разбиения струи на капли выполнены Рэлеем [26]. Более детально этот вопрос был исследован Бассетом [30] и Вебером [31]. В нижеследующем изложении мы воспроизведем решение задачи об осцилляциях и устойчивости струи вязкой жидкости, приведенное в [32].

2. Пусть в вакууме цилиндрическая струя радиуса R жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения γ движется вдоль оси симметрии со скоростью \vec{U}_0 , выходя из цилиндрического сопла. Будем исследовать цилиндрические волны, бегущие по такой струе и закономерности распада ее на капли, имея в виду, что основными характеристиками процесса распада струи является длина ее сплошной части и размер образующихся капель. Длина сплошной части определяет дальность полета струи и характер ее разбиения. Все рассмотрение проведем в цилиндрической систе-

ме координат, орт \vec{n}_z которой совпадает с осью симметрии цилиндра и \vec{U}_0 .

Ограничимся рассмотрением осесимметричных возмущений, при которых движение жидкости вокруг оси симметрии отсутствует, т. е. проекция поля скоростей течения жидкости на орт \vec{n}_φ цилиндрической системы координат равна нулю: $U_\varphi = 0$. При симметричных волнах сечение струи остается круговым, претерпевая лишь сжатия и расширения.

Уравнение поверхности струи запишем в виде

$$F(\varphi, z, t) = r(\varphi, z, t) - R_0 - \xi(\varphi, z, t) = 0,$$

где R_0 – радиус цилиндрической поверхности струи, $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение поверхности струи, вызванное капиллярными волнами тепловой природы (всегда существующими в жидкости) с амплитудой $\sim \sqrt{\kappa T / \gamma}$ (κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура). Для любых жидкостей амплитуда таких волн, возбуждаемых тепловым движением молекул, есть величина порядка ангстрема, поэтому для струй любых реальных радиусов будет выполняться соотношение $(|\xi(\varphi, z, t)| / R_0) \ll 1$.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \Delta \vec{U}; \quad \text{div} \vec{U} = 0;$$

с граничными условиями на поверхности струи: кинематическим:

$$r = R_0 + \xi; \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

и динамическими для нормальной и касательной компонент тензора напряжений:

$$r = R_0 + \xi; \quad \Xi_{rr} = -p_\gamma; \quad \Xi_{rz} = 0;$$

$$\Xi_{rr} \equiv -p + 2\nu\rho \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \Xi_{rz} = \nu\rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right).$$

Учтем также, что поле скоростей на оси струи должно быть конечно.

Зададимся целью исследовать устойчивость осесимметричных волн в такой струе в линейном по отношению $(|\xi|/R_0)$ приближении, когда в уравнении Навье-Стокса конвективным слагаемым $(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}$ можно пренебречь, поскольку поле скоростей, порождаемое волновым движением теплового происхождения, имеет тот же порядок малости, что и амплитуды волн. В линейном приближении граничные условия можно отнести к невозмущенной цилиндрической поверхности струи $r = R_0$, а давление капиллярных сил p_γ записать в виде

$$p_\gamma = \frac{\gamma}{R_0} - \frac{\gamma}{R_0^2} \left[\xi + R_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right].$$

Линеаризованное уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности в соответствии с симметрией задачи выпишем в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot U_r) \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot U_r) = 0. \quad (3)$$

Система граничных условий, отнесенная к поверхности $r = R_0$, примет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = U_r, \quad -p + 2\nu\rho \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\gamma}{R_0^2} \left[\xi + R_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right] = 0, \quad \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Проекции поля скоростей движения жидкости внутри струи на орты цилиндрических координат представим в виде

$$U_r = U_r^0 + u_1, \quad (5)$$

$$U_z = U_z^0 + u_2, \quad (6)$$

где величины, отмеченные индексом нуль, идентичны с соответствующими величинами в идеальной жидкости.

Гидродинамическое давление p , связанное с движением жидкости, должно быть таким же, как и в идеальной жидкости, т. к. наличие вязкости влияет на частоту волн, а не на давление в жидкости.

Скорость в идеальной жидкости связана с потенциалом скорости φ соотношениями, которые в цилиндрических координатах имеют вид:

$$U_r^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad U_z^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\Delta \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Гидродинамическое давление p определится, согласно представлениям о волновом движении в идеальной жидкости, соотношением

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9)$$

Из уравнения непрерывности следует, что u_1 и u_2 связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_1) = 0.$$

Из этого уравнения вытекает, что u_1 и u_2 можно выразить через скалярную функцию $\psi(\vec{r}, t)$, называемую функцией тока, в виде

$$u_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (10)$$

Подставляя выражения для компонент скорости в (1) и (2) и учитывая выражения для u_1 и u_2 , получаем

$$\frac{\partial U_r^0}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial r} + \nu \Delta U_r^0 - \nu \frac{U_r^0}{r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right],$$

$$\frac{\partial U_z^0}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial z} + \nu \Delta U_z^0 + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right].$$

Поскольку

$$\Delta U_r^0 - \frac{U_r^0}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \Delta \varphi = 0, \quad \Delta U_z^0 = \frac{\partial}{\partial z} \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial U_z^0}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial z},$$

находим, что функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (11)$$

Поскольку нас интересуют волновые движения жидкости, будем искать решение уравнений для φ и ψ в виде периодических функций по z и экспоненциальных по t :

$$\varphi = \Phi(r) \cdot \exp(ikz + \alpha t), \quad (12)$$

$$\psi = \Psi(r) \cdot \exp(ikz + \alpha t). \quad (13)$$

Подставляя (12)–(13) в (8) и (11), находим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - k^2 \Phi = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{\alpha}{\nu} \right) \Psi = 0. \quad (15)$$

Решением уравнения (14) является функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента $J_0(ikr)$ (модифицированная функция Бесселя нулевого порядка $I_0(kr)$):

$$\Phi = C_1 \cdot I_0(kr). \quad (16)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$\Psi(r) = r \cdot y(r).$$

Тогда для $y(r)$ получим уравнение

$$y'' + \frac{y'}{r} - \left(l^2 + \frac{1}{r^2} \right) y = 0, \quad (17)$$

$$l^2 \equiv k^2 + \frac{\alpha}{\nu}. \quad (18)$$

Решением уравнения (17), остающимся конечным на оси струи, является модифицированная функция Бесселя первого порядка:

$$y = C_2 \cdot I_1(lr),$$

где $I_1(lr) = \frac{1}{i} J_1(iltr)$.

Окончательно получим

$$\varphi = C_1 \cdot I_0(kr) \cdot \exp(ikz + \alpha t), \quad (19)$$

$$\psi = C_2 \cdot r \cdot I_1(lr) \cdot \exp(ikz + \alpha t). \quad (20)$$

Распределение скоростей и давления находим из φ и ψ по формулам:

$$U_r = -ik \left[iC_1 I_0'(kr) + C_2 I_1(lr) \right] \cdot \exp(ikz + \alpha t), \quad (21)$$

$$U_z = k \left[iC_1 I_0(kr) + C_2 \left(\frac{I_1(lr)}{kr} + \frac{l}{k} I_1'(lr) \right) \right] \cdot \exp(ikz + \alpha t), \quad (22)$$

$$p = -\rho \alpha C_1 \cdot I_0(kr) \cdot \exp(ikz + \alpha t). \quad (23)$$

В выражения (21)–(23) входят три неизвестные величины: амплитудные коэффициенты C_1 и C_2 и комплексная частота α .

Из динамического граничного условия для касательных компонент тензора напряжений находим связь между C_1 и C_2 :

$$C_1 = -C_2 \frac{I_1(lR_0)(l^2 + k^2)}{2ik^2 I_1(kR_0)}. \quad (24)$$

Из кинематического граничного условия найдем

$$\xi(z, t) = \int (U_r)_{r=R_0} dt = -\frac{ik}{\alpha} [iC_1 \cdot I_1(kR_0) + C_2 \cdot I_1(lR_0)] \cdot \exp(ikz + \alpha t).$$

Подставляя это значение $\xi(z, t)$ в динамическое граничное условие для нормальных компонент тензора напряжений с учетом (24), получаем дисперсионное уравнение, связывающее частоту α с волновым числом k :

$$\alpha^2 + \frac{2\nu k^2 \alpha}{I_0(kR_0)} \left[I_1'(kR_0) - \frac{2kl}{k^2 + l^2} \frac{I_1(kR_0)}{I_1(lR_0)} I_1'(lR_0) \right] = \frac{\gamma k^2}{\rho R_0} (1 - k^2 R_0^2) \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2}. \quad (25)$$

Это дисперсионное уравнение в общем случае весьма сложно, так как l зависит от α , и не может быть решено аналитически. Ограничимся рассмотрением предельных случаев маловязкой и очень вязкой жидкости. Если вязкость достаточно мала, то в интересующей области длин волн имеет место неравенство

$$\frac{\alpha}{\nu} \gg k^2 \text{ или } l \gg k. \quad (26)$$

При $l \gg k$ линейный член в дисперсионном уравнении (25) мал и может быть опущен, тогда (25) приобретает простой вид:

$$\alpha^2 = \frac{\gamma k}{\rho R_0^2} (1 - k^2 R_0^2) \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0^2)}. \quad (27)$$

Частота α имеет мнимое значение для волн, длина которых мала по сравнению с радиусом струи R_0 , когда $kR_0 > 1$.

В пределе, при $kR_0 \gg 1$, имеем по известной формуле теории функции Бесселя

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},$$

$$I_1(kR_0) \approx I_0(kR_0) \approx \frac{\exp(kR_0)}{\sqrt{2\pi kR_0}}.$$

Вводя частоту ω , равную $\omega \equiv -i\alpha$, находим

$$\omega = \sqrt{\gamma k^3 / \rho},$$

это совпадает с частотой капиллярных волн на плоской поверхности маловязкой жидкости. Коротковолновые возмущения ($kR_0 \gg 1$) на струе жидкости устойчивы и могут распространяться вдоль струи в виде капиллярных волн. Однако следует учесть, что коротковолновые возмущения быстро затухают под действием имеющейся в реальных условиях вязкости. Более интересным является случай длинных волн, для которых выполнено неравенство

$$kR_0 = \frac{2\pi R_0}{\lambda} < 1. \quad (28)$$

Для таких волн величина α имеет вещественное положительное значение. Положительным значениям α отвечает неограниченное возрастание во времени амплитуды волн. В теории турбулентности показано, что экспоненциальное возрастание амплитуды волновых движений означает появление в жидкости незатухающих пульсаций. Масштаб этих пульсаций – порядка длины волны незатухающих волновых движений. Наличие турбулентных пульсаций в жидкости со свободной поверхностью приводит к разрыву поверхности и выбросу жидкости. В случае жидкой цилиндрической струи экспоненциальное возрастание во времени амплитуды волны приводит к неустойчивости ее поверхности и распаду струи на капли. Поверхность струи неустойчива по отношению ко всем волнам, длина которых удовлетворяет неравенству (28). Однако выражение (27) при $kR_0 < 1$ имеет

максимум при определенной длине волны. Положение этого максимума определяется условием

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial k} = 0 = \frac{I_1'(kR_0) \cdot I_0(kR_0) - I_0'(kR_0) \cdot I_1(kR_0)}{I_0^2(kR_0)} (1 - k^2 R_0^2) - \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} 2kR_0.$$

Численное решение последнего уравнения показывает, что точка максимума отвечает значению волнового числа k , равному

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{9.02 \cdot R_0} = 0.70 \cdot \frac{1}{R_0},$$

или длине волны $\lambda_{\max} = 9.02 \cdot R_0$. Эта формула была впервые получена Рэлеем. Значение α в максимуме может быть найдено без труда путем подстановки числовых значений функций Бесселя:

$$\alpha_{\max} = 0,12 \sqrt{\gamma / \rho R_0^3}.$$

Волны с $k = k_{\max}$ обладают наибольшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими волнами, волновое число которых удовлетворяет неравенству (28). Максимум функции $\alpha^2(k)$ имеет достаточно резко выраженный характер. Поскольку рост амплитуды во времени происходит по экспоненциальному закону $\exp(\alpha t)$, решающее значение для распада струи имеет рост амплитуды волны, длина которой λ имеет значение, отвечающее максимуму α .

За время

$$\tau = \frac{1}{\alpha_{\max}} = 8.46 \sqrt{\rho R_0^3 / \gamma}$$

амплитуда возрастает в e раз. Распад струи происходит на капли, размер которых связан с длиной волны, обладающей максимальным инкрементом λ_{\max} , соотношением $r \approx 3R_0 / \sqrt[3]{4}$, т. е. примерно в два раза превышает радиус струи. Основным интересом представляет длина неразбившейся части струи. Если пренебречь изменением скорости U_0 струи в процессе ее полета, что можно сделать при небольших значениях длины неразбившейся части

струи, то эту длину можно найти по формуле $L \approx U_0 \cdot \tau = 8,46U_0\sqrt{\rho R_0^3/\gamma}$.

Влияние вязкости на закономерности распада струи рассмотрим в пределе длинных волн, когда длина волны много больше радиуса струи, т. е. когда выполняются условия $kR_0 \ll 1$, $lR_0 \ll 1$. В этом случае дисперсионное уравнение (25) с учетом того, что

$$I_0(kR_0) \approx 1, \quad I_1(kR_0) \approx 0.5 \cdot kR_0, \quad I_1(lR_0) \approx 0.5 \cdot lR_0, \quad I_1'(kR_0) = I_1'(lR_0) \approx 0.5,$$

принимает вид

$$\alpha^2 + 2\nu k^2 \alpha = \frac{\gamma k^2}{\rho R_0} (1 - k^2 R_0^2),$$

а его решения легко выписываются:

$$\alpha = -\nu k^2 \pm \sqrt{(\nu k^2)^2 + \frac{\gamma k^2}{\rho R_0} (1 - k^2 R_0^2)}.$$

Отсюда легко найти, что величина инкремента неустойчивости достигает своего максимального значения при

$$k_{\max} = \left[\nu R_0 \sqrt{\frac{\rho R_0}{2\gamma}} + 2R_0^2 \right]^{-1/2}.$$

При этом величина инкремента неустойчивости определится выражением

$$\alpha_{\max} = \frac{\sqrt{\gamma/8\rho R_0^3}}{1 + \nu\sqrt{2\rho/\gamma R_0}}.$$

Если вязкость жидкости велика так, что выполняется условие

$$\sqrt{\gamma R_0/\rho\nu^2} \gg 1,$$

то для k_{\max} и α_{\max} получим соответственно

$$k_{\max} \approx \left[6\nu R_0 \sqrt{\frac{\rho R_0}{2\gamma}} \right]^{-1/2} = 0.54 \sqrt{\frac{\gamma}{\nu^2 \rho R_0^3}}, \quad \alpha_{\max} \approx \frac{\gamma}{6\nu \rho R_0}.$$

Характерное время распада струи определится соотношением

$$\tau = \frac{1}{\alpha_{\max}} \approx \frac{6\nu \rho R_0}{\gamma}.$$

Длина волны с максимальным инкрементом и длина сплошной части струи определяются простыми соотношениями:

$$\lambda_{\max} = 2\pi/k_{\max}, \quad L = U_0 \cdot \alpha_{\max}^{-1}.$$

2.3. Линейные неосесимметричные осцилляции и распад заряженной цилиндрической струи

Еще в 1882 году Рэлей в пределе $k^2 a^2 \ll 1$ исследовал влияние на устойчивость струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости электрического заряда, однородно распределенного по невозмущенной цилиндрической поверхности струи с поверхностной плотностью χ [29]. По аналогии с ранее решенной задачей об исследовании осцилляций и устойчивости незаряженной струи Рэлей выписал выражение для изменения потенциальной энергии сил поверхностного натяжения, связанного с волновой деформацией струи, приходящейся на единицу длины (см. формулу (6) в разделе 2.1)

$$U_\gamma = \frac{1}{4} \pi \gamma (m^2 - 1) \frac{a_m^2}{a},$$

и для кинетической энергии волнового движения жидкости в объеме жидкости, приходящейся на единицу длины струи

$$T = \frac{1}{4} \pi \rho a^2 \frac{J_m(ika)}{ika \cdot J'_m(ika)} \cdot \left(\frac{\partial a_m}{\partial t} \right)^2,$$

и добавил к ним выражение для приходящейся на единицу длины струи потенциальной энергии поверхностного заряда, связанной с волновой деформацией струи:

$$U_q = -\frac{\mu^2}{2}(m-1)\frac{a_m^2}{a^2}; \quad \mu \equiv \frac{2\pi a L \chi}{L},$$

где μ – заряд, приходящийся на единицу длины струи. Составляя функцию Лагранжа $T - U_\gamma - U_q$, выписывая уравнение Лагранжа и приняв, что временная эволюция волновой деформации струи описывается законом $\sim \exp(i\omega t)$, Рэлей получил дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} m(m-1)[(m+1) - 2w], \quad w \equiv \frac{\mu^2}{\pi a \gamma}.$$

Из анализа дисперсионного уравнения следует, что наличие поверхностного заряда приводит к снижению устойчивости струи по отношению к неосесимметричным возмущениям поверхности. В самом деле, при $2w > (m+1)$ квадрат частоты становится отрицательным и все моды m , удовлетворяющие этому условию, претерпевают неустойчивость.

В 1894 году влияние электрического заряда на устойчивость струи более детально изучил Бассет [30] (он также исследовал влияние на устойчивость струи вязкости жидкости и наличия окружающей среды). Исследуя варикозную неустойчивость заряженной струи, имеющей форму $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \exp(i\omega t)$, (т. е. осесимметричной струи с $m = 0$), он выписал дисперсионное уравнение для осцилляций основной моды поверхностно заряженной струи маловязкой жидкости с произвольной длиной волны (с волновым числом k) в виде

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \left\{ (1 - k^2 a^2) - \frac{w}{4} \left[1 - \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)} \right] \right\}.$$

Бассет указал, что наличие заряда на струе приводит к ее стабилизации в смысле расширения диапазона длин устойчивых волн в область волн, более длинных по сравнению с волнами в

незаряженной струе (он также указал, что малая вязкость и наличие окружающей среды повышают устойчивость струи). В соответствии с анализом Рэля на незаряженной струе неустойчивы волны с волновыми числами $k > a^{-1}$ (см. раздел 2.1). Согласно же результатам Бассета на заряженной струе неустойчивы волны с меньшими волновыми числами, удовлетворяющими условию $k^2 a^2 \geq \left\{1 - \frac{w}{4} \left[1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}\right]\right\}$, или с большими длинами волн. Выяснилось также, что длина нераспавшейся части струи за срезом сопла, из которого вылетает струя, с ростом поверхностной плотности заряда увеличивается.

Тейлор [36] исправил в выражении, полученном Бассетом, численный коэффициент при квадрате заряда, приходящегося на единицу длины струи, ошибку в размерности и получил дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \left\{ (1 - k^2 a^2) - w \left[1 - \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}\right] \right\}; \quad w \equiv \frac{\mu^2}{\pi a \gamma}.$$

Кроме того, Тейлор в [36] попутно исследовал и изгибную неустойчивость струи, отталкиваясь от известного по экспериментальным исследованиям факта, согласно которому при достаточно большой плотности заряда на струе ее конец начинает совершать хлыстообразное движение, распадаясь при этом на отдельные капельки. Тейлор выписал форму струи в виде $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\varphi) \cdot \exp(i\omega t)$, где φ – азимутальный угол, и получил дисперсионное уравнение для изгибной неустойчивости струи:

$$\omega^2 = -\frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1'(ka)}{I_1(ka)} \left\{ k^2 a^2 + w \left[1 + \frac{ka \cdot K_1'(ka)}{K_1(ka)}\right] \right\}.$$

Условие нейтрального равновесия струи по отношению к изгибной неустойчивости отсюда получается в виде

$$w = \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}.$$

Следует отметить, что за два года до появления работы Тейлора вышла статья [43], где исследовалась устойчивость заря-

женной струи и были исправлены ошибки в дисперсионном уравнении, допущенные Бассетом, но совершены свои ошибки, одна из которых была исправлена в работе [44], а другая, связанная с размерностью (в обеих цитированных выше работах дисперсионные уравнения содержат выражения вида $\ln r$, где r – размерная величина), перекочевала из [43] в работу [44]. Теоретические анализы устойчивости заряженной струи содержались также в работах [45, 48, 61, 75], однако в них также содержались ошибки, и полученные результаты в итоге не вполне достоверны.

Еще один вопрос представляет интерес в контексте проводимого исследования. Основным отличием изучаемого нами спонтанного распада заряженных струй от вынужденного монодисперсного распада является полидисперсность получаемых капель и наличие “хлыстообразного” движения конца распадающейся струи. Совершенно очевидна связь “хлыстообразного” движения конца струи с возбуждением неосесимметричных волн в ней. Первый вклад в исследование устойчивости неосесимметричных волн в заряженной струе следует связать с именем Рэля [29], а развитие идеи естественно отнести к работе Тейлора [36].

В нижеследующих рассуждениях будут исследованы методом операторной скаляризации [178] осцилляции и устойчивость неосимметричных волн в заряженных струях как идеально проводящих и объемно заряженных диэлектрических жидкостях, так и струй жидкости с реальной проводимостью. Следует отметить, что эффект релаксации заряда в струях реально проводящих жидкостей исследовал ранее Сэвилл [75], но получил ошибочные результаты, поскольку неверно выписал уравнение баланса заряда на поверхности струи [80].

2.3.1. Линейные неосесимметричные осцилляции заряженной цилиндрической струи вязкой электропроводной жидкости

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью U_0 цилиндрическую струю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения γ , поддерживаемую при

постоянном электрическом потенциале Φ_* . Будем считать, что жидкость является идеально проводящей и электрический заряд распределен по цилиндрической в отсутствие возмущений поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. Будем исследовать условия реализации неустойчивости капиллярных колебаний поверхности струи.

Расчеты проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z , орт \mathbf{n}_z которой ориентирован вдоль оси симметрии струи. Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| \ll R.$$

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad \nabla \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi = 0;$$

условий ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0;$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи: кинематического

$$r = R + \xi: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla [r - (R + \xi(\varphi, z, t))] = 0$$

и динамического для его касательных

$$r = R + \xi: \quad \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} U_\varphi = 0; \quad \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0;$$

и нормальной

$$r = R + \xi: \quad -P(\mathbf{r}, t) - P_0 + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - P_q + P_\gamma = 0$$

компонент, а также эквипотенциальности поверхности струи

$$\Phi = \Phi_*.$$

Здесь U_r , U_φ , U_z – компоненты поля скоростей в цилиндрической системе координат; $P(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамическое давление; P_0 – атмосферное давление; P_q – давление электрического поля; P_γ – давление сил поверхностного натяжения; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ – электростатический потенциал.

В нулевом приближении по $|\xi|/R$ получим неподвижный цилиндрический столб жидкости, а также известные выражения для лапласовского давления под свободной цилиндрической поверхностью жидкости и давления электрического поля на поверхность равномерно заряженного бесконечного цилиндра фиксированного радиуса.

2. Линеаризация задачи. В линейном приближении по $|\xi|/R$, если за всеми физическими величинами оставить прежние обозначения, обсуждаемая задача в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \gamma = 1$, запишется в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| \ll R, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \phi = 0, \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty, \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\phi| \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$r = 1: \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + U_r = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - U_\varphi = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$-p + 2\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - p_q + p_\gamma = 0, \quad (10)$$

$$\phi - 4\pi\chi\xi = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (1) – (11) ϕ , p , p_q , p_γ – вызванные капиллярными колебаниями поверхности добавки первого порядка малости по $|\xi|$ к электрическому потенциалу, гидродинамическому давлению, давлению электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно.

Раскладывая по малой величине ξ известные аналитические выражения для лапласовского давления $P_\gamma = \text{div} \mathbf{n}$ (где \mathbf{n} – орт нормали к поверхности (1)) и для давления электрического поля $P_q = 2\pi\chi^2$ (см. Приложение), несложно получить входящие в (10) величин первого порядка малости p_χ и p_σ

$$p_\gamma = -\left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

$$p_q = -4\pi\chi^2 \xi - \chi \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (13)$$

3. Скаляризация линейной задачи. Систему уравнений (2), (3) будем решать методом операторной скаляризации (подробно изложенным в [178]), раскладывая поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов \hat{N}_i :

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_i \psi_i(\mathbf{r}, t) \quad (i=1,2,3) \quad (14)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \mathbf{N}_i = 0, \quad (\text{при } i \neq j; \quad i, j=1,2,3), \quad (15)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta. \quad (16)$$

В выражениях (14)–(15) $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ – неизвестные скалярные функции; $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ – операторы, эрмитовосопряженные к операторам $\hat{\mathbf{N}}_j$.

Поскольку равновесная форма струи обладает осевой симметрией, то операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times \mathbf{e}_z, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z).$$

Поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в цилиндрической системе координат будет иметь следующие компоненты, выраженные через скалярные функции $\psi_i(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi}, \\ U_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi}, \\ U_z &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя разложение (14) в систему (2)–(3) и используя свойство операторов (15)–(16), получим систему скалярных уравнений:

$$\nabla \psi_1 = 0, \quad \Delta \psi_i - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \quad (i=2,3), \quad (18)$$

$$p = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \quad (19)$$

Используя (12), (13), (17), (19), граничные условия (7)–(10) преобразуем в граничные условия для известных функций ψ_i и ξ

$$r=1: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} - \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right] = 0,$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \psi_1 \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} \right\} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} - \psi_3 \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi^2} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial r} \right\} + 4\pi\chi^2 \xi + \chi_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} - \left\{ \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right\} = 0. \quad (20)$$

Поскольку функции ξ , ϕ и ψ_i описывают малые отклонения от равновесного состояния, то для того, чтобы проследить эволюцию этих отклонений во времени, примем, что временная зависимость всех малых величин определяется экспонентой

$$\xi, \phi, \psi_i \sim \exp(st),$$

где s – комплексная частота.

4. Вывод дисперсионного уравнения. Учитывая это, решения уравнений (4) и (18) в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие условиям ограниченности (5), (6), будем искать в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси OZ :

$$\psi_1 = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^1 \cdot I_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st) dk,$$

$$\psi_i = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^i I_m(lr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st), \quad (i=2,3) \quad (21)$$

$$\phi = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^4 I_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (22)$$

В виде аналогичного разложения представим и функцию $\xi(z, \varphi, t)$:

$$\xi(z, \varphi, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D_m \exp(im\varphi) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (23)$$

В (21)–(23) k – волновое число; $l^2 \equiv k^2 + s/v$; m – азимутальные числа, т. е. целые числа, характеризующие неосесимметричность решений; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; C_i , где $i=1,2,3,4$, и D – коэффициенты разложений, зависящие от m и k .

Используя условие эквипотенциальности поверхности струи (11), учитывая решения (22)–(23) и свойства ортонормированности функций $\exp(im\varphi)$ и $\exp(ikz)$

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\varphi] d\varphi = \delta_{m_1, m_2},$$

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(k_1 - k_2)z] dz = \delta(k_1 - k_2), \quad (24)$$

где δ_{m_1, m_2} – дельта-символ Кронекера; $\delta(k_1 - k_2)$ – дельта-функция Дирака, несложно получить связь коэффициентов C_m^4 и D_m :

$$C_m^4 = \frac{4\pi\chi}{K_m(k)} D_m \quad (25)$$

Подставляя решения (21)–(22) с учетом (23) и (25) в граничные условия (20) и используя соотношения (24), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов D_m и C_m^i ($i=1,2,3$):

$$D_m s - C_m^1 k I_m'(k) - C_m^2 i m I_m(l) - C_m^3 i k l I_m'(l) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& C_m^1 2im(kI'_m(k) - I_m(k)) + C_m^2 (lI'_m(l) - m^2 I_m(l) - l^2 I''_m(l)) + \\
& + C_m^3 2mk(kI_m(l) - lI'_m(l)) = 0, \\
& C_m^1 2ik^2 I'_m(k) - C_m^2 mkI_m(l) - \\
& - C_m^3 (l^3 I'''_m(l) + l^2 I''_m(l) + l(k^2 - m^2 - 1)I'_m(l) + 2m^2 I_m(l)) = 0, \\
& D_m \left\{ 4\pi\chi^2 \left(1 + \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)} \right) + k^2 + m^2 - 1 \right\} + C_m^1 (sI_m(k) + 2vk^2 I''_m(k)) + \\
& + C_m^2 2vim(lI'_m(l) - I_m(l)) + C_m^3 2vikl^2 I''_m(l) = 0. \tag{26}
\end{aligned}$$

Штрихами обозначены производные функций Бесселя m -го порядка по их аргументу, которые могут быть выражены через функции Бесселя m -го и $(m+1)$ -го порядков с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
I'_m(x) &= I_{m+1}(x) + \frac{m}{x} I_m(x) = I_{m-1}(x) - \frac{m}{x} I_m(x), \\
I''_m(x) &= -\frac{1}{x} I_{m+1}(x) + \left(1 + \frac{m(m-1)}{x^2} \right) I_m(x), \\
I'''_m(x) &= \left(1 + \frac{m^2+2}{x^2} \right) I_{m+1}(x) + \frac{m-1}{x} \left(1 + \frac{m(m-2)}{x^2} \right) I_m(x), \\
K'_m(x) &= \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x).
\end{aligned}$$

Напомним, что система однородных линейных уравнений (26) имеет нетривиальное решение только в случае, если ее определитель равен нулю $\det[a_{ij}] = 0$, где элементы a_{ij} определяются соотношениями:

$$a_{11} = s, \quad a_{21} = a_{31} = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= k^2 + m^2 - 1 + 4\pi\chi^2 \left\{ 1 + m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right\}, \\
a_{12} &= -(kI_{m+1}(k) + mI_m(k)), \\
a_{22} &= 2im(kI_{m+1}(k) + (m-1)I_m(k)), \\
a_{32} &= 2ik(kI_{m+1}(k) + mI_m(k)), \\
a_{42} &= \left[s + 2v(k^2 + m(m-1)) \right] I_m(k) - 2vkI_{m+1}(k), \\
a_{13} &= -imI_m(l), \quad a_{23} = 2lI_{m+1}(l) - (l^2 + 2m(m-1)I_m(l)), \\
a_{33} &= -mkI_m(l), \quad a_{43} = 2vim(lI_{m+1}(l) + (m-1)I_m(l)), \\
a_{14} &= -ik(lI_{m+1}(l) + mI_m(l)), \\
a_{24} &= -2mk(lI_{m+1}(l) + (m-1)I_m(l)), \\
a_{34} &= -(l^2 + k^2)(lI_{m+1}(l) + mI_m(l)), \\
a_{44} &= 2vik \left(\left[l^2 + m(m-1) \right] I_m(l) - lI_{m+1}(l) \right). \tag{27}
\end{aligned}$$

Раскрывая определитель четвертого порядка с элементами (27), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоты s неосесимметричных колебаний поверхности струи с волновым числом k ,

$$\begin{aligned}
& s^2 \left\{ m \left[l^2 (l^2 + k^2) + 2m(m-1)l^2 \right] + F_m(l) \left[(l^2 + k^2)(l^2 - 4m) + 2l^2 m^2 \right] - \right. \\
& \left. - 2(l^2 + k^2)F_m^2(l) \right\} + 2sv \left\{ -ml^2(l^2 - k^2)(k^2 - m(m-1)) + \right. \\
& \left. + F_m(l) \left[l^2 k^2 (l^2 + k^2) + l^2 m(m-1)(l^2 - 2m(m+1)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + l^2 k^2 m(3m+1) - 4k^2 m(k^2 - m(m^2 - 1)) \right] \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\left[k^2(l^2+k^2)+m(m^2-1)(l^2-k^2)\right]F_m^2(l)- \\
& -F_m(k)\left[2l^2(l^2k^2+m^2(m^2-1))+l^2m(l^2+k^2(4m-5))+\right. \\
& \left.+F_m(l)\left[l^4-5l^2k^2+4m(m^2-1)(l^2-k^2)\right]+\right. \\
& \left.+2(m^2-1)(l^2-k^2)F_m^2(l)\right\}=f(m,w,k)\times \\
& \times\left\{m\left(l^2m(l^2-k^2)+F_m(l)l\left[l^2(l^2-k^2)-2m(l^2-2k^2)\right]-\right. \right. \\
& \left. -2(l^2-k^2)F_m^2(l)\right)+F_m(k)\left(m\left[l^2(l^2-k^2)-2ml^2\right]+\right. \\
& \left.+ (l^2-k^2)(l^2-4m)F_m(l)-2(l^2-k^2)F_m^2(l)\right\}; \quad F_m(x)\equiv x\frac{I_{m+1}(x)}{I_m(x)}; \\
& f(m,w,k)\equiv\left[1-m^2-k^2-w\left(1+m-\frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)}\right)\right]; \quad w\equiv 4\pi\chi^2\equiv\frac{\mu^2}{\pi}; \quad \mu\equiv 2\pi\chi,
\end{aligned} \tag{28}$$

где μ – электрический заряд, приходящийся на единицу длины струи.

5. Анализ дисперсионного уравнения и обсуждение результатов. Анализ уравнения (28) в общем случае достаточно проблематичен и доступен только численными методами.

Дисперсионное уравнение для случая осесимметричных колебаний заряженной струи несложно получить из (28), положив $m=0$:

$$s^2+2\nu k^2s\left[1-F_0(k)\left(\frac{2l}{(l^2+k^2)F_0(l)}+\frac{l^2-k^2}{k^2(l^2+k^2)}\right)\right]=\frac{l^2-k^2}{l^2+k^2}F_0(k)f(0,w,k).$$

При $w=0$ это выражение совпадает с дисперсионным уравнением для незаряженной струи вязкой жидкости. Для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие $l\gg k$, уравнение (28) приводится к более простому виду:

$$s^2 + 2sv(k^2 + m(m-1) - F_m(k)) = f(m, w, k)(m + F_m(k)). \quad (29)$$

При малой вязкости линейное по s слагаемое в уравнении (29) также можно опустить:

$$s^2 = f(m, w, k)(m + F_m(k)). \quad (30)$$

При $f > 0$ соотношение (30) определяет инкремент неустойчивости цилиндрической волны $s = \sqrt{f \cdot (m + F_m(k))}$. Приравнявая к нулю первую производную от инкремента по волновому числу, можно найти волновое число капиллярной волны с максимальным значением инкремента и, подставив его в (6.30), получить величину самого инкремента. На рис. 1 приведены результаты подобных расчетов в виде зависимостей $s = s(w)$, $k = k(w)$ для первых пяти значений азимутального числа m .

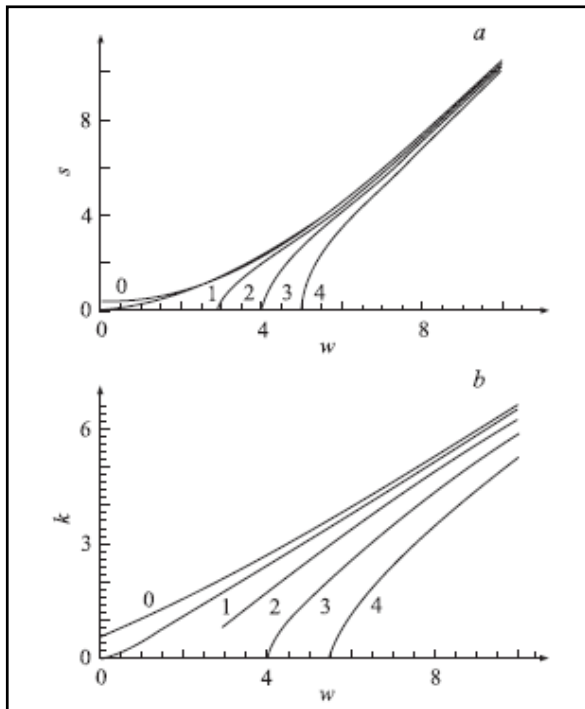


Рис. 1. Зависимость от w величины безразмерного инкремента (а) и волнового числа (б) наиболее неустойчивой волны при $\nu = 0$: цифры у кривых – значения азимутального параметра m

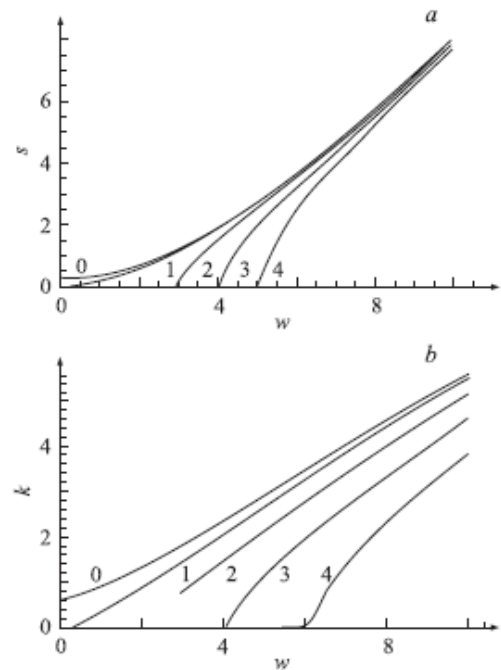


Рис. 2. Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при $\nu = 0.1$

Из рис. 1а видно, что величины инкрементов осесимметричной моды ($m = 0$) и неосесимметричных мод ($m = 1, 2, 3, 4$), заметно

различающиеся при малых значениях w , при достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда χ (при больших значениях параметра w) становятся примерно равными. Согласно рис. 1b в такой ситуации волновые числа неосесимметричных волн заметно превышают волновое число осесимметричной волны. Сказанное означает, что при одном и том же значении электрического потенциала струи создаются оптимальные условия для реализации неустойчивости одновременно осесимметричных и неосесимметричных мод колебаний поверхности, различающихся волновыми числами наиболее неустойчивых волн. Таким образом, струя станет дробиться на капли различных размеров и будет неустойчива по отношению к закручиванию вокруг своей оси (*по отношению к реализации «хлыстообразного» согласно терминологии [13]*) движения, наблюдавшегося во многих экспериментах.

В более общей ситуации, когда линейным по s слагаемым в (29) пренебрегать нельзя, положительный корень уравнения (29), соответствующий инкременту неустойчивости, запишется в виде

$$s = -vG(m, k) + \left(v^2 G^2(m, k) + f(m, w, k)(m + F_m(k)) \right)^{1/2};$$

$$G(m, k) = \left(k^2 + m(m-1) - F_m(k) \right). \quad (31)$$

Несложно видеть, что критические условия реализации неустойчивости струи в используемом приближении от вязкости не зависят. В самом деле, критические условия реализации неустойчивости струи невязкой жидкости определяются, согласно (30), условием $f > 0$, при выполнении обратного неравенства s становится мнимым, что соответствует периодическому во времени изменению амплитуды волн. Из (31) видно, что условие появления положительных решений уравнения (29) (определяющих инкременты неустойчивости) также имеет вид $f > 0$. Влияние вязкости в данном случае сводится к уменьшению величин инкрементов и снижению значений волновых чисел, соответствующих наиболее неустойчивым волнам. Однако степень этого влияния различна в различных диапазонах значений волновых чисел и для различных m .

В представляющем интерес (в контексте сказанного выше о закономерностях развития неустойчивости волн при больших значениях поверхностного заряда) диапазоне величин безразмерных волновых чисел $k \sim 4-6$ и безразмерных инкрементов неустойчивости $\sqrt{f} \sim 5-10$ (рис. 1а-б) влияние вязкости (при $\nu \ll 1$) на развивающуюся неустойчивость будет слабым. Оно проявляется в снижении величин инкрементов и волновых чисел наиболее неустойчивых волн примерно на 20%. Это видно из рис. 2, где приведены результаты расчетов для $\nu=0.1$ в виде зависимостей $s = s(w)$, $k = k(w)$ для первых пяти значений азимутального числа m . Данные рис. 2 свидетельствуют о том, что учет вязкости, хотя бы и малой, дает преимущество развитию неустойчивости неосесимметричных волн.

Чтобы исследовать влияние вязкости на закономерности реализации неустойчивости струи в ситуации $\nu \sim 1$, проанализируем асимптотику дисперсионного уравнения (28), когда $l \approx k$ или $k^2 \gg (s/\nu)$. В таком приближении получим

$$\begin{aligned}
& s^2 \left\{ -6F_m^2 + 2H(m,k)k^3 \left[k^2 + m(m-4) \right] + m \left[3k^2 + 2m(m-1) \right] + \right. \\
& \left. + F_m \left[4k^2 - 8H(m,k)k^3 + m(3m-8) \right] \right\} + 2s\nu \left\{ -2F_m^3(m^2-1) + \right. \\
& \left. + F_m \left[k^4 - H(m,k)k^5 + 4k^2m(m-1) - 3m^2(m-1)^2 \right] - 3F_m^2 \left[k^2 + 2m(m^2-1) \right] + \right. \\
& \left. + 2k \left[m^2(m-1) + H(m,k)k \left(k^4 + 2k^2m(m-1) + m^2(m-1)(3+m) \right) \right] \right\} + \\
& + f(m,w,k) \left[F_m^2(2F_m - k^2) - 2F_m \cdot m(k^2 - 3F_m) - \right. \\
& \left. - m^2(2H(m,k)k^3 + k^2 - 3F_m) \right] + 8F_m\nu^2k^2m^2(m-1) = 0; \\
& H(m,k) \equiv k^2 - F_m^2(k) - (2m+1)F_m(k)/k^2. \tag{32}
\end{aligned}$$

Результаты численного расчета по уравнению (32) зависимостей величин инкремента и волнового числа наиболее неустойчивой волны от параметра w при $\nu=3$ по уравнению (32) приведе-

ны на рис. 3. Видно, что при использовании в расчетах большой вязкости величина инкремента неосесимметричной волны с $m=1$ существенно превышает инкремент осесимметричной волны, однако абсолютные значения величин инкрементов в обоих случаях снижаются по сравнению с величинами инкрементов для маловязких струй.

Следует отметить, что при $m=0$ в области малых значений волновых чисел ($k \leq 0.7$) величина инкремента немного снижается при увеличении w от нуля до $w \approx 1.6$. Этот эффект связан с немонотонностью при $0 < w \leq 1.6$ зависимости $f = f(k, w)$ в уравнениях (29) – (31) (рис. 4).

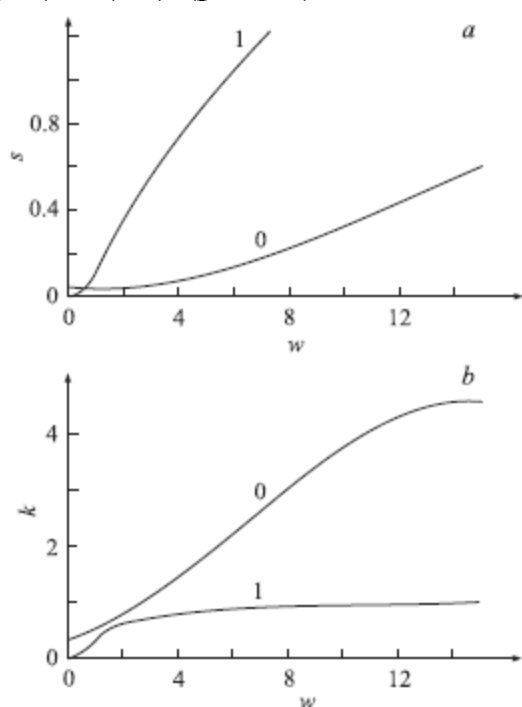


Рис. 3. Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при $\nu = 3$

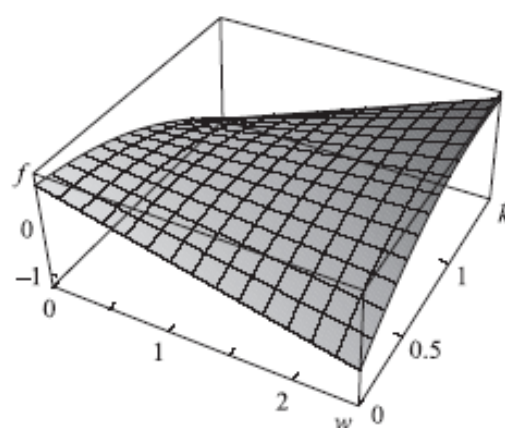


Рис. 4. Зависимость $f = f(m, k, w)$ от w и k , рассчитанная при $m = 0$

Интересно применить полученные результаты к рассмотрению распада на капли струи с формой, отличной от цилиндрической. Следует отметить, что в естественных условиях образования струй при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости они имеют почти коническую форму. Распад таких струй на капли происходит как за счет отрыва образующихся капелек с тонкого торца струи, совершающего хлыстообразное движение, так и при разрыве струи в ее сплошной части, далеко

от торца. Такой путь дробления струи приводит к расширению функции распределения дочерних капелек по размерам и большему разнообразию фиксируемых режимов электродиспергирования жидкости.

В контексте проведенного исследования коническая струя, поддерживаемая при постоянном электростатическом потенциале, характеризуется различной поверхностной плотностью заряда на струе в различных ее поперечных сечениях: меньших – при больших радиусах струи и больших – у тонкого ее конца. Сказанное означает, что в одной и той же струе при различных значениях координаты z могут реализоваться неустойчивости различных волн с отличающимися значениями азимутального параметра m . Так, распад тонкого конца струи на капли будет происходить при определяющем влиянии неосесимметричных волн, а разрыв струи в сечении с большим радиусом, когда поверхностный заряд мал, – за счет неустойчивости осесимметричной моды. Обсуждавшееся выше влияние вязкости в сечениях с большим и малыми радиусами струи также будет различным: безразмерная вязкость $\nu = \nu_0(\rho/\gamma R)^{1/2}$ будет больше на узком конце струи и меньше – на широком.

Итак, в спонтанном капиллярном распаде заряженных (поддерживаемых при постоянном электростатическом потенциале) струй на капли важную роль в формировании спектра распределения образующихся капель по размерам играет неустойчивость неосесимметричных волн. Инкременты неустойчивости неосесимметричных волн в маловязких струях при больших значениях поверхностной плотности заряда сравниваются с инкрементом неустойчивости осесимметричной волны, а в сильновязких струях существенно его превышают.

Приложение. Вычислим давление электрического поля на заряженную поверхность цилиндрической струи вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости. Будем считать, что электрический ток по струе не течет, напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю и заряд струи, вызванный ее электризацией, равномерно распределен по ее поверхности с плотностью χ . Учтем, что в приближении идеально проводящей жидкости заряд по поверхности струи при ее капил-

лярных колебаниях перераспределяется с бесконечно большей скоростью, мгновенно следуя за колебаниями поверхности и обеспечивая ее эквипотенциальность в любой момент времени. В связи со сказанным, зависимость от времени потенциал Φ электрического поля струи полностью определяется изменениями во времени формы поверхности струи, а зависимость потенциала Φ от пространственных переменных может быть найдена из уравнения Лапласа (поскольку гидродинамические скорости много меньше скорости света).

Давление электростатического поля на поверхность заряженной проводящей струи P_q определяется известным выражением:

$$P_q = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi},$$

где потенциал электрического поля вне капли Φ является решением краевой задачи:

$$\Delta\Phi = 0,$$

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_*,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi \rightarrow 0.$$

Представим потенциал Φ в виде разложения

$$\Phi = \Phi^0 + \phi,$$

где Φ^0 – потенциал электрического поля вблизи невозмущенной поверхности струи; ϕ – добавка к потенциалу, вызванная возмущением поверхности $\xi(z, \varphi, t)$, имеющая первый порядок малости по $|\xi|$.

Разделяя сформулированную задачу по порядкам малости, получим в нулевом приближении по $|\xi|$

$$\Delta\Phi^0 = 0,$$

$$r = 1: \quad \Phi^0 = \Phi_*,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi^0 \rightarrow 0,$$

а в первом порядке

$$\Delta \phi = 0,$$

$$r = 1 + \xi: \quad \phi = -\frac{\partial \Phi^0}{\partial r} \xi,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0.$$

Учтем также, что напряженность электрического поля на поверхности струи имеет только нормальную компоненту

$$r = 1: \quad \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = 4\pi\chi, \quad \mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

где \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – орты нормали и касательной к поверхности струи.

В нулевом порядке малости напряженность электрического поля вблизи невозмущенной цилиндрической поверхности струи имеет вид

$$\mathbf{E}_0 = \nabla \Phi^0 = \frac{4\pi\chi \mathbf{r}}{r^2}.$$

Выражение для потенциала ϕ в цилиндрической системе координат, удовлетворяющее условию ограниченности при $r \rightarrow \infty$, и выражение для искажения цилиндрической формы струи $\xi(\varphi, z, t)$ запишем в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси OZ (вдоль оси симметрии струи):

$$\phi(r, \varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^4 \cdot K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) \exp(st) dr,$$

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty D_m \exp(im\varphi) \exp(ikz) \exp(st) dk,$$

где m – целые числа; k – волновое число; $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода; C_m^4 и D_m – коэффициенты разложения, зависящие от k и m .

На поверхности струи для функции ϕ имеем

$$r = 1: \quad \phi = 4\pi\chi\xi.$$

Отсюда легко получить связь коэффициентов C_m^4 и D_m :

$$C_m^4 = \frac{4\pi\chi}{K_m(k)} D_m.$$

При выводе этого соотношения была учтена линейная независимость функций $\exp(im\varphi)$ при разных m и функции $\exp(ikz)$ при различных значениях волнового числа k .

Искажение равновесной цилиндрической поверхности струи волновым движением $\xi(z, \varphi, t)$ вызывает изменение давления P_q . Поскольку возмущение ξ мало, то P_q может быть разложено в ряд по ξ и представлено в виде

$$\begin{aligned} P_q|_{r=1+\xi} &\approx \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi^0 + \nabla\phi)^2 \Big|_{r=1+\xi} \approx \frac{1}{8\pi} \left((\nabla\Phi^0)^2 + 2(\nabla\phi)(\nabla\Phi^0) \right) \Big|_{r=1+\xi} \approx \\ &\approx \frac{1}{8\pi} \left((\nabla\Phi^0)^2 + 2\nabla\Phi^0 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla\Phi^0) \xi + 2(\nabla\phi)(\nabla\Phi^0) \right) \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Используя выражение для напряженности электрического поля у поверхности невозмущенной цилиндрической струи для линейной по $|\xi|$ добавки к давлению электрического поля, которую обозначим $p_\chi(\xi)$, получим выражение

$$r = 1: \quad p_q(\xi) = -4\pi\chi\xi - \chi \frac{\partial\phi}{\partial r}.$$

Подставляя вместо функций ξ и ϕ их интегральные представления, получим окончательное выражение для давления электрического поля, связанного с возмущением формы поверхности струи:

$$p_q(\xi) = -w \sum_{m=0}^{\infty} D_m \left(1 + k \frac{K'_m(k)}{K_m(k)} \right) \exp i(kz + m\varphi) \exp(st); \quad w \equiv 4\pi\chi^2.$$

2.4. Линейные неосесимметричные осцилляции объемно заряженной цилиндрической струи вязкой диэлектрической жидкости

1. Постановка задачи. Пусть дана бесконечная, движущаяся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью U_0 цилиндрическая струя вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , диэлектрической проницаемостью ε и коэффициентом поверхностного натяжения γ , имеющая радиус R . В рамках модели "вмороженного" заряда примем, что заряд распределен равномерно с объемной плотностью η .

Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных колебаний поверхности такой струи.

Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью OZ , совпадающей с осью симметрии струи, орт \mathbf{n}_z которой направлен вдоль вектора скорости U_0 . Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде

$$F(r, \varphi, z, t) = r - (R + \xi(\varphi, z, t)) = 0,$$

где R – радиус равновесной поверхности струи, $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение поверхности струи, вызванное ее капиллярными колебаниями.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0.$$

На поверхности струи должны выполняться:
кинематическое граничное условие:

$$r = R + \xi: \quad \left. \frac{dF}{dt} \right|_{F=0} = 0,$$

динамические граничные условия для касательной:

$$r = R + \xi: \quad \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0$$

и нормальной компонент тензора напряжений:

$$r = R + \xi: \quad -(P - P_{амм}) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + P_\gamma - P_E = 0$$

При $r \rightarrow 0$ решение \mathbf{U} должно быть ограничено, то есть

$$r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty,$$

$\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – единичные вектора касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $P_{амм}$ – давление атмосферы; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ – поле скоростей и поле давлений внутри струи; P_γ – давление сил поверхностного натяжения; P_q – давление электростатического поля на поверхность струи, которое вычисляется из краевой задачей для электрических потенциалов внутри Φ^{in} и вне Φ^{ex} струи соответственно:

$$\Delta \Phi^{in} = -4\pi \frac{\eta}{\varepsilon}, \quad \Delta \Phi^{ex} = 0,$$

$$r = R + \xi: \quad \Phi^{in} = \Phi^{ex}, \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi^{in}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial n},$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi^{in} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{ex} \rightarrow 0.$$

Отметим, что в модели диэлектрической струи заряд "вморожен" в жидкость и на поверхности нет свободных зарядов. Поэтому зависимость электрического потенциала Φ от времени

полностью определяется изменением во времени формы поверхности струи, а зависимость от пространственных переменных потенциалов внутри Φ^{in} и вне струи Φ^{ex} может быть найдена из решения выписанной электростатической задачи (см. «Приложение»).

Сформулированная задача отличается от подробно разобранной в предыдущем разделе только задачей расчета давления электрического поля на свободную поверхность струи, решение которой приводится в «Приложении», а потому опустим промежуточные выкладки и выпишем сразу дисперсионное уравнение.

2. Дисперсионное уравнение в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \gamma = 1$ запишется в виде

$$\det a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_{11} = s, \quad a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{41} = k^2 + m^2 - 1 -$$

$$-2w \left[\frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{(2 + (\varepsilon - 1)m + (\varepsilon - 1)F_m(k)) \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} m - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} D_m(k) \right)}{(\varepsilon - 1)m + \varepsilon F_m(k) + D_m(k)} \right],$$

$$a_{42} = \left[s + 2\nu(k^2 + m(m - 1)) \right] I_m(k) - 2\nu k I_{m+1}(k),$$

$$a_{13} = -im I_m(l), \quad a_{23} = 2l I_{m+1}(l) - (l^2 + 2m(m - 1)) I_m(l),$$

$$a_{33} = -mk I_m(l), \quad a_{43} = 2\nu im (l I_{m+1}(l) + (m - 1) I_m(l)),$$

$$a_{14} = -ik (l I_{m+1}(l) + m I_m(l)), \quad a_{24} = -2im (l I_{m+1}(l) + (m - 1) I_m(l)),$$

$$a_{34} = -(l^2 + k^2) (l I_{m+1}(l) + m I_m(l)),$$

$$a_{44} = 2\nu ik \left[(l^2 + m(m - 1)) I_m(l) - l I_{m+1}(l) \right],$$

$$w = \pi\eta^2; \quad F_m(k) = k \cdot I_{m+1}(k) / I_m(k); \quad D_m(k) = k \cdot K_{m+1}(k) / K_m(k).$$

Расписывая определитель, перепишем дисперсионное уравнение, связывающее частоты волн на поверхности струи s с их волновыми числами k , в виде

$$\begin{aligned}
& s^2 \left\{ m \left[l^2 (l^2 + k^2) + 2m(m-1)l^2 \right] + \right. \\
& + F_m(l) \left[l^2 (l^2 + k^2) - 4m(l^2 + k^2) + 2l^2 m^2 \right] - 2(l^2 + k^2) F_m^2(l) \left. \right\} + \\
& + 2sv \left\{ -ml^2 (l^2 - k^2) (k^2 - m(m-1)) + \right. \\
& + F_m(l) \left[l^2 k^2 (l^2 + k^2) - l^2 m(m-1)(l^2 - 2m(m-1)) + l^2 k^2 m(3m+1) - \right. \\
& - 4k^2 m(k^2 + m(m^2 - 1)) \left. \right] - 2(l^2 + k^2) (k^2 - m(m^2 - 1)) F_m^2(l) - \\
& - F_m(k) \left(2l^2 (l^2 k^2 + m^2 (m^2 - 1)) + l^2 m(l^2 + k^2 (4m - 5)) + \right. \\
& + \left. \left[l^4 - 5k^2 l^2 - 4mk^2 (m^2 - 1) - l^2 (5k^2 - 4m(m^2 - 1)) \right] F_m(l) + \right. \\
& \left. \left. + 2(m^2 - 1)(l^2 - k^2) F_m^2(l) \right] \right\} = f(m, k, w) \times \\
& \times \left\{ m(l^2 m(l^2 - k^2) + [l^2 (l^2 - k^2) - 2m(l^2 - 2k^2)] F_m(l) - 2(l^2 - k^2) F_m^2(l)) + \right. \\
& \left. + F_m(k) \left(m[l^2 (l^2 - k^2) - 2ml^2] + (l^2 - k^2)(l^2 - 4m) F_m(l) - 2(l^2 - k^2) F_m^2(l) \right) \right\}. \tag{1}
\end{aligned}$$

$$f(m, k, w) \equiv 1 - k^2 - m^2 + \frac{w}{\varepsilon} \left[\varepsilon + 1 - \frac{\{2 + (\varepsilon - 1)[m + F_m(k)]\} (2\varepsilon + (\varepsilon - 1)[m - D_m(k)])}{(\varepsilon - 1)m + \varepsilon F_m(k) + D_m(k)} \right]$$

Анализ уравнения (1) в общем случае достаточно проблематичен и может быть проделан только численными методами. В пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ и $\eta = 2\chi$, где χ – плотность поверхностного заряда цилиндрической струи электропроводной жидкости, приходим к дисперсионному уравнению для неосесимметричных колебаний заряженной струи вязкой электропроводящей жидкости, полученному в предыдущем разделе (при таком переходе предполагается

неизменным заряд, приходящийся на единицу длины струи: $\mu \equiv 2\pi\chi = \pi\eta$).

Из (1), положив $m = 0$, несложно получить дисперсионное уравнение для осесимметричных колебаний заряженной струи:

$$s^2 + 2svk^2 \left[1 - F_0(k) \left(\frac{2kl}{(l^2 + k^2)F_0(l)} + \frac{l^2 - k^2}{k^2(l^2 + k^2)} \right) \right] =$$

$$= k \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} F_1(k) \left\{ 1 - k^2 + \frac{w}{\varepsilon} \left[(\varepsilon + 1) - \frac{[2 + (\varepsilon - 1)F_0(k)][2\varepsilon - (\varepsilon - 1)D_0(k)]}{\varepsilon F_0(k) + D_0(k)} \right] \right\}.$$

При $\eta \rightarrow 0$ ($w \rightarrow 0$) это выражение совпадает с дисперсионным уравнением для незаряженной струи вязкой жидкости [32].

3. Случай коротких волн. При больших значениях аргумента цилиндрических функций: $k, l \gg 1$ () можно использовать асимптотические представления для функций Бесселя первого и второго рода (с сохранением слагаемых $\sim z^{-1}$):

$$I_m(z) = e^z [2\pi z]^{-1/2} \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{8z} \right), \quad I_{m+1}(z) = e^z [2\pi z]^{-1/2} \left(1 - \frac{4(m+1)^2 - 1}{8z} \right),$$

$$K_m(z) = e^{-z} \left[\frac{\pi}{2z} \right]^{1/2} \left(1 + \frac{4m^2 - 1}{8z} \right), \quad K_{m+1}(z) = e^{-z} \left[\frac{\pi}{2z} \right]^{1/2} \left(1 + \frac{4(m+1)^2 - 1}{8z} \right),$$

тогда

$$\frac{K_{m+1}(z)}{K_m(z)} = 1 + \frac{2m+1}{2z}, \quad \frac{I_{m+1}(z)}{I_m(z)} = 1 - \frac{2m+1}{2z}.$$

Подставляя эти разложения в выражения (1), получим дисперсионное уравнение для больших значений аргумента:

$$s^2 \left[1 + 2m^2 (2k^2 + l^2(2l-1)) \left((l^2 + k^2)(2l-1)(l-1)^2 \right)^{-1} \right] +$$

$$+ sv \left[2k^2 - (2k-1) \left[(l^2 - k^2)(2l-1) + 4k^2 l^2 \right] \left((l^2 + k^2)(2l-1) \right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + m^2 (4m^2 (l^2(2l-1) - k^2(2k-1)) + 8k^4 + l^2(4l^3 + 2l^2 - 12l + 5)) - \right]$$

$$\begin{aligned}
& -2k^2(4l^2 + 4l^2 - 5) + k^2(12l^3 - 10l^2 + 4l - 5) - kl^2(2l - 1)^2 \times \\
& \times \left[(l^2 + k^2)(2l - 1)(l - 1)^2 \right]^{-1} = \left\{ 1 - k^2 - m^2 + \frac{w}{\varepsilon}((\varepsilon - 1) - \right. \\
& \left. - \frac{(4\varepsilon - (\varepsilon - 1)(2k + 1))(4 + (\varepsilon - 1)(2k - 1))}{2(2 + (\varepsilon + 1)(2k - 1))}) \right\} \times \\
& \times \left[\frac{1}{2} \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} (2k - 1) + 2m^2 \frac{l^2(2l - 1) - k^2(2k - 1)}{(l^2 + k^2)(2l - 1)(l - 1)^2} \right].
\end{aligned}$$

4. Случай маловязкой жидкости. Для струи маловязкой жидкости, когда выполняется условие $l \gg k$, уравнение (1) приводится к более простому виду:

$$s^2 + 2\nu s(k^2 + m(m - 1) - F_m(k)) = f(m, k)[m + F_m(k)]. \quad (2)$$

В пределе идеальной жидкости ($\nu \rightarrow 0$) уравнение (2) сводится к виду

$$s^2 = f(m, k)[m + F_m(k)]. \quad (3)$$

Несложно видеть из (3), что при $f > 0$ величина s вещественна и имеет два корня. Один из корней отрицателен и определяет декремент затухания соответствующего движения жидкости, а потому не представляет интереса в плане проводимого исследования, а второй – положителен и определяет инкремент нарастания неустойчивости цилиндрической волны $s = \sqrt{f \cdot (m + F_m(k))}$. Приравнивая к нулю первую производную от инкремента по волновому числу, можно найти волновое число капиллярной волны с максимальным значением инкремента и, подставив его в дисперсионное уравнение (3), получить величину самого инкремента. На рис. 1 – рис. 4 приведены результаты подобных расчетов, проведенных с помощью программы аналитических вычислений "Математика", в виде зависимостей $s = s(w)$, $k = k(w)$ для первых пяти значений азимутального числа m при различных значениях диэлектрической проницаемости ε .

Из сравнения данных, приведенных на рис. 1 для $\varepsilon \rightarrow \infty$, на рис. 2 – для $\varepsilon = 20$, и на рис. 3–4, где представлены результаты

расчета для жидкого водорода с $\varepsilon = 1,241$, несложно видеть, что с уменьшением величины диэлектрической проницаемости жидкости абсолютные значения инкрементов неустойчивости и волновые числа наиболее неустойчивых волн снижаются. Кроме того, область значений параметра w , в которой реализуется неустойчивость, сдвигается в область больших значений w , что особенно наглядно видно из сравнения рис. 2, 3 и 4.

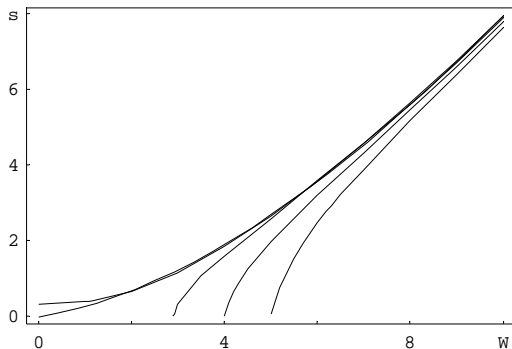


Рис. 1а. Зависимость частоты волны с максимальным инкрементом от параметра w при $\varepsilon \rightarrow \infty$

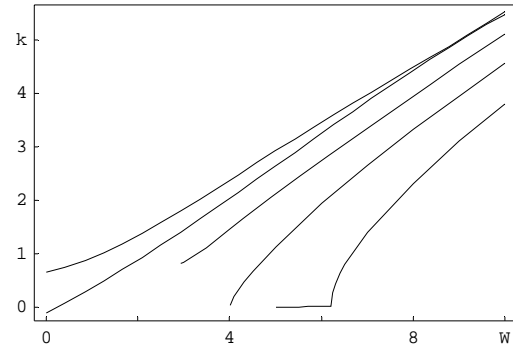


Рис. 1б. Зависимость волнового числа волны с максимальным инкрементом от w при $\varepsilon \rightarrow \infty$

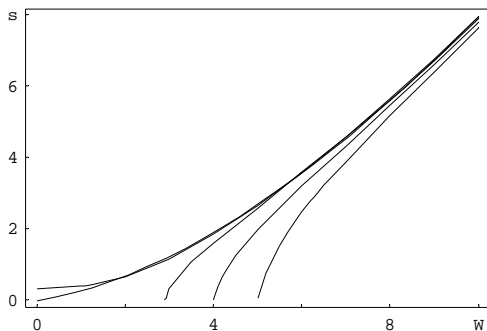


Рис. 2а. Зависимость частоты волны с максимальным инкрементом от параметра w при $\varepsilon = 20$

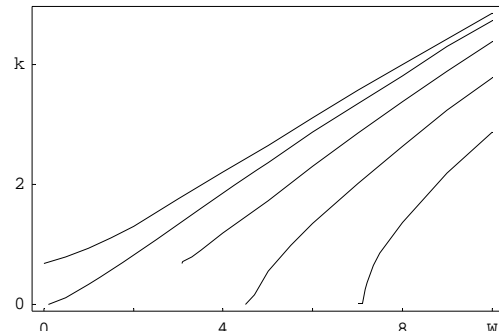


Рис. 2б. Зависимость волнового числа волны с максимальным инкрементом от параметра w при $\varepsilon = 20$

Наиболее интересным результатом, полученным ранее [133] при исследовании неустойчивости поверхностно заряженных неосесимметричных струй электропроводных жидкостей, является то, что при достаточно больших значениях параметра w величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод сравниваются с инкрементами осесимметричной моды, а величины волновых чисел наиболее неустойчивых волн снижаются по сравнению с осесимметричной. Это означает, что на финальной

стадии реализации неустойчивости, проявляющейся в разбиении струи на капли, струя будет дробиться на капли разных размеров и для получения на практике потоков монодисперсных капель следует создавать осесимметричной моде преимущественные условия, например искусственно увеличивая ее амплитуду, как это делается при вынужденном капиллярном распаде струй [6].

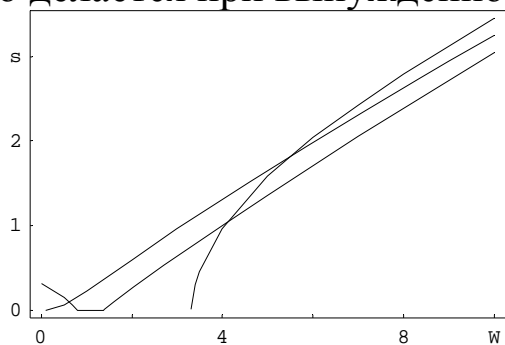


Рис. 3а. Зависимость частоты волны с максимальным инкрементом для первых трёх мод от параметра w при $\varepsilon = 1.241$

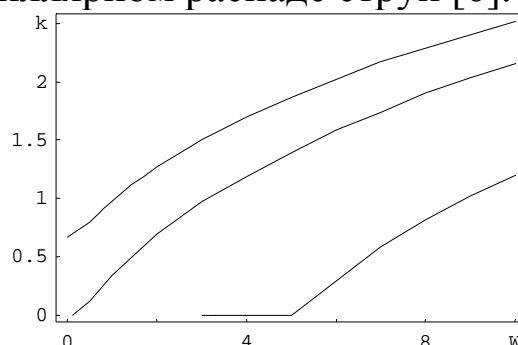


Рис. 3б. Зависимость волнового числа волны с максимальным инкрементом от параметра w при $\varepsilon = 1.241$

В проанализированной ситуации объемно заряженных диэлектрических струй инкременты неустойчивости неосесимметричных мод оказываются даже выше осесимметричных, что особенно наглядно видно из рис. 3а и 4а, где приведены результаты расчета инкрементов неустойчивости для осесимметричной моды (номер на кривой совпадает с номером моды) и для следующих четырех в порядке возрастания азимутального числа m неосесимметричных мод для струи жидкого водорода. Интересно, что при низкой диэлектрической проницаемости для мод с $m \geq 2$ область значений параметра w , при которых волновые числа наиболее неустойчивых мод принимают разумные с точки зрения практики разбиения струй на капли значения, существенно сдвигается в сторону больших величин w . Это видно из сравнения областей значений параметра w , при которых реализуется неустойчивость поверхности струи на рис. 3а и 3б, а также 4а и 4б. На рис. 3б и 4б существуют параллельные оси абсцисс участки кривых (практически сливающиеся с осью), соответствующие неустойчивым волнам с очень малыми волновыми числами. Физически это означает неустойчивость очень длинных волн. В смысле дробления струи на части такая неустойчивость

при ее реализации приведет к разрыву струи на большие куски, а не на мелкие капли. Такая неустойчивость наблюдалась экспериментально в [3, 57]. Ее следствием является существенное усложнение спектра режимов электростатического диспергирования жидкости [57].

Из рис. 3а видно, что для струи жидкого водорода с малой диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon = 1,241$) при $m = 0$ кривая зависимости $s = s(w)$ по мере увеличения параметра w сначала снижается до нуля. Затем в некотором диапазоне значений w неустойчивых решений уравнения (2) нет. Потом они снова появляются и общий вид зависимости $s = s(w)$ становится таким же, как и на других кривых. Указанный ход зависимости $s = s(w)$, с появлением минимума в области малых w , ранее отмечался в [33] при больших значениях вязкости (при $\nu = 3$) и связан с немонотонностью при малых k и w хода функции $f(k, m, w)$, как это видно из рис. 5, где приведены результаты расчета зависимости $f = f(k, m, w)$ для диэлектрической струи с $\varepsilon = 1,241$ при $m = 0$.

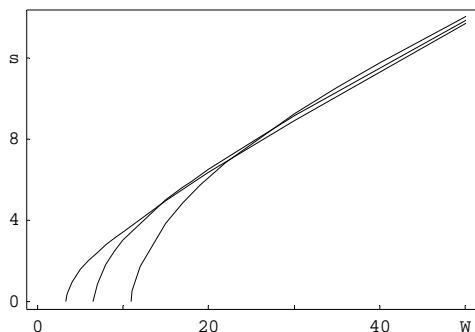


Рис. 4а. Зависимость частоты волны с максимальным инкрементом для $m = 2; 3; 4$ от параметра w при $\varepsilon = 1.241$

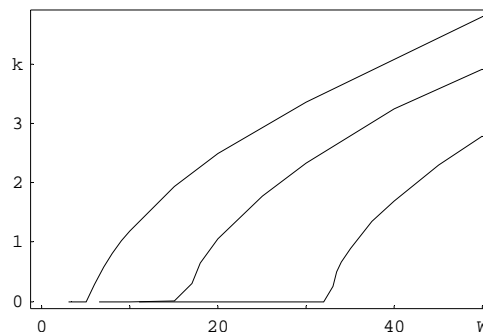


Рис. 4б. Зависимость волнового числа волны с максимальным инкрементом для $m = 2; 3; 4$ от параметра w при $\varepsilon = 1.241$

На том же рисунке приведена плоскость $f \equiv 0$, выделенная более частой координатной сеткой. Если вспомнить, что неустойчивым состояниям заряженной струи соответствуют положительные значения функции $f(k, m, w)$, возвышающиеся на рис. 5 над

плоскостью $f \equiv 0$, то видно существование геометрического места точек при малых k и w , в которых неустойчивые состояния отсутствуют. Это обстоятельство и приводит к изображенной на рис. 3а зависимости инкремента неустойчивости осесимметричной ($m=0$) моды от величины параметра w .

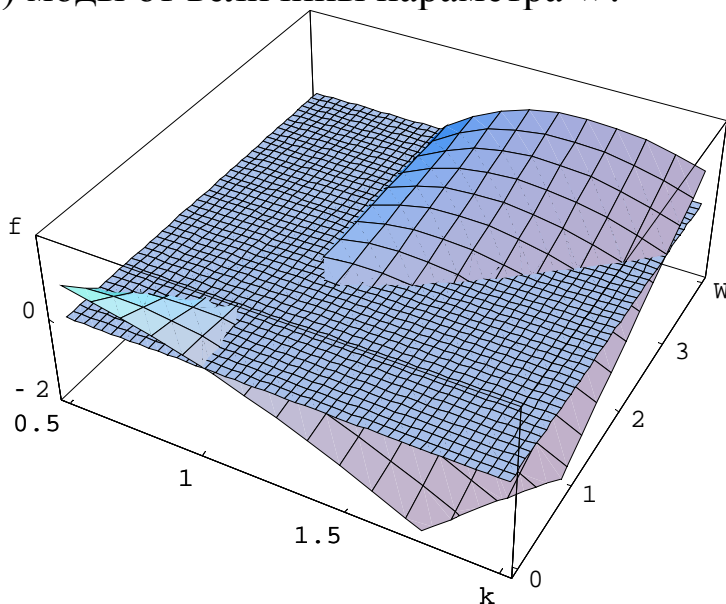


Рис. 5. Зависимость величины функции $f(k, m, w)$ от волнового числа k и параметра w , рассчитанная для $\varepsilon = 1.241$ и $m = 0$

Влияние вязкости на закономерности реализации неустойчивости струи качественно такое же, как и в исследованном в предыдущем разделе случае поверхностно заряженной электропроводной струи (см. [62]): с ростом вязкости жидкости величины инкрементов неустойчивости и волновые числа наиболее неустойчивых волн снижаются. А потому на этом вопросе не будем останавливаться отдельно.

Подводя итог сказанному выше, отметим, что для объемно заряженных струй диэлектрических жидкостей величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод снижаются при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости, причем этот эффект сказывается тем сильнее, чем меньше азимутальное число m (чем меньше степень несимметричности). Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных условиях превышать величины инкремента неустойчивости

осесимметричных мод, что существенно скажется на закономерностях дробления струи на капли.

Приложение. Вычислим давление электрического поля на поверхность заряженной диэлектрической струи вязкой несжимаемой жидкости $P_q(\varphi, z, t)$, полагая, что потенциалы электрического поля внутри Φ^{in} и вне капли Φ^{ex} являются решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{in} &= -4\pi\frac{\eta}{\varepsilon}, & \Delta\Phi^{ex} &= 0, \\ r=1+\xi: & \Phi^{in} = \Phi^{ex}, & \varepsilon\frac{\partial\Phi^{in}}{\partial n} &= \frac{\partial\Phi^{ex}}{\partial n}, \\ r \rightarrow 0: & \nabla\Phi^{in} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty: & \Phi^{ex} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Разделим потенциалы электрического поля внутри и вне струи на две части: потенциал на невозмущенной поверхности струи Φ_0 и добавку к потенциалу ϕ , вызванную возмущением поверхности $\xi(\varphi, z, t)$ и имеющую тот же порядок малости:

$$\Phi^{in} = \Phi_0^{in} + \phi^{in}, \quad \Phi^{ex} = \Phi_0^{ex} + \phi^{ex}.$$

Подставляя данные разложения в краевую задачу, разобьем краевую задачу по порядкам малости. Для этого предварительно распишем выражения для потенциалов и производных по нормали, входящие в граничные условия на возмущенной поверхности струи, в линейном по $|\xi|$ приближении:

$$\begin{aligned} \Phi^{in}\Big|_{r=1+\xi} &= \left[\Phi_0^{in} + \phi^{in} \right]_{r=1+\xi} \approx \left[\Phi_0^{in} + \xi \frac{\partial\Phi_0^{in}}{\partial r} + \phi^{in} \right]_{r=1}; \\ \frac{\partial\Phi^{in}}{\partial n}\Big|_{r=1+\xi} &= \left[\frac{\partial\Phi_0^{in}}{\partial n} + \frac{\partial\phi^{in}}{\partial n} \right]_{r=1+\xi} \approx \left[\frac{\partial\Phi_0^{in}}{\partial r} + \frac{\partial\phi^{in}}{\partial r} \right]_{r=1+\xi} \approx \left[\frac{\partial\Phi_0^{in}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_0^{in}}{\partial r^2} + \frac{\partial\phi^{in}}{\partial r} \right]_{r=1}. \end{aligned}$$

При этом учитывалось что

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial\xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z},$$

а также тот факт, что потенциал электрического поля в отсутствие возмущения поверхности струи Φ_0 обладает осевой симметрией. Поэтому

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0.$$

Разложения для Φ^{ex} и $\partial \Phi^{ex} / \partial n$ производятся аналогично.

Используя полученные выражения, запишем краевую задачу для отыскания невозмущенных потенциалов:

$$\Delta \Phi_0^{in} = -4\pi \frac{\eta}{\varepsilon}, \quad \Delta \Phi_0^{ex} = 0,$$

$$r = 1: \quad \Phi_0^{in} = \Phi_0^{ex}, \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi_0^{in}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial n},$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \Phi_0^{in} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi_0^{ex} \rightarrow 0,$$

и для добавок первого порядка малости:

$$\Delta \phi^{in} = 0, \quad \Delta \phi^{ex} = 0,$$

$$r = 1: \quad \phi^{in} + \frac{\partial \Phi_0^{in}}{\partial r} \xi = \phi^{ex} + \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \xi, \quad \varepsilon \left[\frac{\partial \phi^{in}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{in}}{\partial r^2} \xi \right] = \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0^{ex}}{\partial r^2} \xi,$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \phi_0^{in} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \phi_0^{ex} \rightarrow 0,$$

Решение нулевого порядка малости, т. е. электрическое поле вблизи невозмущенной цилиндрической поверхности струи, определяется выражением

$$\Phi_0^{in} = -\frac{\pi \eta r^2}{\varepsilon}, \quad \Phi_0^{ex} = -\frac{\pi \eta}{\varepsilon} - 2\pi \eta \cdot \ln r.$$

Решения уравнений Пуассона и Лапласа в цилиндрической системе координат запишем в виде разложений по волнам, бегущим вдоль оси OZ :

$$\begin{aligned}\phi^{in} &= \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^1 \cdot I_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st) dk, \\ \phi^{ex} &= \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^2 \cdot K_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st) dk,\end{aligned}\quad (1)$$

где m – целые числа, k – волновое число, $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода и второго рода, C_m^1 и C_m^2 – коэффициенты разложения, зависящие от k и m .

В виде аналогичного разложения представим и функцию $\xi(\varphi, z, t)$, описывающую возмущение равновесной поверхности струи:

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_m \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(st) dk, \quad (2)$$

где G_m – коэффициенты разложения, зависящие от m и k .

Из граничных условий на невозмущенной поверхности струи $r = 1$ несложно получить связь коэффициентов G_m и C_m^2 :

$$C_m^2 = G_m \frac{2\pi\eta}{K_m(k)} \left[2 + (\varepsilon - 1) \frac{k \cdot I_m'(k)}{I_m(k)} \Big/ \varepsilon \frac{k \cdot I_m'(k)}{I_m(k)} - \frac{k \cdot K_m'(k)}{K_m(k)} \right]. \quad (3)$$

При получении этого соотношения мы учли линейную независимость функций $\exp(im\varphi)$ при разных m и функций $\exp(ikz)$ при различных значениях волнового числа k . Эти свойства могут быть выражены в виде следующих интегральных соотношений:

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(m_1 - m_2)\varphi] d\varphi = \delta_{m_1, m_2}, \quad \int_0^{2\pi} \exp[i(k_1 - k_2)z] dz = \delta(k_1 - k_2),$$

где δ_{m_1, m_2} – символ Кронекера, $\delta(k_1 - k_2)$ – дельта-функция Дирака.

Чтобы рассчитать давление электрического поля на свободную поверхность струи :

$$P_q = -\eta \cdot \Phi^{in} + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\varepsilon} \left[\frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial n} \right]^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial \tau} \right]^2$$

с сохранением слагаемых первого порядка малости запишем

$$\begin{aligned}
P_q(z, \varphi, t) \Big|_{r=1+\xi} &= \left\{ -\eta \Phi^{in} + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial n} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{ex}}{\partial \tau} \right)^2 \right\} \Big|_{r=1+\xi} = \\
&= \left\{ -\eta (\Phi_0^{in} + \phi^{in}) + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial n} + \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial n} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial \tau} \right)^2 \right\} \Big|_{r=1+\xi} \approx \\
&\approx \left\{ -\eta (\Phi_0^{in} + \phi^{in}) + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon-1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial \tau} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial \tau} \right\} \Big|_{r=1+\xi} \approx \\
&\approx -\eta \left(\Phi_0^{in} + \xi \frac{\partial \Phi_0^{in}}{\partial r} + \phi^{in} \right) \Big|_{r=1} + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \right)^2 \xi + \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r} \Big|_{r=1}.
\end{aligned}$$

В полученном выражении для давления $P_q(z, \varphi, t)$ слагаемыми $\approx \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial \tau} \right)^2$ и $\approx \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial \tau} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial \tau}$ в линейном по ξ приближении можно пренебречь.

Ввыпишем отдельно давление электрического поля на невозмущенную поверхность диэлектрической заряженной струи P_q^0 и добавку к давлению электрического поля p_q , вызванную малым возмущением равновесной поверхности струи и имеющий первый порядок малости по этому возмущению:

$$\begin{aligned}
P_q^0(z, \varphi, t) &\approx \left(-\eta \Phi_0^{in} + \frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \right)^2 \right) \Big|_{r=1}, \\
p_q &\approx -\eta \left(\phi^{ex} + \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \xi \right) \Big|_{r=1} + \left(\frac{\varepsilon-1}{8\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \right)^2 \xi + \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \Phi_0^{ex}}{\partial r} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}.
\end{aligned}$$

В итоге, подставляя сюда найденные выражения для потенциалов Φ_0^{ex} , получим

$$p_q = \frac{2\pi\eta^2\xi}{r} \left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon r^2}\right) - \eta \left(\phi^{ex} + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon r} \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r}\right),$$

где функции $\xi(\varphi, z, t)$ и $\phi^{ex}(\mathbf{r}, t)$ определяются соотношениями (1)–(2) с учетом (3).

3. Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды

Введение. В большинстве практических применений феномена электродиспергирования жидкости присутствует среда с отличной от нуля плотностью. Однако специальных исследований, посвященных влиянию среды на капиллярный распад струй, выполнено весьма мало, хотя, исходя из общезначимой формулировки проблемы, естественно ожидать реализацию на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой среды, аналога неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, что и определит феноменологию распада струи на капли. В отличие от капиллярной неустойчивости струи, имеющей апериодический характер, когда временная зависимость амплитуд определяется выражением $\sim \exp(\gamma t)$, где γ вещественно, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является колебательной, т. е. соответствует экспоненциальному росту со временем амплитуды неустойчивой волны $\sim \exp(\gamma t) \cdot \cos(\omega t)$, где ω частота. В указанных условиях наличие внешней для струи среды будет приводить к ее дестабилизации, что и было предсказано Рэлеем и Бассетом в [29–30]. В этой связи представляется актуальным исследовать особенности реализации капиллярной неустойчивости заряженной струи, движущейся относительно диэлектрической среды.

1. Математическая формулировка задачи. В связи со сказанным выше, рассмотрим задачу об исследовании устойчивости

капиллярных волн на однородно заряженной с поверхностной плотностью заряда χ цилиндрической поверхности идеально проводящей несжимаемой струи идеальной жидкости радиуса R , с коэффициентом межфазного натяжения σ и плотностью ρ_2 , движущейся со скоростью $U_0 \parallel \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z – орт продольной координаты, в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_1 и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи и движущейся со струей со скоростью U_0 , в цилиндрической системе координат, орт \mathbf{e}_z которой совпадает по направлению с U_0 и с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_2 = \sigma = 1$, а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением

$$F(r, z, \varphi, t) \equiv r - 1 - \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ – малое возмущение цилиндрической поверхности струи, φ – азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0; \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$\partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1; \quad \partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2 \nabla) \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{u}_1 \rightarrow -U_0; \quad \nabla \Phi \rightarrow 0;$$

$$r = \xi: \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2; \quad p_2 - p_1 + p_E - p_\sigma = 0; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t),$$

где $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{u}_j(\mathbf{r}, t)$ – поля скоростей течения жидкости в среде ($j = 1$) и в струе ($j = 2$), генерируемые волнами на поверхности раздела сред; $p_j \equiv p_j(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамические давления в среде ($j = 1$) и

струе ($j=2$); p_E и p_σ – давление электрических сил и давление сил поверхностного натяжения на границе раздела сред соответственно; $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r}, t)$ – потенциал электростатического поля; $\Phi_s(t)$ – потенциал поверхности струи; \mathbf{n} – орт нормали к поверхности струи; ρ – безразмерная плотность среды.

В качестве дополнительных условий примем условие постоянства объёма струи, приходящегося на одну длину волны λ (при одноволновой деформации границы раздела сред):

$$\int_V dV = \pi\lambda; \quad V = \{0 \leq r \leq 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\},$$

и условие сохранения заряда на отрезке струи длиной λ :

$$-\int_S \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi dS = 2\pi\chi\lambda; \quad S = \{r = 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

2. Скаляризация задачи. В силу идеальности и несжимаемости жидкостей, которыми моделируются капля и среда, воспользуемся моделью потенциального волнового движения жидкостей, в рамках которой можно ввести потенциалы полей скоростей $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{u}_1 \equiv -\mathbf{U}_0 + \nabla \psi_1; \quad \mathbf{u}_2 \equiv \nabla \psi_2.$$

Потенциалы $\psi_j(\mathbf{r}, t)$, так же как и $\Phi(\mathbf{r}, t)$, при этом будут гармоническими функциями:

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0,$$

удовлетворяющими условиям ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_1 \rightarrow 0/$$

Введение потенциалов скоростей позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера и получить выражения для давлений в обеих средах:

$$p_1 = -\rho \partial_t \psi_1 - \frac{\rho}{2} (-\mathbf{U}_0 + \nabla \psi_1)^2 + \rho C_1;$$

$$p_2 = -\partial_t \psi_2 - \frac{1}{2}(\nabla \psi_2)^2 + C_2,$$

где C_j – константы интегрирования.

3. Линеаризация задачи. Поскольку потенциалы $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ описывают ту часть поля скоростей, которая порождается волновыми движениями поверхности раздела сред, примем, что в безразмерном виде они являются величинами того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред:

$$|\psi_1| \sim |\psi_2| \sim |\xi|.$$

Потенциал электростатического поля в окрестности струи представим в виде суперпозиции Φ_0 – потенциала в окрестности цилиндрической струи, являющегося величиной нулевого порядка малости по $|\xi|$, и поправки Φ_1 , порождаемой волновой деформацией цилиндрической поверхности струи, которая будет величиной того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред и гидродинамические потенциалы:

$$\Phi_1 \sim |\xi|.$$

Указанные обстоятельства позволяют линеаризовать систему уравнений и граничных условий, разложив исходную векторную задачу на две скалярные задачи для величин нулевого и первого порядков малости.

Задача нулевого порядка малости описывает стационарное состояние системы:

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{U}_0; \quad p_1^{(0)} = -\frac{\rho}{2}U_0^2 + C_1; \quad p_2^{(0)} = C_2; \quad \Delta\Phi_0 = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_0 \rightarrow 0; \quad r = 1: \quad \Phi_0 = \Phi_s^{(0)};$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=1} d\varphi dz = 2\pi\chi\lambda; \quad p_2^{(0)} - p_1^{(0)} + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi_0)^2 - 1 = 0$$

и имеет решение:

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{U}_0; \quad \mathbf{u}_2 = 0; \quad \Phi_0 = -4\pi\chi \ln r; \quad p_1^{(0)} = p_0; \quad p_2^{(0)} = p_0 - 2\pi\chi^2 + 1.$$

Здесь $p_j^{(0)}$, где $(j=1;2)$, и Φ_0 – гидродинамические давления в обеих средах и электростатический потенциал в стационарном состоянии; p_0 – константа, равная гидростатическому давлению во внешней среде.

Задача первого порядка запишется в виде

$$\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= 0; & \Delta\psi_2 &= 0; & \Delta\Phi_1 &= 0; \\ r \rightarrow 0: & \psi_2 \rightarrow 0; & r \rightarrow \infty: & \psi_1 \rightarrow 0; & \Phi_1 &\rightarrow 0; \\ r = 1: & \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} - U_0 \frac{\partial\xi}{\partial z}; & \partial_r\Phi_0\xi + \Phi_1 &= 0; & \frac{\partial\psi_2}{\partial r} &= \frac{\partial\xi}{\partial t}; \end{aligned}$$

$$-\partial_t\psi_2 + \rho \partial_t\psi_1 + \rho\mathbf{U}_0 \cdot \nabla\psi_1 + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\nabla\Phi_0)^2}{\partial r} \xi + \frac{1}{4\pi} (\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_1) + \xi + \Delta_S \xi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \xi \, d\varphi \, dz = 0; \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \xi + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} \xi + \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \right) d\varphi \, dz = 0;$$

$$\Delta_S \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Решение этой задачи ищем в виде элементарных бегущих волн:

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, z, t) &= \alpha(t) \exp(ikz + im\varphi); \\ \psi_1(\mathbf{r}, t) &= c(t) \exp(ikz + im\varphi) \cdot K_m(kr); \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) &= b(t) \exp(ikz + im\varphi) \cdot I_m(kr); \\ \Phi_1(\mathbf{r}, t) &= a(t) \exp(ikz + im\varphi) \cdot K_m(kr), \end{aligned} \tag{1}$$

где $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка m ; m – азимутальный параметр. Кинематическое граничное условие и условие эквипотенциальности поверхности струи позволяют выразить неизвестные амплитуды

$a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ в решениях для гидродинамических и электростатического потенциалов через амплитуду $\alpha(t)$ волн на границе раздела сред:

$$b(t) = \frac{\alpha'(t)}{k I'_m(k)}; \quad c(t) = \frac{1}{k K'_m(k)} [\alpha'(t) - \alpha(t) i k U_0]; \quad a(t) = \alpha(t) \frac{4\pi\chi}{K_m(k)}. \quad (2)$$

Подставляя проекты решений (1) с учетом (2) в динамическое граничное условие, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной амплитуды $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \beta_m \cdot \alpha''(t) - 2i\delta_m \cdot \alpha'(t) + \kappa_m \cdot \alpha(t) &= 0; & (3) \\ \beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} &\equiv \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m}; & \delta_m(k, U_0) \equiv k \rho U_0 h_m^{-1}; \\ \kappa_m(k, \chi, U_0) &\equiv \left\{ [1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)] - We \cdot k^2 h_m^{-1} \right\}; \\ h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)} &\equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; & g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)} \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}; \\ w &\equiv 4\pi\chi^2; & We \equiv \rho U_0^2. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) естественно искать в периодическом виде:

$$\alpha(t) \sim \exp(ist), \quad (4)$$

где s – частота капиллярных волн, в общем случае комплексная. Подставим (4) в (3) и получим дисперсионное уравнение задачи:

$$s^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0.$$

Несложно видеть, что при $U_0 = 0$ это дисперсионное уравнение сводится к дисперсионному уравнению для капиллярных волн на поверхности идеальной несжимаемой электропроводной струи, неподвижной относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды, а при $\rho = 0$ – к дисперсионному уравнению для струи в вакууме.

Решения дисперсионного уравнения имеют вид

$$s_{1,2} = \frac{\delta_m}{\beta_m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{\beta_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}}$$

ИЛИ

$$s_{1,2} = \frac{g_m}{(\rho g_m - h_m)} k \rho U_0 \pm \sqrt{\left[\frac{g_m k \rho U_0}{(\rho g_m - h_m)}\right]^2 + \frac{\left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m - We \cdot k^2 g_m\right]}{(\rho g_m - h_m)}}. \quad (5)$$

При изменении физических параметров системы волны на поверхности раздела сред будут сохранять устойчивость, пока частоты $s_{1,2}$ остаются вещественными, т. е. пока подкоренное выражение в (5) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот $s_{1,2}$ появится мнимая часть и они образуют пару комплексно сопряженных корней: $s \equiv \text{Re } s \pm \text{Im } s$. При этом амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты, пропорциональная $\exp[i(\text{Re } s - i|\text{Im } s|)t] \sim \exp[|\text{Im } s| \cdot t] \cdot \exp[i\text{Re } s \cdot t]$, будет экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду с инкрементом: $\gamma \equiv |\text{Im } s|$, что приведет к распаду струи на отдельные капли. Амплитуда волны с положительной мнимой частью частоты будет экспоненциально во времени затухать.

Для удобства качественного анализа соотношения (5) на рис. 1 и 2 для первых трёх значений азимутального числа m приведены графики зависимостей $h_m = h_m(k)$ и $g_m = g_m(k)$ соответственно. Из (5) видно, что поскольку независимо от номера азимутального числа $h_m < 0$, а $g_m > 0$, то для ситуации жидкой струи в газообразной среде ($\rho \sim 0.001 \text{ g/cm}^3$) при любых разумных скоростях ($U_0 \leq 1000 \text{ cm/s}$ [56]) для волн с волновыми числами, представляющими интерес в плане капиллярно-электростатического дробления струи ($k \sim 1$), второе слагаемое под радикалом в (5), как правило, отрицательно и фактически определяет величину инкремента неустойчивости. Приравняв в (5) подкоренное вы-

ражение нулю, получим критическое условие перехода от устойчивых волн к неустойчивым:

$$\rho k^2 We + \left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) \frac{h_m}{g_m} - k^2 We \cdot \frac{1}{g_m} \right] (\rho g_m - h_m) = 0. \quad (6)$$

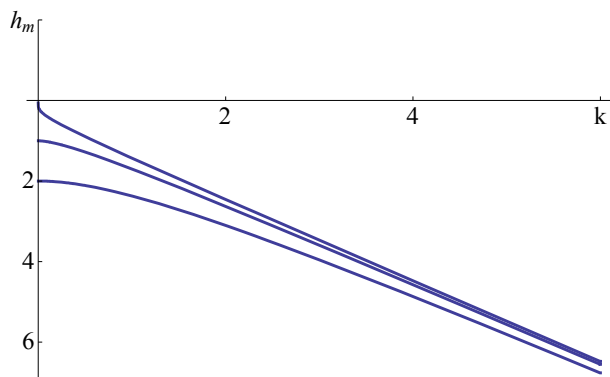


Рис. 1. Зависимости от безразмерного волнового числа коэффициента $h_m(k)$, построенные при различных значениях азимутального числа: $m = 0; 1; 2$ (сверху вниз)

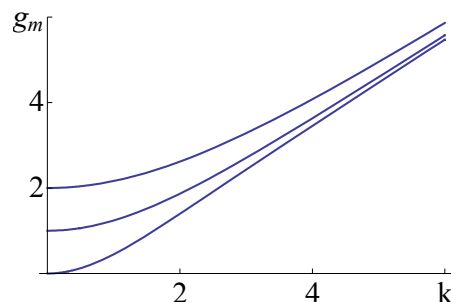


Рис. 2. Зависимости от безразмерного волнового числа коэффициента $g_m(k)$, построенные при различных значениях азимутального числа: $m = 0; 1; 2$ (снизу вверх)

Из (6) легко найти критическое для начала реализации неустойчивости значение параметра We , пропорционального квадрату скорости:

$$We = \frac{[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m)](\rho g_m - h_m)}{k^2}. \quad (7)$$

Здесь следует отметить, что безразмерный параметр We , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид $We \equiv (\rho_1 R U_0^2 / \sigma)$ и, согласно экспериментальным данным [56], в газообразной среде его величина ограничена сверху значением $We \sim 1$.

Из (7) несложно видеть, что с увеличением χ – поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред (параметра w) – критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения U_0 (параметра We) снижается, и при

$$w = \frac{(1 - m^2 - k^2)}{(h_m + 1)} \quad (8)$$

обращается в нуль. При значении параметра w , определяемом соотношением (8), реализуется электростатически-капиллярная неустойчивость волны с азимутальным числом m [47].

Для отыскания волнового числа k_m наиболее неустойчивой волны (волны, обладающей максимальным инкрементом γ и определяющей феноменологию разбиения струи на капли) следует приравнять нулю $\Upsilon \equiv \partial\gamma/\partial k$ – производную по волновому числу k от инкремента неустойчивости

$$\gamma \equiv - \left| \operatorname{Im} \left(\sqrt{\left[\frac{g_m k \rho U_0}{(\rho g_m - h_m)} \right]^2 + \frac{\left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m - We \cdot k^2 g_m \right]}{(\rho g_m - h_m)}} \right) \right| \quad (9)$$

и разрешить получившееся уравнение $\Upsilon(k) = 0$ относительно k . В силу громоздкости уравнения, содержащего функции Бесселя первого и второго родов и их производные, такая задача аналитически неразрешима, но её можно проанализировать графически.

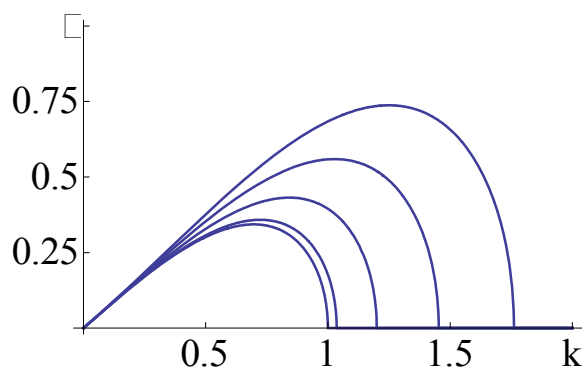


Рис. 3а. Зависимости от безразмерного волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн ($m = 0$), построенные при $\rho = 0.001$ для различных значений безразмерного параметра We : Снизу вверх: $We = 0; 0.1; 0.5; 1; 1.5$; а) $w = 0$

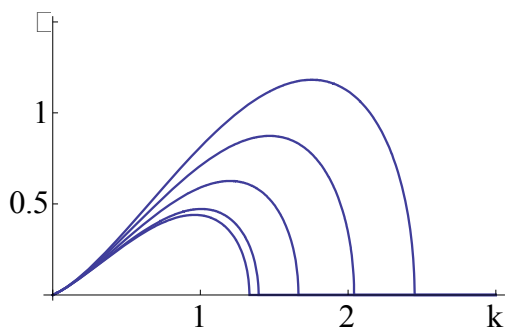


Рис. 3б. $w = 1$

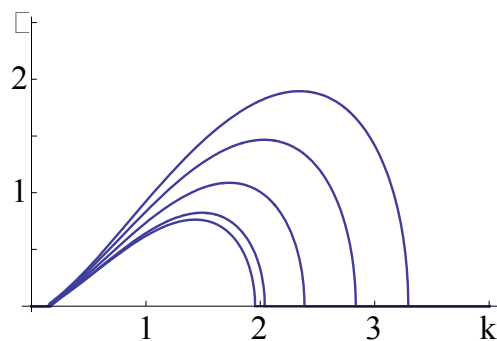


Рис. 3с. $w = 2$

Из рис. 3а, на котором приведены графики зависимости величины инкремента осесимметричных волн ($m = 0$) на границе раздела сред от волнового числа k при нескольких фиксированных значениях параметров We и $w = 0$, видно, что с увеличением параметра We ширина области волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам, расширяется, а величина волнового числа, соответствующего волне с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. В самом деле, для струи в вакууме (при $We = 0$) капиллярную неустойчивость претерпевают волны с волновыми числами $k^2 < 1$. При наличии материальной внешней среды ($We \neq 0$) в отсутствие электрического заряда ширина диапазона волновых чисел неустойчивых осесимметричных волн расширяется до $k^2 < |h_0| / (|h_0| - We)$. Видно, что чем больше We , тем шире зона неустойчивости. При наличии на капле заряда при прочих равных условиях правая граница зоны неустойчивости еще больше смещается в область больших волновых чисел, так же как и волновое число волны с максимальным инкрементом (см. рис. 3б), а величины инкрементов увеличиваются. При больших зарядах на струе левая граница зоны неустойчивости отрывается от начала координат и смещается вправо, в область больших значений волновых чисел (см. рис. 3с). Такое поведение зон неустойчивости обязано сильному влиянию электрического заряда (см. [47, 179]), наиболее ярко проявляющемуся в отсутствие относительного движения струи и среды [179]. Согласно [179] зона капиллярной неустойчивости струи в отсутствие электрического заряда определяется соотношением $k^2 < 1$. По мере увеличения заряда зона капиллярной неустойчивости цели-

ком смещается в область больших значений волновых чисел и расширяется согласно условию

$$k^2 \leq 1 - w(1 + h_0). \quad (10)$$

В (10) множитель $(1 + h_0)$ положителен при малых значениях волновых чисел (при $k < 0.595$, см. рис.1) и отрицателен при больших значениях (при $k > 0.595$) [47]. Из (10) видно, что при достаточно больших значениях заряда (параметра w) и при малых волновых числах (при $k < 0.595$) правая часть (10), там где $w(1 + h_0) > 1$, становится отрицательной, что и будет соответствовать исчезновению неустойчивых решений, или, что то же самое, – смещению зоны неустойчивости в область больших величин волновых чисел.

Несколько иная картина влияния относительного движения капли и среды складывается для изгибной моды ($m = 1$). На рис. 4а приведены зависимости инкрементов неустойчивости от волновых чисел неосесимметричных волн с $m = 1$ при нулевом заряде на струе ($w = 0$). Видно, что с ростом скорости (с ростом параметра We) ширина зоны неустойчивости расширяется, величины инкрементов увеличиваются, а положение волнового числа, соответствующего волне, с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. Интересно, что неустойчивость изгибной моды при $w = 0$ имеет пороговый по We (по скорости) характер и реализуется при $We > 1$. В самом деле, для изгибной моды из (9) при $w = 0$ несложно получить критическое условие реализации неустойчивости в виде $We > |h_1|$. А поскольку, согласно рис. 1, при $m = 1$ минимальное значение $|h_1|$ есть единица, то мы получаем аналитическое подтверждение полученных расчетных данных. При увеличении электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи (или на единицу площади поверхности струи [47]), изгибная неустойчивость струи реализуется уже при весьма маленьких значениях относительной скорости струи и среды (параметра We). Ширина области неустойчивости и величина инкремента, так же как и волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом, увеличиваются с ростом скорости (параметра We), как это видно из рис. 4б–4с.

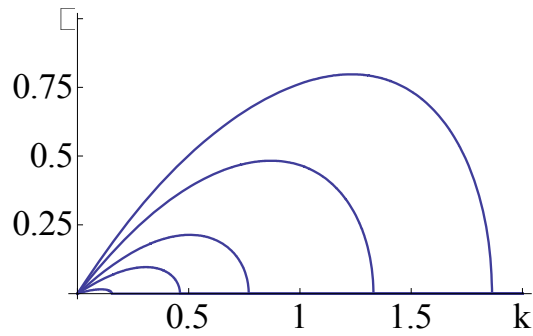


Рис. 4а. Зависимости от безразмерного волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн с $m = 1$ (изгибных волн), построенные при $\rho = 0.001$ для различных значений безразмерного параметра We : снизу вверх: а) $We = 1.05; 1.25; 1.5; 2; 2.5$, $w = 0$

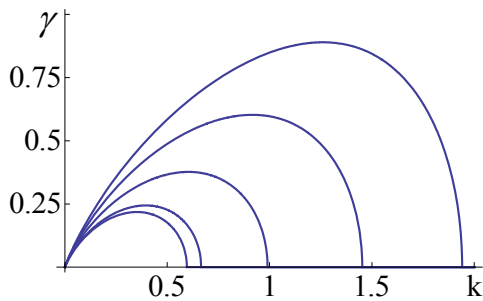


Рис. 4б. $We = 0.001; 0.1; 0.5; 1; 1.5$, $w = 1$

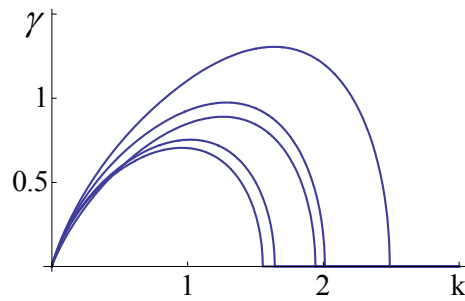


Рис. 4с. $We = 0.001; 0.1; 0.5; 1; 1.5$, $w = 2$

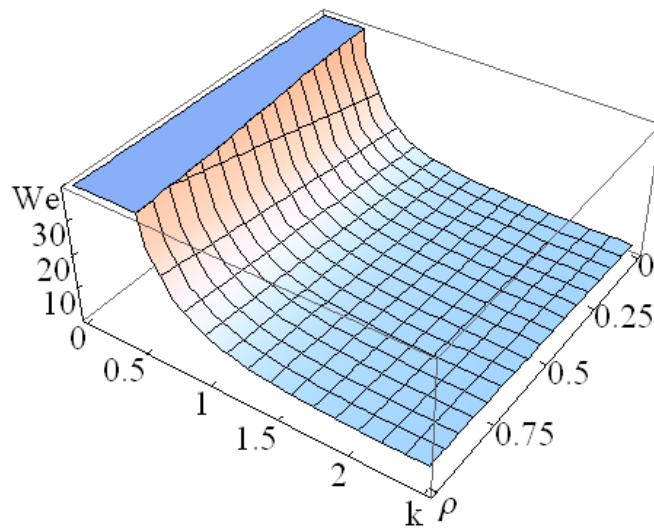


Рис. 5. Зависимость критической для реализации электростатически-аэродинамической неустойчивости боковой поверхности струи величины параметра We от отношения плотностей ρ для несимметричных волн ($m = 2$), рассчитанная при $w = 1$

Электростатически-аэродинамическая неустойчивость в потоке внешней среды боковой поверхности струи ($m = 2$), согласно рис. 5, реализуется только при больших значениях параметра We . При этом с ростом отношения плотностей критическая величина We увеличивается. При уменьшении зарядового параметра w поверхность $We = We(\rho, k)$ поднимается вверх.

Критическая величина скорости U_0 с ростом отношения плотностей будет уменьшаться:

$$U_0 = \sqrt{\frac{[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m)](\rho g_m - h_m)}{\rho k^2}} \geq 0,$$

как это видно из рис. 6, на котором приведены зависимости от ρ критической величины скорости U_0 .

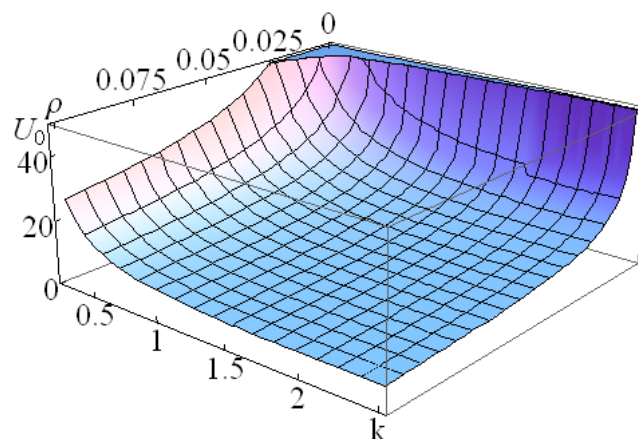


Рис. 6. Зависимость критической для реализации электростатически-аэродинамической неустойчивости боковой поверхности струи величины скорости U_0 от отношения плотностей ρ для неосесимметричных волн ($m = 2$), рассчитанная при $w = 1$

При уменьшении величины зарядового параметра поверхность $U_0 = U_0(\rho, k)$ поднимается вверх, как это имело место для параметра We .

4. Влияние внешнего поля

4.1. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле

Введение. Появление на поверхности электропроводной струи электрического заряда приводит к проявлению неустойчивости и неосесимметричных волн, а также к некоторому расширению спектра неустойчивых осесимметричных волн в область более коротких длин волн [180]. Если же незаряженную струю диэлектрической жидкости поместить в коллинеарное ей внешнее электрическое поле, то, как показано в [84–86], оно увеличит устойчивость осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи за счет смещения правой границы области устойчивости в сторону более длинных волн. Феномен стабилизации осесимметричных капиллярных волн продольным электрическим полем представляет значительный интерес в связи с попытками физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально. Тем не менее обсуждаемый феномен исследован недостаточно полно.

1. Постановка задачи. Пусть имеется бесконечная, движущаяся параллельно однородному электростатическому полю E_0 с постоянной скоростью U_0 (т. е. $U_0 \parallel E_0$) цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ε_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения γ , имеющая радиус R . Диэлектрическая проницаемость внешней среды – ε_{ex} .

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho = \gamma = R = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение, является величиной

такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Движение жидкости будем принимать потенциальным, т. е. $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$, где $\psi(\mathbf{r}, t)$ – потенциал поля скоростей волнового движения жидкости. Зададимся целью исследования критических условий реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью OZ , орт \mathbf{n}_z которой совпадает по направлению с осью симметрии цилиндрической струи и направлен вдоль вектора скорости \mathbf{U}_0 . Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением, т. е. имеющим размерные амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T/\gamma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [63], запишем в виде

$$F(r, \varphi, z, t) = r - (1 + \xi(\varphi, z, t)) = 0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе идеальной несжимаемой жидкости состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской), т. е. $\mathbf{E}_j = -\nabla\Phi_j(\mathbf{r}, t)$, $j \in \{in, ex\}$:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi_{in}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = 0$$

с граничными условиями:

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\psi \cdot \nabla F = 0; \quad P_{in} - P_{ex} + P_E = P_\gamma;$$

$$\varepsilon_{in} \cdot [\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in}(\mathbf{r}, t)] = \varepsilon_{ex} \cdot [\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)]; \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t);$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – единичные вектора касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $\Phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ – электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно; P_{ex} – давление во внешней среде; $P_{in}(\mathbf{r}, t) \equiv P_{in}^{(0)} - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi(\mathbf{r}, t))^2$ – поле давлений внутри струи; $P_{in}^{(0)}$ – постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения в ней; $P_\gamma \equiv \text{div} \mathbf{n}$ – давление сил поверхностного натяжения; P_E – давление электрического поля на поверхность капли:

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_{ex})^2 - 2(-\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex})^2 \right] + \frac{\varepsilon_{in}}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_{in})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in})^2 \right].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^{1 + \xi} \int_0^{2\pi} dz r dr d\varphi = \pi \lambda.$$

2. Разбиение по порядкам малости. Малым параметром сформулированной задачи является безразмерная амплитуда волновой деформации поверхности струи $\varepsilon \equiv \max |\xi(\varphi, z, t)|$. Искомые функции деформации поверхности $\xi(\varphi, z, t)$ и гидродинамический потенциал волнового течения жидкости в струе $\psi(\mathbf{r}, t)$ являются малыми первого порядка по ε . Потенциалы электростатического поля $\Phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ содержат и слагаемые нулевого порядка малости. Их можно представить в виде

$$\Phi_{in}(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_{in}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \phi_{in}(\mathbf{r}, t); \quad \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \phi_{ex}(\mathbf{r}, t),$$

где $\Phi_{in}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ – слагаемые нулевого порядка малости по ε , а $\phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ – первого. В этой связи сформулированную задачу следует разбить по порядкам малости.

2а. В нулевом порядке малости по ε будем иметь невозмущенный волновым движением цилиндр в коллинеарном его оси

электростатическом поле. Это означает, что гидродинамических движений не будет, а оставшиеся искомые величины не станут зависеть от координат r и φ цилиндрической системы координат. В итоге получим задачу

$$\frac{\partial^2 \Phi_{in}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = 0$$

с граничными условиями:

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Phi_{in}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial z}; \quad \left(P_{in}^{(0)} - P_{ex} \right) + \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_{in}^{(0)}}{\partial z} \right)^2 = 1;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0;$$

$$\int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^1 \int_0^{2\pi} dz r dr d\varphi = \pi \lambda.$$

Решение этой задачи находится легко:

$$\Phi_{in}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -E_0 \cdot z; \quad \Phi_{ex}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -E_0 \cdot z;$$

$$\Delta P \equiv \left(P_{in}^{(0)} - P_{ex} \right) = 1 - (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) \frac{E_0^2}{8\pi}.$$

2b. В первом порядке малости по ε будем иметь задачу

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \phi_{in}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = 0$$

с граничными условиями:

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial z} - \left(1 - \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \right) \left(\frac{\partial \phi_{ex}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right] = - \left[\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right];$$

$$\varepsilon_{in} \cdot \left[\frac{\partial \phi_{in}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{in}^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] = \varepsilon_{ex} \cdot \left[\frac{\partial \phi_{ex}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{ex}^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right];$$

$$\frac{\partial \phi_{in}(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{ex}(\mathbf{r}, t)}{\partial z}; \quad \frac{\partial \phi_{in}(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi_{ex}(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad |\nabla \phi_{in}(\mathbf{r}, t)| \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \phi_{ex}(\mathbf{r}, t)| \rightarrow 0;$$

$$\int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^{2\pi} \xi(z, \varphi, t) dz d\varphi = 0.$$

Решение задачи первого порядка малости для неизвестных функций $\xi(\varphi, z, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам в виде

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t) dk;$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(2)} \cdot I_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t) dk;$$

$$\phi_{in}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(3)} \cdot I_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t) dk;$$

$$\phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(4)} \cdot K_m(kr) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot \exp(-i\omega t) dk,$$

где i – мнимая единица; k и ω волновое число и циклическая частота волны; m – азимутальный параметр; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

3. Дисперсионное уравнение. Подставляя выписанные проекты решений в систему граничных условий, из условия совместности получившейся системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений $C_m^{(l)}$ где $l = 1; 2; 3; 4$,

несложно выписать достаточно компактное дисперсионное уравнение задачи, которое:

$$\omega_m^2(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w) \equiv F_m(k) \left\{ k^2 + m^2 - 1 + w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} \cdot F_m(k) + \varepsilon_{ex} \cdot D_m(k)} \right\}; \quad (1)$$

$$w \equiv \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad F_m(k) \equiv k \frac{I_{m+1}(k)}{I_m(k)} + m; \quad D_m(k) \equiv k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)} - m.$$

Положив $m = 0$, получаем дисперсионное уравнение для осесимметричных капиллярных волн на поверхности незаряженной струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле, приведенное в [84–86]:

$$\omega_0^2(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w) \equiv F_0(k) \left\{ k^2 + w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} \cdot F_0(k) + \varepsilon_{ex} \cdot D_0(k)} - 1 \right\}. \quad (2)$$

4. Анализ полученных результатов. Волна с заданными значениями волнового k и азимутального m чисел претерпевает неустойчивость, когда $\omega_m^2(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w)$ – квадрат ее частоты – проходит через нуль и становится отрицательным. При этом частоты принимают мнимые значения и амплитуда одной из волн, для которой $\omega_m(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w) \equiv i \cdot \eta(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w)$, начинает экспоненциально нарастать со временем с инкрементом $\eta(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w)$.

В дисперсионном уравнении (1) функциональные множители $F_m(k)$ и $D_m(k)$ являются вещественными положительными при произвольных k и m . Это означает, что при $m \geq 1$ правая часть (1) всегда положительна, частоты $\omega_m(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w)$ вещественны и, следовательно, струя устойчива по отношению к неосесимметричным волновым возмущениям ее поверхности. Для $m = 0$ мы приходим к дисперсионному уравнению (2), имеющему мнимые решения для малых значений волновых чисел (для длинных волн), удовлетворяющих условию

$$k^2 + w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} \cdot F_0(k) + \varepsilon_{ex} \cdot D_0(k)} < 1. \quad (3)$$

В указанном диапазоне волновых чисел струя претерпевает осесимметричную капиллярную неустойчивость. Несложно видеть, что в отсутствие электрического поля (при $w=0$) диапазон волновых чисел неустойчивых осесимметричных волн определяется условием $0 < k < 1$, как и было получено для незаряженной струи при отсутствии электрического поля Рэлеем [180].

На рис. 1а–с приведены результаты численного расчета по дисперсионному уравнению (2) зависимости квадрата частоты ω^2 осесимметричных волн от волнового числа k при различных значениях параметров w , ε_{in} и ε_{ex} . С увеличением параметра w , пропорционального квадрату напряженности электрического поля, а также с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} и внешней среды ε_{ex} ширина диапазона волновых чисел волн, претерпевающих неустойчивость, сужается.

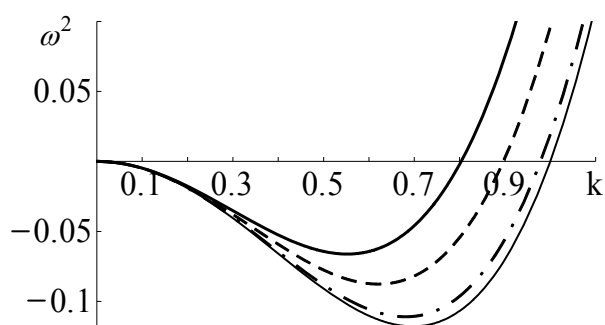


Рис. 1а). Зависимости квадрата безразмерной частоты ω^2 осесимметричных волн от безразмерного волнового числа k , при различных значениях физических параметров.

а) $\varepsilon_{in} = 2$; $\varepsilon_{ex} = 1$. Параметр w принимает различные значения:
 $w = 0$ – тонкая линия;
 $w = 0.1$ – штрих-пунктирная линия;
 $w = 0.5$ – пунктирная линия;
 $w = 1$ – толстая линия

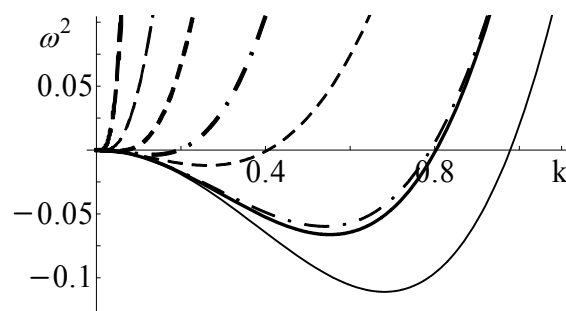


Рис. б). $\varepsilon_{ex} = 1$. Параметр w принимает два значения:
 $w = 0.1$ – тонкие линии;
 $w = 1$ – толстые линии.

Параметр ε_{in} принимает четыре различных значения:
 $\varepsilon_{in} = 2$ – сплошные линии;
 $\varepsilon_{in} = 5$ – штрихпунктирные линии;
 $\varepsilon_{in} = 10$ – короткопунктирные линии;
 $\varepsilon_{in} = 100$ – длиннопунктирные линии

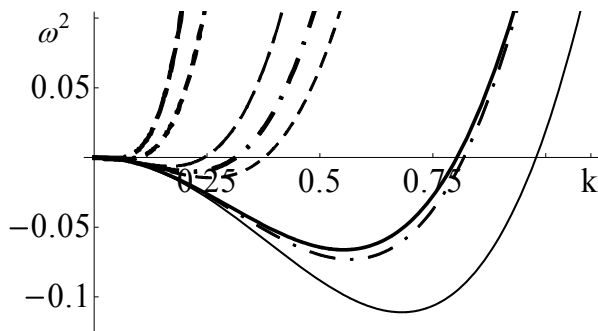


Рис. с). $\varepsilon_{in} = 2$. Параметр w принимает два значения: $w = 0.1$ – тонкие линии; $w = 1$ – толстые линии. Параметр ε_{ex} принимает четыре различных значения: $\varepsilon_{ex} = 1$ – сплошные линии; $\varepsilon_{ex} = 10$ – штрих-пунктирные линии; $\varepsilon_{ex} = 50$ – коротко-пунктирные линии; $\varepsilon_{ex} = 100$ – длинно-пунктирные линии

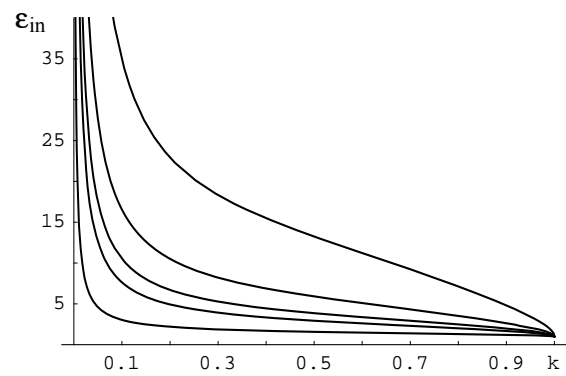


Рис. 2. Зависимости $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(k)$, построенные при $\varepsilon_{ex} = 1$ и различных значениях параметра w : $w \in \{0.05; 0.2; 0.5; 1; 10\}$. Кривые расположены в порядке изменения параметра w : верхняя кривая соответствует $w = 0.05$, нижняя – $w = 10$

Если выражение (3) переписать в виде

$$k^2 + w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} \cdot F_0(k) + \varepsilon_{ex} \cdot D_0(k)} - 1 = 0$$

и выразить из него, например, ε_{in} как функцию от остальных физических параметров $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(k, w, \varepsilon_{ex})$, то по полученному соотношению можно также исследовать зависимость ширины диапазона волновых чисел неустойчивых волн от физических параметров системы. На рис. 2 приведены зависимости $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(k)$, построенные при $\varepsilon_{ex} = 1$ и различных значениях параметра w . Видно, что для фиксированного значения $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}^* \equiv const$ ширина диапазона волновых чисел неустойчивых волн определится точкой пересечения графика $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(k)$, построенного при $w = w_* \equiv const$, с прямой, параллельной оси абсцисс, $\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}^* \equiv const$.

Несмотря на то что капиллярную неустойчивость могут претерпевать сразу бесконечное число волн с волновыми числами из непрерывного конечного диапазона значений, реальная картина дробления струи на капли определяется одной волной, обла-

дающей при прочих равных условиях максимальным инкрементом неустойчивости [15]. На рис. 3 приведены зависимости от волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн η и его производной по волновому числу $\chi \equiv (\partial\eta/\partial k)$, рассчитанные по (2) при заданных значениях диэлектрических проницаемостей и различных значениях параметра w . Условие $\chi \equiv (\partial\eta/\partial k) = 0$ позволяет найти волновые числа, соответствующие максимальным значениям инкремента. Несложно видеть, что с ростом параметра w (с ростом величины напряженности электростатического поля) уменьшаются как величины инкрементов, так и волновые числа волн с максимальной скоростью нарастания амплитуды. Другими словами, с увеличением напряженности продольного электростатического поля длины наиболее неустойчивых волн растут, а инкременты их неустойчивости снижаются. Данное обстоятельство позволяет объяснить особенности электродиспергирования жидкости в веретенообразном режиме [57–58].

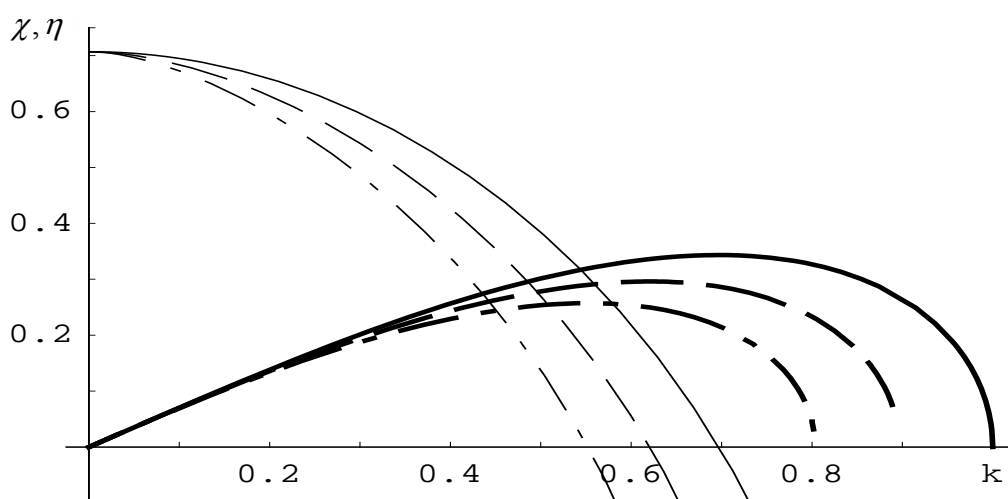


Рис. 3 Зависимости от безразмерного волнового числа величины безразмерного инкремента неустойчивости осесимметричных волн η (толстые линии) и его производной по волновому числу (тонкие линии), рассчитанные при $\varepsilon_{ex} = 1$, $\varepsilon_{in} = 2$ и различных значениях w : $w = 0$ – сплошные линии; $w = 0.5$ – пунктирные линии; $w = 1$ – штрих-пунктирные линии

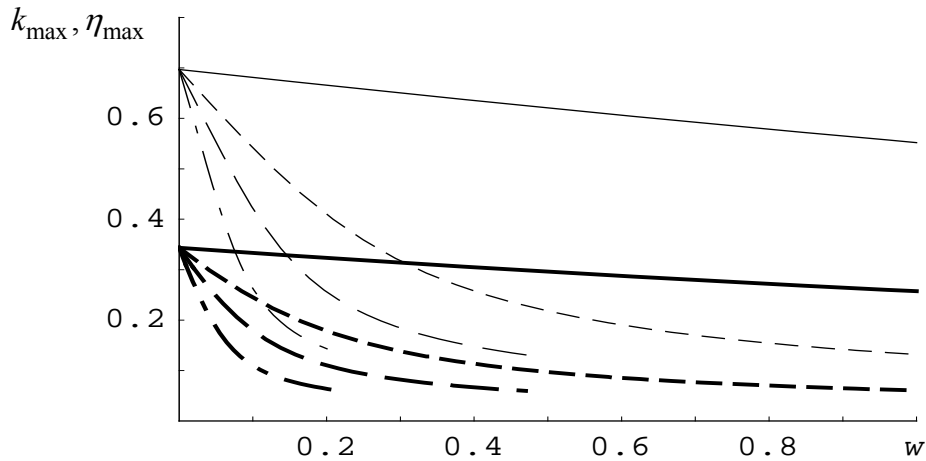


Рис. 4а. Зависимости от параметра w величин: волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом k_{\max} (тонкие линии), и самого максимального инкремента η_{\max} (толстые линии), рассчитанные при а) $\epsilon_{ex} = 1$ и различных значениях ϵ_{in} : $\epsilon_{in} = 2$ – сплошные линии; $\epsilon_{in} = 5$ – короткопунктирные линии; $\epsilon_{in} = 7$ – длиннопунктирные линии; $\epsilon_{in} = 10$ – штрихпунктирные линии

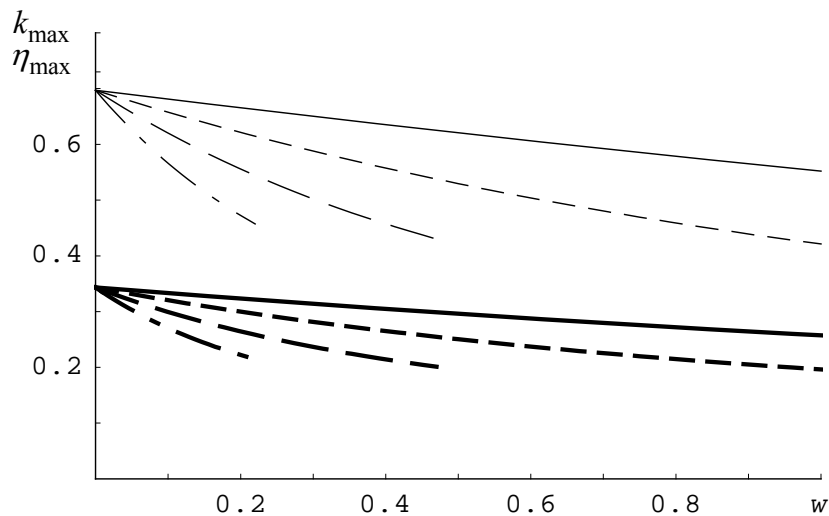


Рис. 4б) $\epsilon_{in} = 2$, значения ϵ_{ex} : следующие: $\epsilon_{ex} = 1$ – сплошные линии; $\epsilon_{ex} = 5$ – короткопунктирные; $\epsilon_{ex} = 7$ – длиннопунктирные; $\epsilon_{ex} = 10$ – штрихпунктирные линии

Следует отметить, что в феномене электродиспергирования жидкости экспериментально наблюдается более десятка различных режимов [56–58, 180], теоретическое осознание которых не до конца завершено. В устройствах для электродиспергирования жидкость подается в разрядную систему по металличе-

скому капилляру, на торце которого образуется примерно полусфероидальный мениск жидкости. Электрическое поле между капилляром и противоэлектродом вытягивает из мениска струйку жидкости [56, 180], которая и распадается на отдельные капли. Вытягиваемая струйка сужается по мере удаления от торца капилляра, а отрыв капелек имеет место с тонкого конца струйки. В веретенообразном режиме электродиспергирования иногда наблюдается одновременный разрыв струйки в сечениях разного диаметра: непосредственно у вершины мениска, где радиус струйки велик, и на тонком её конце, где он мал [56, 180]. Для теоретического истолкования такого феномена как раз и можно привлечь результаты проведенного в настоящей работе анализа.

На рис. 4а–b приведены зависимости от параметра w величин волнового числа волны, обладающей максимальным инкрементом k_{\max} , и самого максимального инкремента η_{\max} , рассчитанные при фиксированном значении $\varepsilon_{ex} = 1$ и различных значениях ε_{in} (рис. 4а) и фиксированном значении $\varepsilon_{in} = 1$ и различных значениях ε_{ex} (рис. 4б). Видно, что и волновые числа и величины инкрементов убывают с ростом w и величины диэлектрических проницаемостей.

В проведенном рассмотрении величины параметра w , как правило, брались малыми. Причина этого в том, что, например, значение параметра $w = 1$ соответствует размерной напряженности электростатического поля $E_0 = 2\sqrt{\pi\gamma/R}$. Для струи воды радиусом $R = 400 \mu m$ при $\gamma = 72 \text{ dyne/cm}$ это соответствует $E_0 \approx 150 \text{ CGSE} = 45 \text{ kV/cm}$. Такая напряженность электростатического поля существенно превышает напряжение электрического пробоя воздуха в постоянном однородном электрическом поле при атмосферном давлении, которое, согласно [181], составляет $\approx 26 \text{ kV/cm}$. Для струи этилового спирта того же радиуса при $\gamma = 23 \text{ dyne/cm}$ получим $E_0 \approx 85 \text{ CGSE} = 25.5 \text{ kV/cm}$. В экспериментах по электродиспергированию используются жидкости, коэффициенты поверхностного натяжения которых изменяются в весьма широких пределах – от $\approx 2 \text{ dyne/cm}$ для жидкого водорода до $\sim 1000 \text{ dyne/cm}$ для жидких полупроводников и окислов, а образующиеся при электродиспергировании струи имеют радиусы

$\sim 20 \div 1000 \mu m$ [56, 180]. Значения параметра $w \gg 1$, тем не менее, также имеют смысл и могут характеризовать устойчивость струи в вакууме, например в жидкометаллических источниках ионов или в масс-спектрометрах для анализа нелетучих и термически нестойких веществ (например, органического происхождения), когда используется электрогидродинамический способ подачи вещества.

4.2. Об устойчивости цилиндрической струи, движущейся относительно материальной среды вдоль внешнего электростатического поля

Введение. Феномены стабилизации осесимметричных капиллярных волн продольным электростатическим полем и дестабилизации вследствие движения свободной поверхности жидкости относительно материальной внешней среды представляют значительный интерес из-за незавершенности физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально.

1. Постановка задачи. Пусть имеется бесконечная, движущаяся параллельно однородному электростатическому полю E_0 с постоянной скоростью U (т. е. $U \parallel E_0$) цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ_2 , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ , имеющая радиус R . Массовая плотность внешней среды – ρ_1 , а её диэлектрическая проницаемость – ϵ_{ex} .

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U . В подобной системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $V_{in}(r, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho_2 = \sigma = R = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение и является величи-

ной такого же порядка малости, что и амплитуды волн. Движение жидкости в струе и среде будем принимать потенциальным, т. е. $\mathbf{V}_{in}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \Psi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}_{ex}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \Psi_{ex}(\mathbf{r}, t)$, где $\Psi_j(\mathbf{r}, t)$ – потенциалы полей скоростей волновых течений жидкости и среды ($j \in \{in; ex\}$). Зададимся целью исследования критических условий реализации неустойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью OZ , совпадающей с осью симметрии цилиндрической струи и направленной вдоль вектора скорости \mathbf{U} . Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением (т. е. имеющим размерные амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [63]), запишем в виде

$$F(r, \varphi, z, t) = r - (1 + \xi(\varphi, z, t)) = 0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением, $|\xi| \ll 1$.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости и идеальной несжимаемой диэлектрической среде состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской), т. е. напряженности электрического поля определяются как $\mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j(\mathbf{r}, t)$, $j \in \{in; ex\}$):

$$\Delta \Psi_{in}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \Psi_{ex}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = 0$$

с граничными условиями:

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + (\nabla \Psi_j, \nabla) F = 0; \quad (\mathbf{n}, \nabla \Psi_{in}) = (\mathbf{n}, \nabla \Psi_{ex});$$

$$P_{in} - P_{ex} + P_E = P_\sigma;$$

$$\varepsilon_{in} [(\mathbf{n}, \nabla) \Phi_{in}(\mathbf{r}, t)] = \varepsilon_{ex} [(\mathbf{n}, \nabla) \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)];$$

$$(\boldsymbol{\tau}, \nabla) \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) = (\boldsymbol{\tau}, \nabla) \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t);$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \Psi_{in}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \Phi_{in}(\mathbf{r}, t) < \infty;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0; \quad \nabla \Psi_{ex} \rightarrow -\mathbf{U},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – единичные вектора касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $\Psi_{in}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_{ex}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамические и электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно;

$$P_{in}(\mathbf{r}, t) \equiv P_{in}^{(0)} - \rho \partial_t \Psi_{in} - \frac{1}{2} (\nabla \Psi_{in})^2$$

и

$$P_{ex}(\mathbf{r}, t) \equiv -\rho \partial_t \Psi_{ex} - \frac{\rho}{2} (\nabla \Psi_{ex})^2$$

– поля давлений в струе и внешней среде; $P_{in}^{(0)}$ – постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения на её поверхности; $\rho \equiv \rho_1 / \rho_2$ – безразмерная плотность среды; $P_\sigma \equiv \text{div} \mathbf{n}$ – давление сил поверхностного натяжения; P_E – давление электрического поля на поверхность струи:

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_{ex})^2 - 2((\mathbf{n}, \nabla) \Phi_{ex})^2 \right] + \frac{\varepsilon_{in}}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_{in})^2 - 2((\mathbf{n}, \nabla) \Phi_{in})^2 \right].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{1+\xi} \int_0^{2\pi} dz r dr d\varphi = \pi \lambda.$$

2. Дисперсионное уравнение. Решение сформулированной задачи не представляет трудности и может быть проведено по схеме, подробно описанной в [180]. В расчетах первого порядка малости оно ищется в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам:

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(t) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk;$$

$$\Psi_{in}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)}(t) I_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk;$$

$$\Psi_{ex}(\mathbf{r}, t) = -Uz + \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(2)}(t) K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk;$$

$$\Phi_{in}(\mathbf{r}, t) = -E_0z + \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(3)}(t) I_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk;$$

$$\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) = -E_0z + \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(4)}(t) K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk, \quad (1)$$

где i – мнимая единица; k – волновое число; m – азимутальный параметр; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно; $\alpha_m(t)$ и $C_m^{(j)}(t)$ – зависящие от времени неизвестные амплитудные функции первого порядка малости.

Подставим проекты решений (1) в кинематическое граничное условие и условия для нормальных и касательных к поверхности струи компонент напряженности электрического поля, выразим неизвестные коэффициенты $C_m^{(j)}(t)$ через амплитуды волн на границе раздела сред $\alpha_m(t)$ и из динамического граничного условия получим систему несвязанных дифференциальных уравнений относительно $\alpha_m(t)$:

$$\alpha_m''(t) + 2i\beta_m(k)\alpha_m'(t) - \delta_m(k)\alpha_m(t) = 0; \quad (2)$$

$$\beta_m(k) \equiv \sqrt{\rho \text{We}} \frac{kg_m(k)}{[h_m(k) - \rho g_m(k)]};$$

$$\delta_m(k) \equiv \frac{h_m(k)g_m(k)}{[h_m(k) - \rho g_m(k)]} \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{[\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)]} - \text{We} \frac{k^2}{h_m(k)} \right);$$

$$h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)};$$

$$w \equiv E_0^2 / 4\pi; \quad \text{We} \equiv \rho U^2.$$

Штрихи у неизвестных амплитуд волн $\alpha_m(t)$ в (2) и у модифицированных функций Бесселя означает взятие производной по аргументу. Решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2), определяющего временную зависимость амплитуд волн, естественно искать в периодическом виде

$$\alpha(t) \sim \exp(ist), \quad (3)$$

где s – частота капиллярных волн, в общем случае комплексная. Подставим (3) в (2) и получим дисперсионное уравнение задачи:

$$s^2 + 2\beta_m(k)s + \delta_m(k) = 0. \quad (4)$$

Решения уравнения (4) имеют вид

$$s_{1,2}(k) = -\beta_m(k) \pm \sqrt{\beta_m^2(k) - \delta_m(k)}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что частоты, а следовательно, и фазовые скорости волн, бегущих по струе в противоположных направлениях, будут отличаться.

Несложно видеть, что при $\rho = 0$ выполняются соотношения:

$$\text{We} = 0, \quad \beta_m(k) = 0, \quad \delta_m(k) \equiv g_m(k) \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{[\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)]} \right),$$

а дисперсионное уравнение (4) сведется к полученному для струи в продольном электростатическом поле, когда окружающая среда является вакуумом. При $\rho = 0$ и $E_0 = 0$ получим $w = 0$, а дисперсионное уравнение (4) сведется к дисперсионному уравнению для капиллярных волн на поверхности незаряженной струи в вакууме [32, 180].

3. Обсуждение полученных результатов. При изменении физических параметров системы волны на поверхности раздела сред будут сохранять устойчивость пока частоты $s_{1,2}$ остаются вещественными, т. е. пока подкоренное выражение в (5) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот $s_{1,2}$ появится мнимая часть и они образуют пару комплексно сопряженных корней: $s \equiv \text{Re } s \pm i \text{Im } s \equiv \omega \pm i\gamma$. При этом амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты, пропорциональная $\exp[i(\omega - i\gamma)t] \equiv \exp[\gamma t] \exp[i\omega t]$, будет увеличивать свою амплитуду экспоненциально со временем с инкрементом γ , что приведет к распаду струи на отдельные капли. Амплитуда волны с положительной мнимой частью частоты будет экспоненциально во времени затухать.

На рис. 1а приведены зависимости от волновых чисел частот $\omega(k)$ и инкрементов неустойчивости $\gamma(k)$ осесимметричных ($m = 0$) капиллярных волн на поверхности струи при $\rho = 0$ и различных значениях полевого параметра w . В соответствии с классическими представлениями об устойчивости струи [180] при $w = 0$ неустойчивы длинные осесимметричные волны с $k \leq 1$. Причем неустойчивость имеет апериодический характер и реализуется под действием капиллярных сил. С ростом зарядового параметра w диапазон неустойчивых волн сужается к началу координат в согласии с существующими представлениями о стабилизирующем влиянии продольного электростатического поля [85].

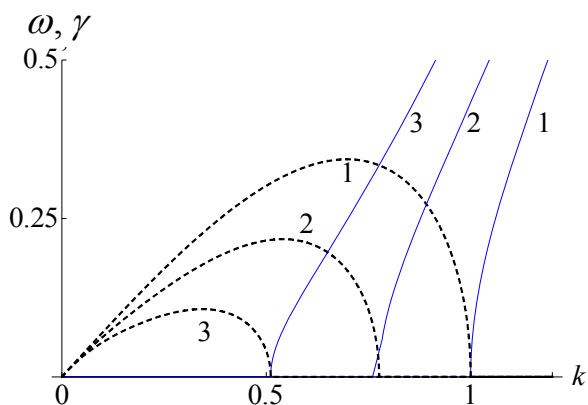


Рис. 1а. Зависимости от безразмерных волновых чисел безразмерных частот $\omega(k)$ (сплошные линии) и безразмерных инкрементов неустойчивости $\gamma(k)$ (пунктирные линии) осесимметричных ($m=0$) капиллярных волн на поверхности струи при $We=0$, $\rho=0$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях полевого параметра W :
1) $w=0$, 2) $w=0.0025$, 3) $w=0.005$

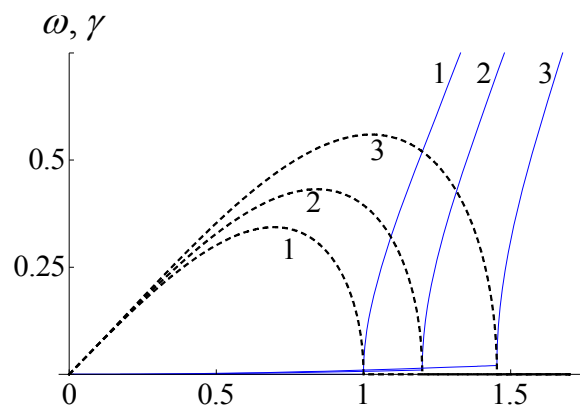


Рис. 1б. Те же зависимости, что на рис. 1а, но рассчитанные при $w=0$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях параметра Вебера We :
1) $We=0$, 2) $We=0.5$ 3) $We=1$

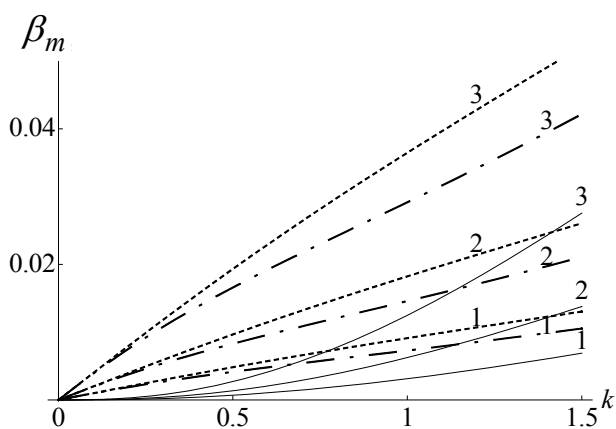


Рис. 1с. Зависимости от безразмерных волновых чисел безразмерных частот $\beta_m(k)$ капиллярных волн на поверхности струи при $w=0$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях параметра Вебера We : 1) $We=0.1$, 2) $We=0.4$, 3) $We=1.6$, сплошными кривыми нанесены зависимости $\beta_0(k)$ для осесимметричных волн ($m=0$); штрихпунктирными – $\beta_1(k)$ для изгибных ($m=1$); пунктирными – $\beta_2(k)$ для изгибно-деформационных ($m=2$)

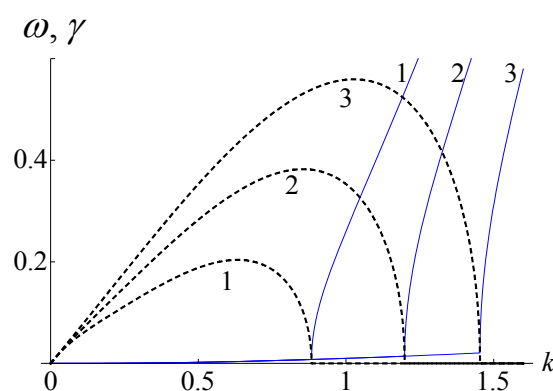


Рис. 1д. Те же зависимости, что на рис. 1а, но рассчитанные при $We=1$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях полевого параметра W :
1) $w=0$, 2) $w=0.0025$, 3) $w=0.005$

При $\rho \neq 0$ и $U \neq 0$ и $w = 0$ отсутствует стабилизирующее действие поля и включается дестабилизирующее влияние движения струи относительно среды (дестабилизирующее влияние тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи). Из рис. 1b, на котором приведены соответствующие иллюстрации, следует, что это дестабилизирующее влияние проявляется в расширении диапазона неустойчивых волн, изменении типа неустойчивости, которая становится периодической и увеличении инкрементов. Видно, что теперь у каждой неустойчивой волны имеется частота, определенная, согласно (4)–(5), коэффициентом $\beta_m(k)$ (т. е. $\omega(k) \equiv -\beta_m(k)$, см. рис. 1c), и инкремент, определенный радикалом в (5): $\gamma \equiv \left| \sqrt{\beta_m^2(k) - \delta_m(k)} \right|$. За пределами области неустойчивости существуют обычные капиллярные волны.

Полная ветвь капиллярных волн состоит из двух частей: периодически неустойчивых (их можно назвать периодически неустойчивыми капиллярными волнами Кельвина – Гельмгольца) и устойчивых. В точке перехода от неустойчивых волн к устойчивым волнам кривая $\omega(k)$ претерпевает разрыв первого рода, как это видно из рис. 1b. На рис. 1c приведены зависимости $\beta_m(k)$ частот неустойчивых волн для первых трех значений азимутального числа ($m = 0; 1; 2$), порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, от волновых чисел при различных значениях параметра We .

Феноменологическую картину распада струи под действием периодической неустойчивости определит волна с максимальной величиной инкремента неустойчивости.

На рис. 1d приведены зависимости от волновых чисел частот ω и инкрементов неустойчивости γ осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи при наличии как внешнего электростатического поля, так и движения струи относительно внешней среды. Из сравнения рис. 1a–d можно прийти к выводу, что при одновременном действии двух силовых факторов (стабилизирующего влияния электрического поля и дестабилизирующего влияния тангенциального скачка поля скоростей) основное влияние оказывает дестабилизирующий фактор. Так, например, кривые 3 на рис. 1b и 1d полностью совпадают, хотя на рис. 1d при

том же значении параметра We действует еще и поле, характеризуемое значением полевого параметра $w=0.005$. Поле с указанным значением полевого параметра на рис. 1a привело к значительному сужению диапазона неустойчивых волновых чисел и существенному снижению величины инкремента неустойчивости. Для кривых 2 на рис. 1b и 1d ширины диапазонов неустойчивых волн совпадают, а величина инкремента на рис. 1d лишь несколько уменьшилась по сравнению с рис. 1b.

Из рис. 1b–d несложно видеть, что частоты периодически неустойчивых капиллярных волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, имеющие согласно рис. 1c безразмерные величины ~ 0.01 , много меньше частот обычных капиллярных волн, имеющих, согласно рис. 1b и 1d, безразмерные величины ~ 1 . В области неустойчивости частоты периодически неустойчивых капиллярных волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, много меньше величин своих инкрементов. Последнее обстоятельство позволяет принять, что периодический характер неустойчивости волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, формален. В самом деле, за время, равное полупериоду волны, характерная для осесимметричной моды ($m=0$) перетяжечная (она же сосисочная) неустойчивость, реализующаяся с инкрементом на порядок превышающим частоту, завершится распадом струи. Из рис. 1b–d видно, что величины частот волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, по крайней мере, на порядок меньше величин их инкрементов неустойчивости, т. е. $\gamma/\beta_0 \sim 10$. В рамках линейной теории начальная амплитуда неустойчивой волны ζ_0 за время, равное полупериоду волны $0.5T = \pi/\beta_0$, увеличит свою амплитуду в $\exp(0.5\gamma T) = \exp(\pi\gamma/\beta_0) \sim \exp(10\pi) \sim 10^{13}$. Даже если принять, что ζ_0 имеет тепловую природу и, следовательно [63], $\zeta_0 \sim 0.1 \text{ nm}$, то и этом случае разрыв струи произойдет еще до окончания полупериода волны. Учет реальной нелинейности феномена распада струи даст такую же оценку, как это было для капли и заряженной плоской поверхности жидкости [182–183].

Приравнивая в (5) подкоренное выражение к нулю, получим аналитическую связь между физическими параметрами на рубеже перехода от устойчивых волн к неустойчивым: $\beta_m^2 - \delta_m = 0$, или

$$k^2 \text{We} \left[\frac{1}{h_m(k) - \rho g_m(k)} \right] - \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)} \right) = 0. \quad (6)$$

Из (6) легко найти аналитическое выражение критического для начала реализации неустойчивости значения параметра $\text{We} = \text{We}_*(k, w, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$:

$$\text{We}_*(k, w, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) = \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)} \right) \frac{[h_m(k) - \rho g_m(k)]}{k^2}. \quad (7)$$

При $\text{We} > \text{We}_*$ у частот волн, определяемых (5), появляется мнимая часть (поскольку выражение под радикалом становится отрицательным), и волна с частотой $\text{Re } s \equiv \beta_m$ начинает экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду с инкрементом, определенным радикалом в соотношении (5). Следует отметить, что безразмерный параметр We , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид $\text{We} \equiv (\rho_1 R U^2 / \sigma)$.

В различных приложениях феномена дробления струи максимально возможное значение параметра We будет ограничено. Так, согласно экспериментальным данным по спонтанному электродиспергированию жидкости, когда струя жидкости вытягивается из жидкого мениска внешним электростатическим полем, скорость струи не превышает 10^3 cm/s (см., например, [56]) и в газообразной среде величина параметра We ограничена сверху значением $\text{We} \sim 1$. В других приложениях, когда струя выдавливается из капилляра или трубки под действием перепада давлений, её скорость (а следовательно, и величина параметра We) может быть существенно больше: так, в [184, с. 26], приведена фотография незаряженной струи, распадающейся на мелкие ка-

пельки вследствие реализации на её поверхности неустойчивости на тангенциальном скачке поля скоростей с $We \sim 100$.

На рис. 2а–с приведём зависимости $We_* = We_*(k, w)$ для различных азимутальных чисел m , пересеченные плоскостями $We(k, w) = const$. Неустойчивость капиллярных волн на поверхности струи будет реализоваться при значениях k и w , лежащих на плоскости $We(k, w) = const$ в областях, ограниченных линией пересечения с поверхностью $We_* = We_*(k, w)$, для которых $We_* < const$.

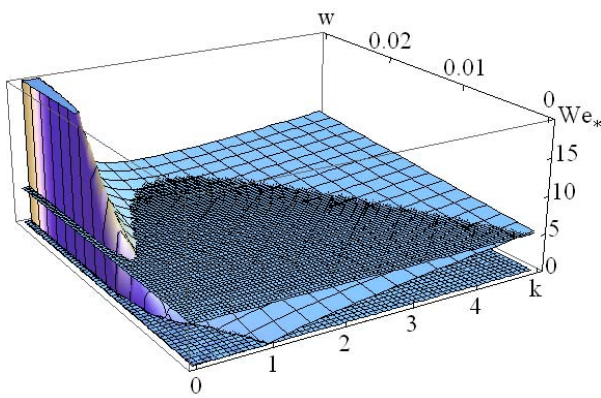


Рис. 2а. Зависимости $We_* = We_*(k, w)$ для различных азимутальных чисел m , пересеченные плоскостями $We(k, w) = const$, рассчитанные при $\rho = 0.001$, $\varepsilon_{in} = 80$, $\varepsilon_{ex} = 1$. а) $m = 0$ (пересечено двумя плоскостями: $We = 0$ и $We = 5$)

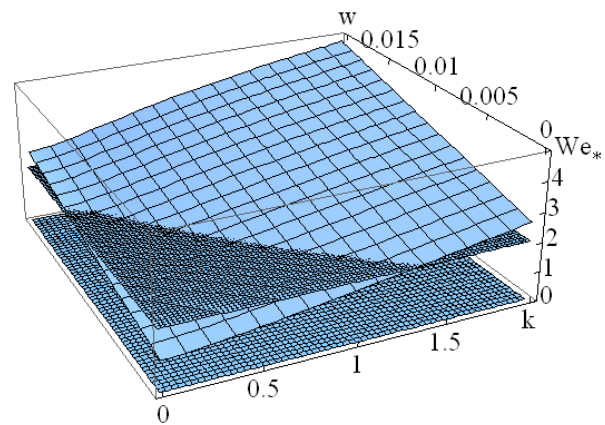


Рис. 2б. То же, что на рис. 2а, но для $m = 1$, (пересечено плоскостью $We = 2$)

Согласно рис. 2а область неустойчивости осесимметричных волн при $We = 0$ лежит на плоскости $We(k, w) = 0$ в окрестности начала координат множества точек $\{k, w\}$ и ограничена справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. При $w = 0$ область неустойчивости сводится к отрезку $0 < k \leq 1$ в согласии с классическими представлениями об устойчивости струи в отсутствие внешних силовых воздействий [180]. С ростом w геометрическое место точек значений k , соответствующих неустойчивым состояниям,

сокращается, вследствие стабилизирующего влияния продольного электростатического поля. С ростом параметра We размеры области неустойчивости расширяются.

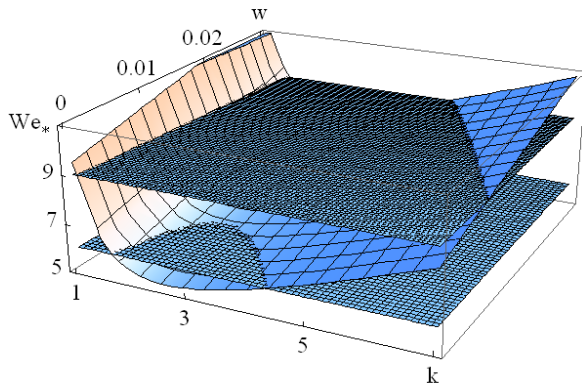


Рис. 2с. То же, что на рис. 2а, но для $m = 2$ (пересечено двумя плоскостями: $We = 6$ и $We = 9$)

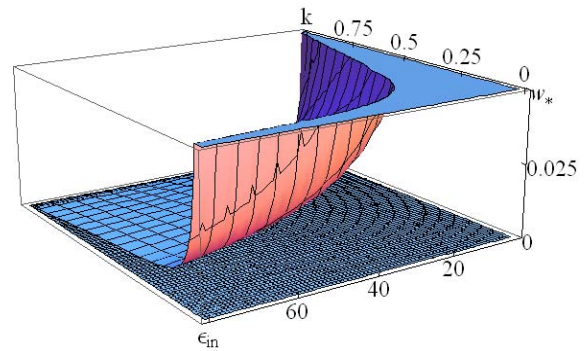


Рис. 3а. Зависимость $w_* = w_*(k, \epsilon_{in})$ для осесимметричных волн, пересеченная плоскостью $w_* = 0$ (рассчитано при $\rho = 0.001$, $We = 0$, $\epsilon_{ex} = 1$)

На рис. 2b приведены зависимости, аналогичные рис. 2а, но построенные для изгибной моды $m = 1$. Как известно [180], в отсутствие внешних силовых полей и электрического заряда на струе неосесимметричные моды с $m \geq 1$ устойчивы. Внешнее продольное электростатическое поле повышает устойчивость неосесимметричных волн на поверхности струи, а её движение относительно материальной внешней среды понижает. В отсутствие внешнего поля изгибная мода незаряженной струи теряет устойчивость при конечном значении параметра We , а именно при $We=1$ теряют устойчивость весьма длинные волны с $k \sim 0$. На рис. 2b поверхность $We_* = We_*(k, w)$ для изгибной моды $m = 1$ пересекается плоскостью $We=2$, а область неустойчивости представляет собой часть плоскости $We=2$ в левом переднем углу, ограниченную справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. Видно, что с ростом полевого параметра геометрическое место точек значений волновых чисел k , соответствующих неустойчивым состояниям, сокращается.

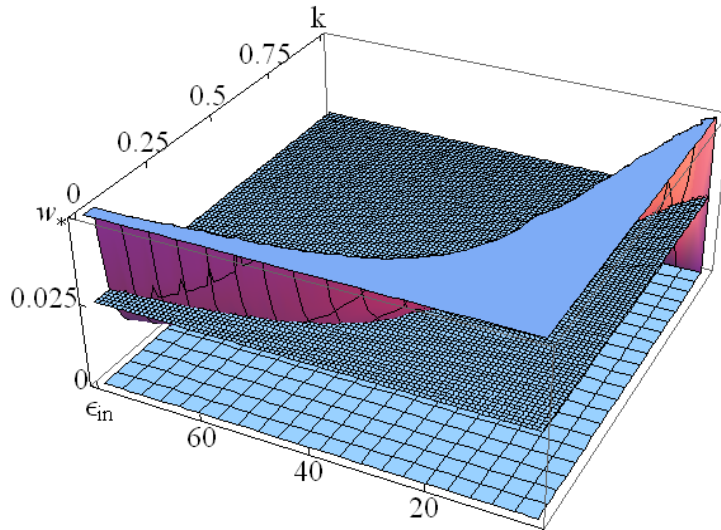


Рис. 3b. То же, что на рис. 3a.
Пересечено двумя плоскостями: $w_* = 0$ и $w_* = 0.025$

На рис. 2с приведены зависимости, аналогичные изображенным на рис. 2а, но построенные для изгибно-деформационной моды $m = 2$: поверхность $We_* = We_*(k, w)$ для $m = 2$ пересекается плоскостями $We = 6$ и $We = 9$. Расчеты показывают, что в отсутствие внешнего электростатического поля, коллинеарной струе, неустойчивости моды с $m = 2$ проявляется лишь при достаточно большом значении скорости движения струи: при $We \approx 5.2$. При $We > 5.2$ неустойчивым состояниям соответствуют части плоскостей $We = const$, ограниченные слева и справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. Из рис. 2с видно, что ростом полевого параметра w область неустойчивости сужается, а увеличение параметра We приводит к её расширению. Интересно отметить, что в недавних экспериментах [185], посвященных экспериментальному исследованию распада капель в неоднородном электростатическом поле, зафиксирован выброс неустойчивой каплей струи жидкости, на которой реализуется неустойчивость моды с $m = 2$ (см. фотографию на рис. 13 в [185]). Это, в частности, означает, что в экспериментах по электродиспергированию могут достигаться достаточно большие значения скоростей движения струй (значения параметра We больше 5.2, если считать, что струя не заряжена). Наличие же на струе достаточно большого электрического заряда, приходящегося на единицу струи, мо-

жет привести к реализации неустойчивости моды с $m = 2$ даже при $We = 0$ (в вакууме) [186].

Из (7) несложно видеть, что с увеличением напряженности внешнего электростатического поля E_0 (параметра w), критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения U (параметра We) снижается, и при $w = w_*$, где

$$w_* = (1 - k^2 - m^2) \frac{[\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)]}{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}, \quad (8)$$

обращается в нуль. В этой ситуации мы приходим к задаче об устойчивости струи в продольном электростатическом поле в вакууме, разобранный в [187].

Поскольку продольное электростатическое поле играет стабилизирующую роль, то неустойчивость волны с азимутальным числом m реализуется при $w < w_*$.

На рис. 3а приведена поверхность $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$ для осесимметричных ($m = 0$) волн, пересеченная плоскостью $w_* = 0$ по линии $k = 1$. При $w_* = 0$ внешнее электростатическое поле отсутствует, область неустойчивости, расположенная на плоскости $w_* = 0$ под поверхностью $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$, не зависит от ε_{in} и определяется условием $0 < k \leq 1$. На рис. 3б поверхность $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$ пересечена плоскостью $w_* = 0.025$. Неустойчивым состоянием соответствует часть плоскости $w_* = 0.025$, лежащая под поверхностью $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$, справа от неё. Этот рисунок подтверждает стабилизирующую роль коллинеарного струе внешнего электростатического поля: с ростом полевого параметра область неустойчивости сокращается и появляется зависимость от ε_{in} . При $w_* = const$ с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} диапазон величин волновых чисел, соответствующих неустойчивым состояниям, сокращается.

Неосесимметричные волны при $We = 0$ не возбуждаются, как это было ранее отмечено в [187].

5. Об устойчивости объёмно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном ее оси электрическом поле

Введение. Представляет интерес исследование влияния на капиллярную устойчивость струи однородного внешнего электростатического поля, коллинеарного оси симметрии невозмущенной цилиндрической струи, которое приводит к стабилизации капиллярной неустойчивости струи (к сужению диапазона длин волн, способных претерпевать капиллярную неустойчивость и к уменьшению инкрементов этой неустойчивости). Известно, что в отсутствие внешнего электрического поля и заряда на цилиндрической струе радиуса R капиллярную неустойчивость способны претерпевать волны с волновыми числами k , лежащими в диапазоне $0 < R \cdot k \leq 1$. Наличие на струе электрического заряда приводит к смещению этого диапазона от точки $k = 0$ в сторону больших значений k . Продольное внешнее электростатическое поле сужает диапазон $0 < R \cdot k \leq 1$ со стороны больших значений k к точке $k = 0$. Естественно задаться вопросом: нельзя ли подобрать такие значения напряженности поля и заряда, приходящегося на единицу длины струи, при которых разбиение струи на капли вообще не будет иметь место. Поясним вышесказанное в терминах «длины нераспавшейся части струи», вытекающей с конечной скоростью из круглого отверстия: с ростом величины заряда, приходящегося на единицу длины струи, длина нераспавшейся части струи уменьшается, а с увеличением напряженности внешнего электростатического поля, коллинеарного оси струи, увеличивается. Сама же проблема сводится к исследованию возможности получения струи с бесконечно большой длиной не распавшейся части струи.

В многочисленных устройствах и экспериментальных установках по электродиспергированию жидкость в разрядную систему подается по капилляру. Между ним и противоэлектродом

поддерживается некоторая разность потенциалов. В итоге в реальной ситуации на струе, вытекающей из капилляра, имеется электрический заряд, а сама она находится в электрическом поле между капилляром и противоэлектродом, коллинеарная оси струи компонента которого отлична от нуля. Таким образом, формулировка задачи об устойчивости заряженной струи в продольном электрическом поле является весьма актуальной.

1. Постановка задачи и её математическая формулировка. Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую струю несжимаемой невязкой диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_{in} , помещённую в электростатическое поле напряжённости \mathbf{E}_0 , коллинеарное её оси. В рамках идеализированной модели «вмороженного» заряда примем, что струя равномерно по объёму заряжена с плотностью электрического заряда μ . Примем также, что окружающее струю пространство характеризуется диэлектрической проницаемостью ε_{ex} и пренебрежимо малой массовой плотностью.

На единицу объёма заряженной жидкости со стороны электрического поля в направлении оси струи действует сила $\mathbf{F}_E = \mu \mathbf{E}_{in,\tau}^{(0)}$ (где $\mathbf{E}_{in,\tau}^{(0)}$ – продольная компонента вектора напряжённости поля внутри струи в невозмущенном состоянии). Эта сила заставляет жидкость двигаться с ускорением $\mathbf{a} = \mu \mathbf{E}_{in,\tau}^{(0)} / \rho$, где ρ – массовая плотность жидкости. Введём связанную с ускоренно движущейся жидкостью цилиндрическую систему координат $\{r, \varphi, z\}$, ось OZ которой совместим с осью струи и направим вдоль вектора $\mathbf{E}_{in,\tau}^{(0)}$. Поле скоростей на оси струи в такой системе координат в равновесном состоянии равно нулю, однако сама система является неинерциальной. В уравнение движения жидкости необходимо добавить объёмную силу инерции:

$$\mathbf{F}_{inertia} = -\rho \mathbf{a} = -\mu \mathbf{E}_{in,\tau}^{(0)} (r = 0).$$

В безразмерных переменных, в которых радиус струи R , плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяже-

ния σ выбраны в качестве основных масштабов ($R = \rho = \sigma = 1$), уравнение свободной поверхности струи, подверженной произвольным осцилляциям малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r = 1 + \varepsilon \cdot \xi(\varphi, z, t),$$

где ε – безразмерная амплитуда колебаний ($|\varepsilon| \ll 1$), а функция $\xi(\varphi, z, t)$ описывает отклонение формы поверхности от цилиндрической ($|\xi(\varphi, z, t)| \sim 1$).

Будем исследовать устойчивость осцилляций свободной поверхности струи в описанной системе. Математическая формулировка соответствующей задачи имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 ; \quad \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_{in} - \mu \mathbf{E}_{in, \tau}^{(0)} (r = 0); \quad \nabla P_{ex} = 0$$

$$\mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j; \quad \Delta \Phi_{ex} = 0; \quad \Delta \Phi_{in} = -4\pi\mu/\varepsilon_{in}; \quad j = \{in; ex\}$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u} \rightarrow 0 ; \quad \nabla \Phi_{in} \rightarrow -E_{in}^{(0)} \mathbf{e}_z$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_{ex} \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z$$

$$r = 1 + \varepsilon \xi(\varphi, z, t):$$

$$\partial_t H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla H(\mathbf{r}, t) = 0, \quad H(\mathbf{r}, t) \equiv r - (1 + \varepsilon \xi(\varphi, z, t))$$

$$P_{in} - P_{ex} + P_E = P_\sigma$$

$$\Phi_{in} = \Phi_{ex}; \quad \varepsilon_{in} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in} = \varepsilon_{ex} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex}$$

$$\iiint_V r dr d\varphi dz = \pi \lambda ; \quad V = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 + \varepsilon \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda \end{array} \right\}. \quad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1) использованы обозначения: Φ_{in} и Φ_{ex} – потенциалы электрического поля внутри и вне струи; $\mathbf{E}_{in}^{(0)}$ – напряжённость электрического поля на оси струи в равновесном состоянии; $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – орты касательной и нормали к поверхности; $P_{in} = P_{in,real} - \Pi_{in}$ – эффективное давление внутри струи; $P_{in,real}$ – реальное распределение внутреннего гидродинамического давления; $\Pi_{in} = -\mu\Phi_{in}$ – потенциал сторонней электрической силы; P_{ex} , P_E , P_σ – давления на свободную поверхность, соответственно: внешнее (по отношению к струе), электрического поля и капиллярных сил:

$$P_E = -\mu\Phi_{in} + \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_{in} \left((\nabla\Phi_{in})^2 - 2(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi_{in})^2 \right) - \varepsilon_{ex} \left((\nabla\Phi_{ex})^2 - 2(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi_{ex})^2 \right) \right],$$

$$P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}.$$

Последнее в (1.1) дополнительное интегральное условие означает сохранение при колебаниях поверхности объёма произвольного участка струи с длиной, равной длине волны λ .

Для удобства отыскания решения электрической части задачи представим напряжённость электрического поля \mathbf{E}_j , где $j = \{in; ex\}$, в виде суперпозиции двух полей $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^{(f)} + \mathbf{E}_j^{(ch)}$, где первая компонента (полевая – *field*) определяется как напряжённость электрического поля для незаряженной струи, находящейся в продольном однородном поле \mathbf{E}_0 , а вторая компонента (зарядовая – *charge*) определяется как напряжённость электрического поля объёмно заряженной струи. В итоге для нахождения каждой из компонент $\mathbf{E}_j^{(i)} = -\nabla\Phi_j^{(i)}$ получим отдельную краевую задачу:

$$\Delta\Phi_j^{(f)} = 0, \quad j = \{in; ex\},$$

$$\Delta\Phi_{ex}^{(ch)} = 0; \quad \Delta\Phi_{in}^{(ch)} = -4\pi\mu/\varepsilon_{in},$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla\Phi_{in}^{(f)} \rightarrow -E_{in}^{(0)}\mathbf{e}_z; \quad \nabla\Phi_{in}^{(ch)} \rightarrow 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi_{ex}^{(f)} \rightarrow -E_0\mathbf{e}_z; \quad \nabla\Phi_{ex}^{(ch)} \rightarrow 0,$$

$$r = 1 + \varepsilon \xi(\varphi, z, t): \quad \Phi_{in}^{(i)} = \Phi_{ex}^{(i)},$$

$$\varepsilon_{in} \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{in}^{(i)} = \varepsilon_{ex} \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_{in}^{(i)}; \quad i = \{f; ch\}. \quad (1.2)$$

Будем решать сформулированную задачу в рамках модели потенциального течения методом асимптотического разложения по малой амплитуде ε , ограничиваясь первым порядком малости. Представляя искомые величины в виде разложений по степеням ε :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \nabla\psi(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \quad P_i = P_i^{(0)} + \varepsilon p_i + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi_j^{(f)}(\mathbf{r}, t) = \Phi_j^{(f,0)}(z) + \varepsilon \phi_j^{(f)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi_j^{(ch)}(\mathbf{r}, t) = \Phi_j^{(ch,0)}(r) + \varepsilon \phi_j^{(ch)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

где ψ – гидродинамический потенциал; $j = \{in; ex\}$; $i = \{in; E; \sigma\}$, из гидродинамических уравнений системы (1.1) и электростатической системы (1.2) получим краевые задачи нулевого и первого порядков.

2. Равновесное состояние. Задача нулевого порядка описывает равновесное, невозмущённое состояние системы:

$$\Delta\Psi^{(0)} = 0; \quad \nabla P_{ex} = 0;$$

$$P_{in}^{(0)} = -\partial_t\Psi^{(0)} - \frac{1}{2}\left(\nabla\Psi^{(0)}\right)^2 + \mu\left(\partial_z\Phi_{in}^{(0)}\right)\Big|_{r=0} z;$$

$$\partial_{z,z}\Phi_j^{(f,0)} = 0, \quad j = \{in; ex\};$$

$$\frac{1}{r} \partial_r \left(r \partial_r \Phi_{ex}^{(ch,0)} \right) = 0; \quad \frac{1}{r} \partial_r \left(r \partial_r \Phi_{in}^{(ch,0)} \right) = -4\pi\mu/\varepsilon_{in};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \Psi^{(0)} \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi_{in}^{(f,0)} \rightarrow -E_{in}^{(0)} \mathbf{e}_z; \quad \nabla \Phi_{in}^{(ch,0)} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_{ex}^{(f,0)} \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z; \quad \nabla \Phi_{ex}^{(ch,0)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \Phi_{in}^{(i,0)} = \Phi_{ex}^{(i,0)}, \quad i = \{f; ch\}; \quad \varepsilon_{in} \partial_r \Phi_{in}^{(ch,0)} = \varepsilon_{ex} \partial_r \Phi_{ex}^{(ch,0)};$$

$$P_{in}^{(0)} - P_{ex} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)};$$

$$P_E^{(0)} = -\mu \Phi_{in}^{(0)} + \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) \left[\left(\partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \left(\partial_r \Phi_{ex}^{(0)} \right)^2 \right]; \quad P_\sigma^{(0)} = 1;$$

$$\Phi_j^{(0)} = \Phi_j^{(f,0)} + \Phi_j^{(ch,0)}, \quad j = \{in; ex\}$$

и позволяет определить потенциалы – гидродинамический и электростатический, а также давление жидкости в струе:

$$\Psi^{(0)} = 0;$$

$$\Phi_{ex}^{(0)} = -E_0 z - (2\pi\mu/\varepsilon_{ex}) \ln r; \quad \Phi_{in}^{(0)} = -E_0 z + (\pi\mu/\varepsilon_{in}) (1 - r^2);$$

$$P_{in}^{(0)} = P_{ex} + 1 - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[E_0^2 + \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \left(\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{ex}} \right)^2 \right] - \mu E_0 z. \quad (2.1)$$

Отметим, что решение уравнения Эйлера в выписанной системе уравнений позволяет определить величину эффективного давления $P_{in}^{(0)}$. Чтобы получить реальное распределение давления в струе с учётом действующих в объёме жидкости электрических сил, необходимо учесть потенциал сторонней электрической силы:

$$P_{in,real}^{(0)} = P_{in}^{(0)} - \mu \Phi_{in}^{(0)} =$$

$$= P_{ex} + 1 - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[E_0^2 + \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \left(\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{ex}} \right)^2 \right] - \frac{\pi \mu^2}{\varepsilon_{in}} (1 - r^2).$$

3. Задача первого порядка малости записывается в виде

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0 ; \quad p_{in} = -\partial_t \psi + const ; \quad (3.1)$$

$$\Delta \phi_j^{(i)}(\mathbf{r}, t) = 0 ; \quad j = \{in; ex\}, \quad i = \{f; ch\}; \quad (3.2)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \psi| \rightarrow 0 ; \quad \left| \nabla \phi_{in}^{(i)} \right| \rightarrow 0 ; \quad r \rightarrow \infty: \quad \left| \nabla \phi_{ex}^{(i)} \right| \rightarrow 0; \quad (3.3)$$

$$r = 1: \quad -\partial_t \xi + \partial_r \psi = 0; \quad (3.4)$$

$$p_{in} + p_E = p_\sigma; \quad (3.5)$$

$$\phi_{in}^{(i)} + \partial_r \Phi_{in}^{(i,0)} \xi = \phi_{ex}^{(i)} + \partial_r \Phi_{ex}^{(i,0)} \xi; \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{in} \left(\partial_r \phi_{in}^{(f)} - \partial_z \Phi_{in}^{(f,0)} \partial_z \xi \right) = \varepsilon_{ex} \left(\partial_r \phi_{ex}^{(f)} - \partial_z \Phi_{ex}^{(f,0)} \partial_z \xi \right); \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{in} \left(\partial_r \phi_{in}^{(ch)} + \partial_{r,r} \Phi_{in}^{(ch,0)} \xi \right) = \varepsilon_{ex} \left(\partial_r \phi_{ex}^{(ch)} + \partial_{r,r} \Phi_{ex}^{(ch,0)} \xi \right); \quad (3.8)$$

$$\int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^{2\pi} \xi(z, \varphi, t) d\varphi dz = 0; \quad (3.9)$$

$$p_\sigma = -\xi - \partial_{\varphi, \varphi} \xi - \partial_{z, z} \xi; \quad (3.10)$$

$$p_E = -\mu \left(\phi_{in} - \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{in}} \xi \right) - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{4\pi} \left[\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{in}} \left(\partial_r \phi_{ex} + \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{ex}} \xi \right) + \right. \\ \left. + E_0 \left(\partial_z \phi_{ex} - \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{ex}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \right) \partial_z \xi \right) \right]; \quad (3.11)$$

$$\phi_j = \phi_j^{(f)} + \phi_j^{(ch)}, \quad j = \{in; ex\}.$$

Очевидно, что общее решение может быть построено в виде суперпозиции бегущих по поверхности струи волн, характеризующихся длинами $\lambda = 2\pi/k$ (k – волновое число) и осевой симметрией, определяющейся азимутальным числом m :

$$\xi(\varphi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(k) \exp(i(kz - \omega_m(k)t + m\varphi)) dk,$$

здесь $\alpha_m(k)$ – парциальные амплитуды отдельных волн, определяемые начальными условиями; $\omega_m(k)$ – частоты соответствующих волн.

Для анализа устойчивости поверхности струи достаточно вывести дисперсионное уравнение задачи, ограничиваясь рассмотрением частного решения в виде одиночной волны. Поэтому примем, что функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической поверхности струи, имеет вид

$$\xi(\varphi, z, t) = \alpha \exp(i(kz - \omega_m t + m\varphi)). \quad (3.12)$$

Отметим, что условие (3.9) для такой волны выполняется тождественно.

Решения для потенциалов будем искать в виде, аналогичном (3.12):

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &= \beta B(r) \exp(i(kz - \omega_m t + m\varphi)); \\ \phi_j^{(f)}(\vec{r}, t) &= \gamma_j D_j^{(f)}(r) \exp(i(kz - \omega_m t + m\varphi)), \quad j = \{in; ex\}; \\ \phi_j^{(ch)}(\vec{r}, t) &= \eta_j C_j^{(ch)}(r) \exp(i(kz - \omega_m t + m\varphi)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

здесь β , γ_j и η_j – константы, а $B(r)$, $D_j^{(f)}(r)$, $C_j^{(ch)}(r)$ – неизвестные функции радиальной координаты r , которые определя-

ются из уравнений (3.1), (3.2) с учётом условий ограниченности (3.3):

$$B(r) = D_{in}^{(f)}(r) = C_{in}^{(ch)}(r) = I_m(kr); \quad D_{ex}^{(f)}(r) = C_{ex}^{(ch)}(r) = K_m(kr),$$

где $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя. Система граничных условий (3.4), (3.6)–(3.8) позволяет выразить константы β , γ_j , η_j через амплитуду волны α и суммируя «зарядовые» и «полевые» компоненты электростатических потенциалов, записать решения в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i\omega_m}{g_m(k)} \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \xi(\varphi, z, t); \\ \phi_{in}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(\varepsilon_{in}g_m(k) - \varepsilon_{ex}h_m(k))} \left[-iE_0 k(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{in}} ((\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})h_m(k) + 2\varepsilon_{in}) \right] \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \xi(\varphi, z, t); \\ \phi_{ex}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(\varepsilon_{in}g_m(k) - \varepsilon_{ex}h_m(k))} \left[-iE_0 k(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_{ex}} ((\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})g_m(k) + 2\varepsilon_{ex}) \right] \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \xi(\varphi, z, t); \\ g_m(k) &\equiv \frac{k I_m'(k)}{I_m(k)} = m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}; \\ h_m(k) &\equiv \frac{k K_m'(k)}{K_m(k)} = m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}, \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по аргументу.

Используя полученные решения и выражения (3.1), (3.10), (3.11), несложно рассчитать давления p_{in} , p_E , p_σ и из динамического граничного условия (3.5) получить дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega_m^2 = g_m(k) \left[k^2 + m^2 - 1 + w F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) + W F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \right]; \quad (3.14)$$

$$F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \equiv \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k))};$$

$$F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \equiv \frac{1}{(\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)) \varepsilon_{in} \varepsilon_{ex}} \left[(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 g_m(k) h_m(k) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{in} (\varepsilon_{in} - 3\varepsilon_{ex}) g_m(k) - \varepsilon_{ex} (\varepsilon_{ex} - 3\varepsilon_{in}) h_m(k) + 4 \varepsilon_{in} \varepsilon_{ex} \right],$$

где параметры $w \equiv E_0^2 / 4\pi$ и $W \equiv \pi \mu^2$ характеризуют давление внешнего продольного электростатического поля и электростатического поля объёмного заряда, соответственно.

4. Анализ полученных результатов. На рис. 1а–с представлены рассчитанные по (3.14) графики зависимости квадрата частоты волны от волнового числа для трёх значений азимутального числа $m = 0, 1, 2$. Согласно общей теории колебаний, при заданных физических параметрах струи и внешней среды неустойчивыми окажутся те волны на свободной поверхности, для которых квадрат частоты отрицателен: $\omega_m^2 < 0$. Амплитуда таких волн будет экспоненциально нарастать со временем, приводя к распаду струи на капли. Из выражения (3.14) следует, что незаряженная струя в отсутствие электрического поля ($W = 0$, $w = 0$) всегда неустойчива по отношению к длинным осесимметричным волнам ($m = 0$) с волновыми числами $k < 1$ (поскольку коэффициент $g_m(k)$ положителен для любых значений m и k). В то же время осенесимметричные волны ($m \geq 1$) устойчивы.

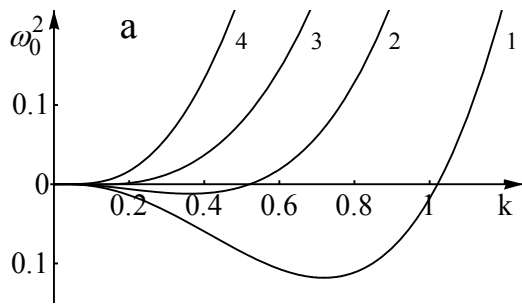


Рис. 1а. Зависимости квадрата безразмерной частоты осесимметричной ($m = 0$) волны от безразмерного волнового числа, рассчитанные при $\varepsilon_{in} = 20$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $W = 0.1$: тонкая линия соответствует $w = 0$; короткопунктирная линия — $w = 0.025$; длиннопунктирная линия — $w = 0.05$; толстая линия — $w = 0.1$

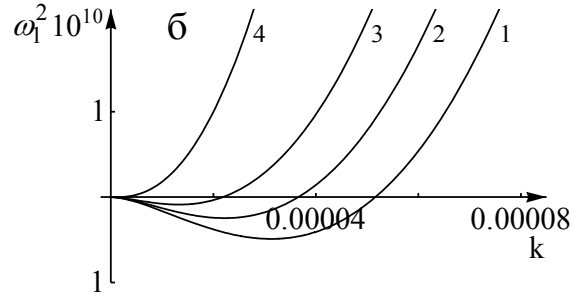


Рис. 1б. Зависимости квадрата безразмерной частоты изгибной ($m = 1$) волны от безразмерного волнового числа, рассчитанные при $\varepsilon_{in} = 20$, $\varepsilon_{ex} = 1$, $W = 0.1$: тонкая линия соответствует $w = 0$; короткопунктирная линия — $w = 0.002$; длиннопунктирная линия — $w = 0.005$; толстая линия — $w = 0.02$

Из вида правой части дисперсионного уравнения (3.14) видно, что устойчивость различных волновых возмущений на поверхности заряженной струи в продольном поле зависит как от значений безразмерных параметров W и w (см. рис. 1), так и от величин и знаков коэффициентов $F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ и $F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$. На рис. 2а–б представлены зависимости этих коэффициентов от волнового числа k для разных значений диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} для первых трёх значений азимутального числа m . Из рис. 2а видно, что продольное электростатическое поле оказывает стабилизирующее влияние на поверхность струи во всём диапазоне волновых чисел, поскольку при любых k коэффициент $F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ положителен. Согласно рис. 2б электростатический заряд на струе дестабилизирует осесимметричные волновые возмущения ($m \geq 1$), т. к. коэффициент $F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ отрицателен для $m \geq 1$ при любых k . Влияние заряда на волновые возмущения, обладающие осевой симметрией ($m = 0$), различно в разных диапазонах изменения волновых чисел: при малых k , там где $F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) > 0$, заряд стабилизирует струю, а при больших k , там где $F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) < 0$, заряд дестабилизирует её.

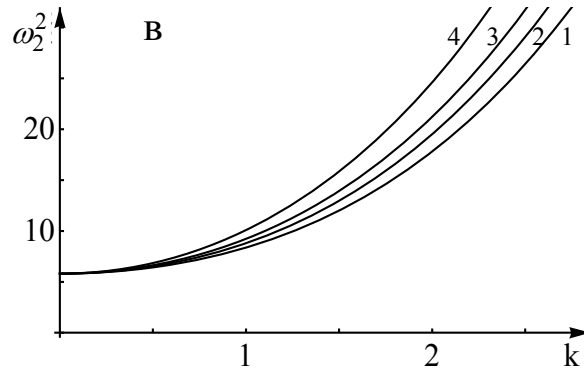


Рис. 1с. Те же зависимости, что на рис. 1а, но для осесимметричной волны с $m = 2$

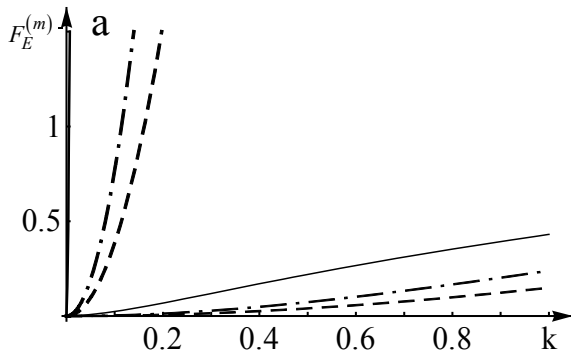


Рис. 2а. Зависимости коэффициента $F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ от безразмерного волнового числа:

тонкие линии — $\varepsilon_{in} = 2$;

толстые линии — $\varepsilon_{in} = 80$;

сплошные линии рассчитаны для $m = 0$;

штрихпунктирные — для $m = 1$;

короткопунктирные — для $m = 2$

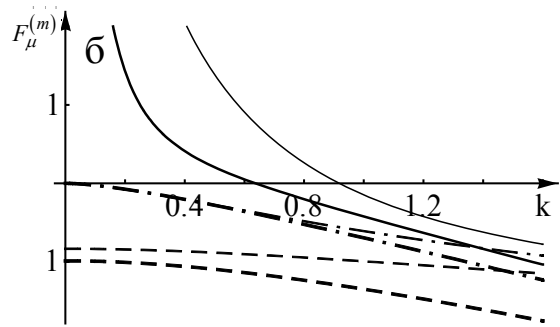


Рис. 2б. Зависимости коэффициента $F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ от безразмерного волнового числа:

тонкие линии — $\varepsilon_{in} = 2$;

толстые линии — $\varepsilon_{in} = 80$;

сплошные линии рассчитаны для $m = 0$;

штрихпунктирные — для $m = 1$;

короткопунктирные — для $m = 2$

В общем случае при $w \neq 0$ и $W \neq 0$ оценить возможность стабилизации струи удобно, представив условие смены устойчивости $\omega_m^2 = 0$ в виде

$$w_{cr} \equiv \frac{1}{F_E^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})} \left[1 - k^2 - m^2 - W F_\mu^{(m)}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \right]. \quad (4.1)$$

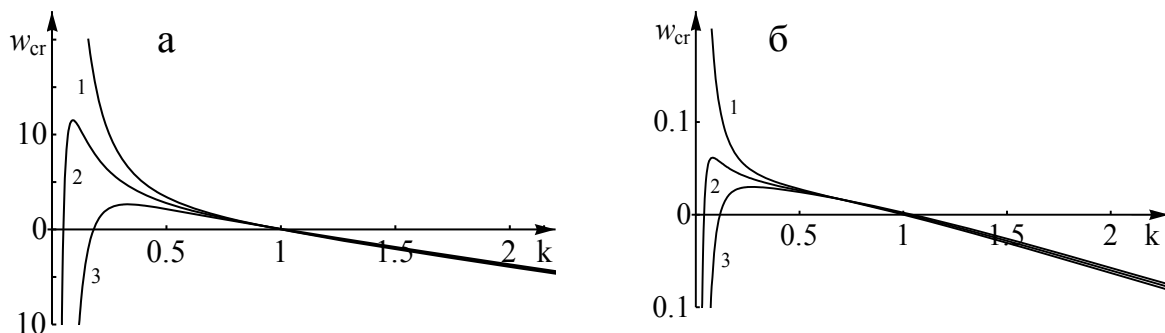


Рис. 3. Зависимости от безразмерного волнового числа критического для смены устойчивости осесимметричной ($m = 0$) волны параметра w_{cr} , при $\varepsilon_{ex} = 1$ и $\varepsilon_{in} = 2$ (а), $\varepsilon_{in} = 20$ (б): $W = 0, 0.1, 0.2$ (линии 1–3)

При $w > w_{cr}$ для фиксированного m продольное электрическое поле будет стабилизировать волны с симметрией, определенной заданным значением азимутального параметра m . Учтем то обстоятельство, что в большинстве приложений феномена электродиспергирования струя окружена воздухом при атмосферном давлении, в котором при достаточно большой суммарной напряженности электрического поля будут развиваться разрядные явления. Тогда условие (4.1) можно трактовать следующим образом: стабилизация волн с заданной симметрией на поверхности струи внешним электростатическим полем возможна, если реально достижимы значения напряженности поля, такие чтобы параметр w превышал w_{cr} .

На рис. 3а–б приведены графики зависимости w_{cr} от волнового числа k , из которых следует, что осесимметричные ($m = 0$) волны на поверхности незаряженной ($W = 0$) струи невозможно стабилизировать внешним полем: при $k \rightarrow 0$ величина w_{cr} асимптотически стремится к бесконечности и, следовательно, при любых значениях напряженности продольного поля в окрестности точки $k = 0$ сохраняется область неустойчивых волн. Если же величина заряда на струе отлична от нуля ($W \neq 0$), то теоретически полная стабилизация осесимметричных волн возможна. Практическая её реализация зависит от того, насколько велика необходимая для стабилизации струи напряженность суммарного электрического поля, существующего у поверхности струи, и не превысит ли она величину, при которой на поверхности струи зажжется коронный разряд. Разрядные явления в однородном элект-

тростатическом поле начинаются при $E = 26 \text{ кВ/см}$, в неоднородном электрическом поле с осевой симметрией на гладкой поверхности цилиндрической струи согласно эмпирической формуле Пика, они начинаются при $E \approx 31 \cdot (1 + 0.308/\sqrt{R}) \text{ кВ/см}$, где R измерено в сантиметрах. Численные оценки показывают, что для струи радиусом 100 мкм при значении коэффициента поверхностного натяжения $\sigma \approx 30 \text{ дин/см}$ пробойное значение напряжённости поля соответствует значениям безразмерных параметров $w_{np} \approx W_{np} \approx 0.27$. Из рис. 3 видно, что предельное (максимальное) значение w_{cr} сильно зависит от диэлектрической проницаемости жидкости, уменьшаясь с её ростом. И, например, при значении $\varepsilon_{in} = 20$ (рис. 3b) стабилизация осесимметричных возмущений во всём диапазоне волновых чисел достижима при допробойных значениях суммарной напряжённости электрического поля.

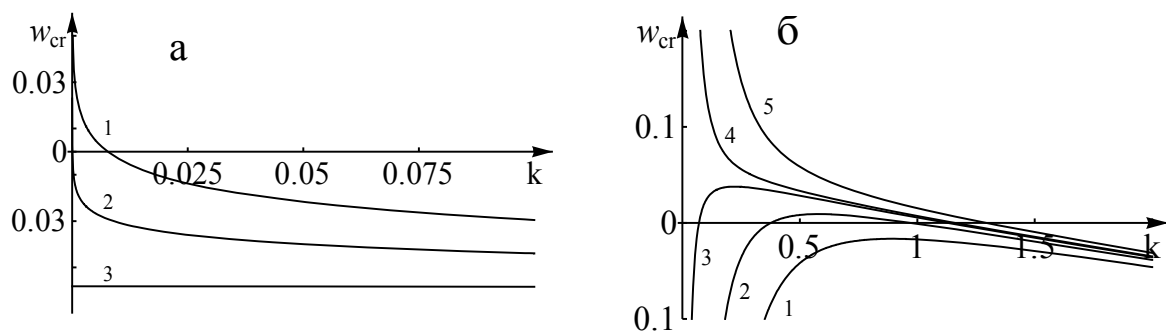


Рис. 4. Зависимости от безразмерного волнового числа критического для смены устойчивости осесимметричной ($m = 1$) (а) и ($m = 2$) (б) волны параметра w_{cr} при $\varepsilon_{in} = 20$; $\varepsilon_{ex} = 1$: $W = 0, 0.1, 0.2$ (линии 1–3) на рис. 4а и $W = 3, 3.1, 3.14, 3.15, 3.2$ (линии 1–5) на рис. 4б

На рис. 4а–б приведены зависимости, аналогичные изображённым на рис. 3, для значений азимутального числа $m = 1, 2$, соответствующих осесимметричным возмущениям поверхности струи. Как было отмечено выше, электрический заряд на струе играет дестабилизирующую роль для волн с такими симметриями. Так из рис. 4а видно, что для заданной диэлектрической проницаемости жидкости существуют диапазоны значений параметров w , W и волновых чисел k , в которых изгибные волны ($m = 1$) претерпевают неустойчивость (на рис. 4а это геометрическое ме-

сто точек ниже изображенных кривых в области, где $w_{cr} > 0$, поскольку пунктирная кривая так же, как и толстая сплошная, переходит в область неограниченно больших положительных значений). В окрестности начала координат имеется область волновых чисел, в пределах которой волны неустойчивы, но эта область очень мала и соответствует очень длинным волнам. Например, при $\varepsilon_{in} = 20$, $W = 0.2$ параметр w_{cr} достигает значения ≈ 0.05 для волнового числа $k \approx 0.0001$, что соответствует волнам с длинами, превышающими радиус струи больше, чем в 60000 раз.

Для волновых возмущений поверхности струи с $m \geq 2$ (рис. 4b) при допробойных значениях напряжённости суммарного электрического поля наличие заряда на струе не приводит к неустойчивости: при малых W критические для начала реализации разрядных явлений линии лежат ниже нуля и, следовательно, соответствующие волновые возмущения поверхности струи устойчивы даже при нулевом продольном поле. Развитие электростатической неустойчивости струи, связанное с возбуждением волны с $m = 2$, имеет место только при больших значениях параметра W . Согласно данным теоретического расчета поверхность цилиндрической заряженной струи идеально проводящей жидкости в отсутствие продольного электростатического поля претерпевает электростатическую неустойчивость при $W \approx 2.9$, при наличии разрядных процессов на поверхности струи, что и подтверждается экспериментальными наблюдениями. Расчеты показывают, что с уменьшением диэлектрической проницаемости жидкости минимальное значение параметра W , при котором может реализоваться электростатическая неустойчивость поверхности струи, увеличивается. Наличие внешнего продольного электростатического поля, оказывающего стабилизирующее влияние на волны на поверхности струи, приводит к еще большему увеличению параметра W , при котором может реализоваться электростатическая неустойчивость поверхности струи.

6. Теоретическое обоснование выделяемых режимов спонтанного распада заряженных струй

Предложенная в [56, 176–177] полуфеноменологическая классификация режимов электродиспергирования жидкости, представляющая собой развитие идей, предложенных в [190], основана на сравнении характерных для феномена времен. Однако большая часть характерных времен, использованных в [56, 176–177], связана с мениском жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему. Приведенные выше в настоящем исследовании теоретические модели осцилляций и распада на отдельные капли заряженных струй позволяют уточнить классификацию [56, 176–177] на основе расширения системы используемых характерных времен и добавления новых режимов диспергирования, описанных в [57].

Но прежде всего уточним физические закономерности осцилляций заряженной капли вязкой жидкости, на основе которых вводятся характерные времена, использованные в [56, 176–177].

6.1. Дисперсионное уравнение, описывающее осцилляции и устойчивость заряженной капли вязкой жидкости

В [178] с использованием метода операторной скаляризации было подробно выведено дисперсионное уравнение, описывающее осцилляции и устойчивость объемно заряженной капли вязкой диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью ε . В безразмерных переменных, в которых радиус капли R , коэффициент поверхностного натяжения γ и плотность жидкости ρ приняты за основные единицы ($R = \gamma = \rho = 1$), это дисперсионное уравнение имеет вид

$$s^2 + 2\nu \cdot s(l-1) \left\{ (2l+1) + (l^2-1) \left[1 - g(\sqrt{s/\nu}) \right]^{-1} \right\} + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0; \quad (1)$$

$$g(\sqrt{s/\nu}) \equiv \frac{\sqrt{s/\nu}}{2} \cdot \frac{i_l(\sqrt{s/\nu})}{i_{l+1}(\sqrt{s/\nu})}; \quad \alpha_l \equiv 1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \cdot \kappa_l; \quad \kappa_l \equiv \frac{(l\varepsilon^2 - (2l-5)\varepsilon + (l+1))}{[l(\varepsilon+1)+1] \cdot \varepsilon}.$$

Предельный переход $\varepsilon \rightarrow \infty$, при котором $\kappa_l \rightarrow 1$, приводит нас к дисперсионному уравнению задачи об устойчивости идеально проводящей капли вязкой жидкости, решенной в [178]. В (1) $i_l(x)$ – модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода.

Напомним, что зависимость интересующих нас функций (в том числе и возмущения равновесной поверхности капли $\xi(\vartheta, \varphi, t)$) от времени будет определяться экспонентой $\sim \exp(st)$, причем вещественная часть комплексной частоты s в зависимости от знака определит инкремент неустойчивости либо декремент затухания амплитуды возмущения $\xi(\vartheta, \varphi, t)$ со временем, а мнимая часть s – частоты собственных колебаний свободной поверхности капли.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1): идеальную жидкость, маловязкую жидкость и сильновязкую жидкость.

Приближение идеальной жидкости. Для того чтобы рассмотреть случай капли идеальной жидкости, необходимо положить равным нулю коэффициент кинематической вязкости ($\nu = 0$). При этом аргумент сферических функций Бесселя $i_l(\sqrt{s/\nu})$ и $i_{l+1}(\sqrt{s/\nu})$, входящих в уравнение (1), обращается в бесконечность. Поэтому, чтобы понять, как ведет себя последнее слагаемое в (1) при $\nu \rightarrow 0$, следует воспользоваться асимптотическим разложением для сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента $x \equiv \sqrt{s/\nu}$:

$$x \rightarrow \infty: \quad i_l(x) \approx \frac{1}{2x} \exp(x) \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]; \quad (2)$$

тогда их отношение ($i_l(x)/i_{l+1}(x)$) при $x \equiv \sqrt{s/\nu} \rightarrow \infty$ будет иметь асимптотику

$$x \rightarrow \infty: \quad \frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)} \approx \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right];$$

Следовательно, дробь в уравнении (1) при $x \equiv \sqrt{s/\nu} \rightarrow \infty$ представим в виде

$$x \rightarrow \infty: \quad \frac{x^2}{1 - \frac{x}{2} \cdot \frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)} + (l+1)} \approx -\frac{x^2}{x/2} \approx 2x; \quad (3)$$

или в терминах переменной s получим

$$\nu \rightarrow 0: \quad \frac{\nu \cdot s}{1 - \frac{\sqrt{s/\nu}}{2} \cdot \frac{i_l(\sqrt{s/\nu})}{i_{l+1}(\sqrt{s/\nu})} + (l+1)} \approx \frac{\nu \cdot s}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{s/\nu}} = 2\nu\sqrt{s\nu} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Таким образом, исходя из соотношения (4), для случая идеальной ($\nu = 0$) дисперсионное уравнение (1) запишется в виде

$$s^2 + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0. \quad (5)$$

Отсюда, учитывая что

$$\alpha_l \equiv 1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \cdot \kappa_l,$$

получим

$$\begin{aligned} s_l &= \pm \sqrt{l(l-1)(l+2)\alpha_l} \equiv \pm \sqrt{l(l-1)(l+2) \left[1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \kappa_l \right]} \equiv \\ &\equiv \pm \sqrt{l(l-1)(l+2) \left[1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \frac{(l\varepsilon^2 - (2l-5)\varepsilon + (l+1))}{[l(\varepsilon+1)+1] \cdot \varepsilon} \right]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражения (6) следует:

1) если $\alpha_l > 0$, т. е. $Q^2\kappa_l/4\pi(l+2) < 1$, то величина s определяет собственные частоты колебания свободной поверхности заряженной капли идеальной жидкости:

$$s_l = \pm \sqrt{l(l-1)(l+2)\alpha_l} \equiv \pm i\omega_l \sqrt{l(l-1)(l+2) \left[1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \kappa_l \right]}; \quad (7)$$

2) если $\alpha_l < 0$, т. е. $Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) > 1$, то величина s определяет инкремент экспоненциального нарастания (если перед радикалом взять знак «плюс») и декремент экспоненциального затухания (если перед радикалом взять знак «минус») решений со временем:

$$s_l = \pm \gamma_l \equiv \pm \sqrt{l(l-1)(l+2) \left[\frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \kappa_l - 1 \right]}. \quad (8)$$

Появление нарастающих со временем решений (т. е. увеличивающегося со временем возмущения поверхности $\xi(\vartheta, \varphi, t)$) означает неустойчивость капли.

3) значение $\alpha_l = 0$ разделяет устойчивые и неустойчивые решения, т. е. определяет критическую величину имеющегося на капле заряда:

$$Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) = 1.$$

Очевидно, что для того, чтобы капля стала неустойчивой, достаточно выполнения условия неустойчивости хотя бы для одной из мод.

Согласно сказанному выше минимальное значение, которое принимает индекс l , равно 2 и, следовательно, критическое значение заряда определится соотношением

$$\frac{Q_{cr}^2}{16\pi} \kappa_2 = 1. \quad (9)$$

Переходя к размерным величинам, с учетом (37), запишем

$$\frac{Q_{cr}^2}{16\pi} \frac{(2\varepsilon^2 + \varepsilon + 3)}{[2\varepsilon + 3] \cdot \varepsilon} = 1. \quad (10)$$

Для случая идеально проводящей жидкости ($\varepsilon \rightarrow \infty$) величина κ_l обращается в единицу, и из (10) получаем значение крити-

ческого заряда, рассчитанное еще Рэлеем: $Q^2/16\pi = 1$; или в размерном виде

$$Q^2/16\pi\sigma R^3 = 1. \quad (11)$$

Асимптотика маловязкой жидкости. Для того чтобы выяснить влияние вязкости жидкости на собственные частоты колебаний заряженной капли и на инкремент нарастания ее неустойчивости, рассмотрим случай маловязких жидкостей, т. е. когда $\nu \ll 1$. Из асимптотического разложения (4) видно, что третье слагаемое в дисперсионном соотношении (1) $\sim \nu^{3/2}$, а второе слагаемое $\sim \nu$, поэтому в случае маловязкой жидкости сохраним в (1) лишь слагаемые до первого порядка малости по ν включительно. Тогда вместо выражения (1) получим следующее дисперсионное соотношение:

$$s^2 + 2(l-1)(2l+1) \cdot \nu \cdot s + l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l = 0. \quad (12)$$

Решения этого уравнения записываются в виде

$$s_l = -(l-1)(2l+1) \cdot \nu \pm \sqrt{(l-1)^2(2l+1)^2 \cdot \nu^2 - l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l}. \quad (13)$$

В полученном соотношении, справедливом при $\nu \ll 1$, первое слагаемое под радикалом при $(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2 \ll l(l+2) \cdot \alpha_l$ много меньше второго, а потому (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} s_l &= -(l-1)(2l+1) \cdot \nu \pm i \sqrt{l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l \left[1 - \frac{(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2}{l(l+2) \cdot \alpha_l} \right]} \approx \\ &\approx -(l-1)(2l+1) \cdot \nu \pm i \sqrt{l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l} \cdot \left[1 - \frac{(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2}{2 \cdot l(l+2) \cdot \alpha_l} \right]. \end{aligned} \quad (13a)$$

Поскольку само уравнение (12) получено из исходного дисперсионного соотношения (1) путем отбрасывания слагаемого $\sim \nu^{3/2}$, то и в выражении (13a) следует отбросить член $\sim \nu^2$. Таким образом, при $(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2 \ll l(l+2) \cdot \alpha_l$ получим

$$s_l = -(l-1)(2l+1) \cdot \nu \pm i \sqrt{l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l}. \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что:

1) если $(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2 \ll l(l+2) \cdot \alpha_l$ и $\alpha_l > 0$, т. е. $Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) < 1$, то величина s является комплексной и характеризует затухающие со временем осцилляции капли. Радикал в выражении (14) определяет собственные частоты колебаний поверхности заряженной капли маловязкой жидкости ω_l , совпадающие с собственными частотами колебаний капли идеальной жидкости (7). Учет наличия вязкости жидкости приводит к появлению пропорционального коэффициенту кинематической вязкости ν затухания собственных колебаний поверхности капли с декрементом β_l :

$$s_l = \beta_l \pm i \cdot \omega_l \equiv -(l-1)(2l+1) \cdot \nu \pm i \sqrt{l(l-1)(l+2) \cdot \alpha_l}. \quad (15)$$

Из (13)–(13а) видно, что при $W \geq W_v \equiv 1 - \frac{(l-1)(2l+1)^2}{2l(l+2)} \cdot \frac{\rho \nu^2}{\gamma R}$ периодические движения l -й моды капли исчезают, а соответствующие виртуальные возмущения её поверхности экспоненциально затухают с безразмерным декрементом $0 < \beta < (l-1)(2l+1) \cdot \nu$, величина которого зависит от ν и W ;

2) если $(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2 \ll l(l+2) \cdot \alpha_l$ и $\alpha_l < 0$, т. е. $\kappa_l Q^2 / 4\pi(l+2) > 1$, то величина s_l определяет инкремент нарастания неустойчивости заряженной капли маловязкой жидкости γ_l , который оказывается несколько меньше, чем в случае идеальной жидкости, а именно на величину декремента β_l :

$$s_l = \gamma_l \equiv \sqrt{l(l-1)(l+2) \left[\frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \kappa_l - 1 \right]} - (l-1)(2l+1) \cdot \nu. \quad (16)$$

Если $\alpha_l \approx 0$, то инкремент неустойчивости следует определить из (13а) в виде

$$\gamma_l = -(l-1)(2l+1) \cdot \nu + \sqrt{(l-1)^2(2l+1)^2 \cdot \nu^2 + l(l-1)(l+2) \cdot |\alpha_l|}; \quad (16a)$$

3) как и в случае идеальной жидкости, равенство $\alpha_l = 0$, согласно (13), разделяет устойчивые и неустойчивые решения, а выражения для критического значения заряда (9)–(11) остаются

справедливыми и для капли маловязкой жидкости. При определении частот, декрементов и инкрементов в ситуации $\alpha_l \approx 0$ следует учесть, что условие $(l-1)(2l+1)^2 \cdot \nu^2 \ll l(l+2) \cdot \alpha_l$ теперь не выполняется, оба слагаемых под радикалом имеют сравнимые величины и выражения для частот, декрементов, инкрементов определяются полным выражением (13).

Асимптотика сильновязкой жидкости. Для того чтобы рассмотреть случай сильновязкой жидкости ν – велико, x – мало, следует воспользоваться разложением для сферических функций Бесселя в степенной ряд:

$$i_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left[1 + \frac{(x^2/2)}{1!(2l+3)} + \frac{(x^2/2)^2}{2!(2l+3)(2l+3)} + \dots \right].$$

Учитывая это разложение, можно с точностью $\sim x^4$ получить следующее представление для отношения сферических функций Бесселя из последнего слагаемого в дисперсионном уравнении (1):

$$\left[\frac{x}{2} \cdot \frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)} - 1 \right]^{-1} \approx \frac{2}{(2l+1)} \left[1 - \frac{x^2}{(2l+1)(2l+5)} + \frac{4(l+2)x^4}{(2l+1)^2(2l+5)^2(2l+7)} + \dots \right]. \quad (17)$$

Подставляя (17) в дисперсионное уравнение (4.65) и собирая слагаемые с одинаковыми степенями x , несложно получить с точностью до членов $\sim x^4$ следующее уравнение:

$$\frac{3(4l^3 + 8l^2 + 6l + 3)}{(2l+1)^2(2l+5)} x^4 + \frac{2(l-1)(2l^2 + 4l + 3)}{(2l+1)} x^2 + l(l-1)(l+2) \frac{\alpha_l}{\nu^2} = 0. \quad (18)$$

Переходя к величине s , запишем дисперсионное уравнение для случая больших значений вязкости:

$$\frac{3(4l^3 + 8l^2 + 6l + 3)}{(2l+1)^2(2l+5)} s^2 + \frac{2(l-1)(2l^2 + 4l + 3)}{(2l+1)} \nu s + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0. \quad (19)$$

При получении уравнения (18) в разложении (7) было отброшено слагаемое $\sim x^4$. Это можно сделать, поскольку оно, в силу большой величины коэффициента кинематической вязкости, стоящей в знаменателе выражения для определения x , много меньше слагаемого $\sim x^2$.

Найдем ограничение на минимальную величину коэффициента кинематической вязкости (на величину x), при которой можно пользоваться дисперсионным уравнением (1). Для этого рассмотрим отношение третьего члена ряда (17) ко второму и потребуем, чтобы это отношение было много меньше единицы. В итоге получим

$$\frac{4(l+2)x^2}{(2l+1)(2l+5)(2l+7)} \ll 1.$$

Это соотношение будет справедливо, когда

$$x^2 \ll \frac{(2l+1)(2l+5)(2l+7)}{4(l+2)}.$$

Отсюда, переходя от величины x к вязкости ν и помня, что минимальное значение индекса l в разложении возмущения поверхности $\xi(\vartheta, \varphi, t)$ по сферическим функциям $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ равно 2, получим условие на величину коэффициента кинематической вязкости:

$$\nu \gg 0.03 \cdot s. \quad (20)$$

Очевидно, что с ростом индекса l численный коэффициент в неравенстве (20), справа, увеличивается $\sim l^2$.

Выпишем решение дисперсионного уравнения (19):

$$s_l^{1;2} = \eta_l \left[-1 \pm \sqrt{1 - \chi_l \cdot \frac{\alpha_l}{\nu^2}} \right]; \quad (21)$$

$$\eta_l = \frac{(l-1)(2l+1)(2l+5)(2l^2+4l+3)\nu}{3(4l^3+8l^2+6l+3)}; \quad \chi_l = \frac{3l(l+2)(4l^3+8l^2+6l+3)}{(l-1)(2l+5)(2l^2+4l+3)}.$$

Из вида решения (21) следует, что:

1) если величина $\alpha_l > 0$, т. е. $Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) < 1$, но заряд капли не слишком велик и $\alpha_l > v^2 / \chi_l$ и выражение под знаком квадратного корня отрицательно, то поверхность капли совершает затухающие колебания. При этом комплексная величина s_j определяет частоты собственных колебаний ω_l и декременты их затухания β_l :

$$s_l^{1;2} = -\beta_l \pm i \cdot \omega_l \equiv -\eta_l \mp i \cdot \eta_l \cdot \sqrt{\chi_l \cdot \frac{\alpha_l}{v^2} - 1}; \quad (22)$$

2) если величина $\alpha_l > 0$, ($Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) < 1$), но $\alpha_l < v^2 / \chi_l$ за счет большой величины коэффициента кинематической вязкости или за счет большой величины собственного заряда капли Q , приближающегося к своему критическому в смысле реализации рэлеевской неустойчивости значению, так что выражение под знаком квадратного корня в (21) положительно и весьма мало, то оба решения $s_l^{1;2}$ вещественны и положительны и виртуальное возмущение свободной поверхности экспоненциально затухает, а величины $s_l^{1;2}$ характеризует декременты затухания колебаний поверхности $\beta_l^{1;2}$:

$$\beta_l^{(1)} \equiv -\eta_l - \eta_l \cdot \sqrt{1 - \chi_l \cdot \frac{\alpha_l}{v^2}}; \quad \beta_l^{(2)} \equiv -\eta_l + \eta_l \cdot \sqrt{1 - \chi_l \cdot \frac{\alpha_l}{v^2}}. \quad (23)$$

При этом зависимость возмущения l -й моды капиллярных колебаний поверхности от времени будет определяться линейной комбинацией двух экспонент: $\sim C_1 \cdot \exp(\beta_l^{(1)} \cdot t) + C_2 \cdot \exp(\beta_l^{(2)} \cdot t)$. Очевидно, что при больших значениях времени затухание виртуального возмущения свободной поверхности будет характеризовать меньший из декрементов $\beta_l^{(2)}$, т. к. экспонента с большим значением величины декремента убывает со временем быстрее и соответствующее движение жидкости может полностью затухнуть к моменту наблюдения.

Таким образом, при $\alpha_l > 0$ условие обращения в нуль подкоренного выражения в (21) разделяет периодические и непериодические решения задачи. Запишем это условие в виде

$$\frac{\alpha_l}{\nu^2} = \frac{1}{\chi_l} \equiv \frac{(l-1)(2l+5)(2l^2+4l+3)}{3l(l+2)(4l^3+8l^2+6l+3)}. \quad (24)$$

Уравнение (24) определяет точки бифуркации, т. е. такие значения вязкости ν_{cr} (для заданного заряда капли Q и номера моды l), при которых частота осцилляций, определяемая формулой (22), обращается в нуль и два периодических затухающих с одинаковым декрементом движения свободной поверхности капли сменяются на два аperiodически затухающих с различными декрементами движения.

Расчеты показывают, что при фиксированном заряде капли Q , меньшем критического значения Q_{cr} , с увеличением номера моды l частота ν_{cr} уменьшается. Таким образом, при заданном ν в капле вязкой жидкости возможна реализация лишь конечного числа осцилляций с несколькими первыми (малыми) l , для которых $\nu_{cr} > \nu$. Движения жидкости, соответствующие остальным модам являются аperiodическими;

3) если величина $\alpha_l < 0$, т. е. $Q^2 \kappa_l / 4\pi(l+2) > 1$, то поверхность капли неустойчива, т. к. один из корней дисперсионного уравнения становится вещественным положительным и амплитуда данной моды нарастает со временем. Второе решение в указанных условиях соответствует экспоненциально затухающему решению. Иными словами, величина $s_l^{(1)}$ определяет инкремент нарастания неустойчивости γ_l , а величина $s_l^{(2)}$ определяет декремент затухания β_l :

$$s_l^{(1)} = \gamma_l \equiv -\eta_l + \eta_l \cdot \sqrt{1 + \chi_l \cdot \frac{|\alpha_l|}{\nu^2}}; \quad s_l^{(2)} = -\beta_l \equiv \eta_l + \eta_l \cdot \sqrt{1 + \chi_l \cdot \frac{|\alpha_l|}{\nu^2}}. \quad (25)$$

Численные оценки по (25) показывают, что инкремент нарастания неустойчивости является резко убывающей функцией вязкости. Из сказанного выше следует, что, как и в случаях идеальной и маловязкой жидкости, для сильновязкой жидкости значение $\alpha_l = 0$ разделяет устойчивые и неустойчивые решения задачи и выражения для критического значения заряда капли (9)–(11) остаются справедливыми.

6.2. Описание характерных времен

1. Общие закономерности реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости экспериментально и теоретически исследованы в большом количестве экспериментальных работ для различных геометрий заряженной поверхности жидкости [180]. В частности, в этих работах показано, что критические условия проявления неустойчивости заряженной поверхности жидкости зависят от геометрии поверхности и граничных условий. В соответствии с данными этих работ будем модифицировать систему характерных времен, присущих феномену спонтанного электродиспергирования жидкости. Подчеркнем, что, говоря о феномене «спонтанного» электродиспергирования жидкости, мы противопоставляем его феномену вынужденного капиллярного распада струй, достаточно подробно описанному в [6].

Так же как в [56, 176–177], характерные времена, на основе которых строится классификация режимов распыления, разделим на две группы: 1) характерные времена, определяющиеся физическими свойствами рабочей жидкости; 2) характерные времена, зависящие от внешних параметров, определяющих режимы распыления. Времена первой группы примем совпадающими с использованными в [56, 176–177]:

$\tau_\varepsilon = (\varepsilon/\sigma)$ – время максвелловской релаксации электрического заряда или время выравнивания электрического потенциала в жидкости (характерное время перераспределения электрического заряда);

$\tau_\nu = (R^2/\nu)$ – время вязкой релаксации или характерное время выравнивания импульса в объеме жидкости (время выравнивания профиля поля скоростей);

$\tau_c = (R/c)$ – время гидродинамической релаксации (время выравнивания давления в объеме жидкости).

Характерные времена второй группы, использованные в [56, 176–177], уточним и пополним. Необходимость в уточнении связана с тем, что характерные времена второй группы $\tau_\gamma^{(\nu)}$ и $\tau_\nu^{(\gamma)}$, предложенные в [56, 176–177], основаны на выражении (14) предыдущего раздела и адекватно описывают феномен, только когда

величина параметра W существенно отличается от W_{cr} . Если же величина параметра W близка к W_{cr} , то соотношение (14) становится неверным и для введения характерных времен $\tau_\gamma^{(\nu)}$ и $\tau_\nu^{(\gamma)}$ нужно использовать соотношение (13).

Величину разности потенциалов, приложенную к разрядной системе и входящую в определение характерных времен второй группы, будем характеризовать с помощью безразмерного параметра $W \equiv \varepsilon_{i0} \kappa^2 U^2 / 16\pi\gamma R \cdot \left\{ \frac{(1-e^2)}{2e^3} \left[\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - 2e \right] \right\}^2$, где $e \equiv \sqrt{1 - (R/L + R)^2}$, L – выступающая часть капилляра; $\kappa \equiv E_\perp / E_\parallel$ – отношение перпендикулярной компоненты внешнего электрического поля к продольной компоненте. Под W_{cr} будем понимать критическое значение параметра W , при котором поверхность жидкости претерпевает неустойчивость по отношению к отрицательному давлению электрического поля при $W \geq W_{cr}$ и начинает сбрасывать избыточный электрический заряд путем эмиссии сильно заряженных капель или выброса сильно заряженных струй жидкости. В [56, 176–177] принималось, что $W_{cr} \approx 1$, как это было бы для сферической капли жидкости радиусом R , поддерживаемой при потенциале U . В реальности в зависимости от конкретных условий: от формы мениска (полусферический, плоский или имеет форму сплюснутого или вытянутого сфероида), от скорости подачи жидкости в мениск по капилляру (если скорость мала, то неустойчивость мениска определится третьей модой осцилляций, а если скорость велика – второй), от условий закрепления мениска на капилляре – конкретное значение W_{cr} может меняться на порядок. Поэтому в нижеследующем уточнении ранее предложенной классификации будем использовать не конкретное значение параметра W , а общее обозначение W_{cr} , которое в каждой конкретной ситуации может быть выбрано отдельно.

Характерное время натекания полусферического мениска с радиусом R , равным радиусу капилляра, определенное соотношением

$$\tau_\nu \approx \left(2\pi R^3 \rho / 3\dot{M} \right) = \left(2\pi R^3 / 3\dot{V} \right),$$

оставим неизменным. Отметим лишь, что массовый расход жидкости через капилляр зависит и от радиуса капилляра, и от величины коэффициента кинематической вязкости. Соответствующую зависимость можно получить из соображений размерности в виде

$$\dot{M} \sim \Delta p \cdot R^4 / \nu,$$

где Δp – перепад давлений на единицу длины капилляра. Когда жидкость подается по капилляру под действием некоторого гидростатического давления, то в выписанной зависимости все понятно. Но в задачах спонтанного электродиспергирования жидкости с сильно заряженного мениска на торце капилляра или, например, при выбросе струй плоской сильно заряженной поверхностью жидкости или при распаде свободно падающей в атмосфере сильно заряженной капли [3–4, 185, 189] перепад давлений Δp определится отрицательным давлением электрического поля

на поверхность жидкости: $\Delta p \sim \kappa^2 U^2 / 8\pi R^2 \left\{ \frac{(1-e^2)}{2e^3} \left[\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - 2e \right] \right\}^2$.

В безразмерном виде данная величина характеризуется параметром $\Delta p \cdot R / \gamma \sim W$.

В итоге массовый расход жидкости через капилляр зависит и от радиуса капилляра, и от коэффициента кинематической вязкости жидкости, и от приложенной разности потенциалов.

Характерное время осцилляций заряженного мениска жидкости на торце капилляра для маловязкой жидкости при $0 \leq W \leq W_{cr}$ в соответствии со сказанным в разделе 6.1 определим так же, как в [56, 176–177]:

$$\tau_\gamma \approx \left(\sqrt{\rho R^3 / \gamma (W_{cr} - W)} \right).$$

Для вязкой жидкости в отличие от [56, 176–177] это время определим с учетом ее вязкости согласно формуле (22) из раздела 6.1, полагая $l = 2$, в виде

$$\tau_\gamma \equiv \sqrt{\rho R^3 / \gamma \left[11 \cdot (W_{cr} - W) - \nu^2 \rho / \gamma R \right]}.$$

Несложно видеть, что влияние даже относительно большой вязкости существенно скажется на характерном времени τ_γ лишь при больших зарядах мениска: $W \sim W_{cr}$.

Характерное время развития капиллярной неустойчивости свободной поверхности заряженного мениска $\tau_\gamma^{(v)}$ при $W > W_{cr}$ для маловязкой жидкости определим на основе соотношения (13) при $l = 2$ в виде

$$\tau_\gamma^{(v)} \equiv \left[-\frac{5 \cdot v}{R^2} + \sqrt{\frac{25 \cdot v^2}{R^4} + \frac{8\gamma}{\rho R^3} \cdot (W - W_{cr})} \right]^{-1}.$$

Для сильно вязкой жидкости определим $\tau_\gamma^{(v)}$ на основе соотношения (25):

$$\tau_\gamma^{(v)} \equiv \left[-3.6 \cdot \frac{v}{R^2} \left(1 - \sqrt{1 + 11 \cdot \frac{\gamma R (W - W_{cr})}{\rho v^2}} \right) \right]^{-1}.$$

Характерное время затухания мелкомасштабного ($l \gg 1$) возмущения свободной поверхности заряженного мениска $\tau_v^{(\gamma)}$ при $W > 1$ определим для мало- и сильновязкой жидкостей на основе тех же соотношений (13) и (25) при произвольном немалом, l :

$$\tau_v^{(\gamma)} \equiv \left[(l-1)(2l+1) \cdot v/R^2 + \sqrt{(l-1)^2(2l+1)^2 \cdot v^2/R^4 + (l-1)l(l+2) \cdot |\alpha_l| \cdot \rho R^3/\gamma} \right]^{-1}$$

и

$$\tau_v^{(\gamma)} \equiv \left[-\eta_l \cdot \frac{v}{R^2} \left(1 - \sqrt{1 + \chi_l \cdot \frac{\gamma R |\alpha_l|}{\rho v^2}} \right) \right]^{-1};$$

$$\alpha_l \equiv 1 - \frac{Q^2}{4\pi\gamma R^3} \cdot \frac{(l\varepsilon^2 - (2l-5)\varepsilon + (l+1))}{(l+2)[l(\varepsilon+1)+1] \cdot \varepsilon} \cdot \left\{ \frac{(1-e^2)}{2e^3} \left[\ln\left(\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \right]^2 \right\}.$$

К этим временам следует добавить характерное время периодического движения мениска под влиянием силового воздействия флуктуаций объемного заряда в межэлектродном пространстве:

$$\tau_{\omega} \equiv 4\pi R \sqrt{\rho h R} / \kappa U.$$

Кроме того, для построения классификации, более совершенной, чем предложенная в [56, 176–177], приведенные выше времена желательно дополнить характерными временами, опирающимися на параметры образующихся капель. Так, необходимо определить характерное время отрыва мениска (капли) от капилляра τ_k и характерное время распада струи на отдельные капли (характерное время отрыва капли от торца струи) τ_j . Из [58] можно взять характерное время удаления заряженной капли из разрядного промежутка $\tau_q = \rho_g \cdot v_g \cdot r_k \cdot h^2 / q_k \cdot \kappa \cdot U$, где v_g – коэффициент кинематической вязкости газа; ρ_g – массовая плотность газа; h – расстояние от торца капилляра до противоэлектрода; r_k – радиус k -й капли; q_k – заряд k -й капли; U – разность потенциалов, приложенных к разрядной системе. Однако с последними тремя характерными временами существует очевидная сложность: качественная классификация должна опираться на физико-химические свойства диспергируемых жидкостей и на технические параметры установки. В этой связи встает проблема: как характеристики капель и струй, получаемых при электродиспергировании, выразить через физико-химические свойства жидкостей и технические параметры установки для электродиспергирования? Тем не менее эту трудность можно преодолеть, опираясь на результаты исследования струй, приведенные выше.

2. Когда напряженность внешнего электрического поля E_0 у поверхности мениска жидкости на торце капилляра весьма велика, так что $W \equiv \kappa^2 E_0^2 / 4\pi \sqrt{\rho \gamma R} \left\{ \frac{(1-e^2)}{2e^3} \right\} \left\{ \frac{(1-e^2)}{2e^3} [\ln(\frac{1+e}{1-e} - 2e)] \right\}^2 \gg 2$, становятся неустойчивыми все волны с волновыми числами $k_{nm} \leq W$, но максимальным инкрементом обладает волна с $k_{\max} = 2W/3$. Напомним, что n – порядок функции Бесселя первого рода, а m – номер корня уравнения

$$J_n(\mu_{nm}) = 0; \quad \mu_{nm} \equiv k_{nm} R,$$

представляющего собой условие закрепления жидкого мениска на торце капилляра; R – внутренний радиус капилляра. Неустой-

чивая волна с волновым числом k_{nm} , наиболее близким к $k_{\max} = 2W/3$, сформирует струю, выбрасываемую неустойчивым мениском, а радиус струи r_j определится соотношением $r_j \approx R/n$. Исходя из этого условия, по параметрам конкретной установки и физико-химическим характеристикам диспергируемой жидкости можно оценить радиусы r_j струй, выбрасываемых мениском. Радиусы каплей R_d , образующихся при распаде струй, согласно данным раздела 4 настоящей книги, будут примерно в два раза превышать радиус струи $R_d \approx 2r_j$. Заряды отдельных каплей можно принять близкими к предельно возможному в смысле критерия Релея устойчивости сферической капли по отношению к собственному заряду $W \equiv Q^2/16\pi R^3 \gamma = 1$ [178].

Радиусы каплей, образующихся при отрыве мениска непосредственно от капилляра в контексте проводимого исследования, можно принять равными радиусу капилляра, а заряды – равными произведению разности потенциалов на радиус капли. Строго говоря, следует различать внутренние и внешние радиусы капилляров, которые для тонких капилляров могут различаться и в два раза [178, 190]. Но для целей классификации режимов полидиспергирования жидкости нам достаточно оценить характерные времена по порядку величины, а потому не станем вводить такого различия.

В итоге характерное время отрыва капли от мениска τ_k при $W < W_{cr}$ можно принять равным характерному времени осцилляций мениска $\tau_k \equiv \tau_\gamma$. Характерное время распада струи на отдельные капли τ_j (характерное время отрыва капли от торца струи) можно определить через инкремент неустойчивости волны с $m = 0$ соотношением

$$\tau_j \equiv \sqrt{\rho r_j^3 / \gamma}.$$

Можно также через инкремент неустойчивости волны с $m = 1$ ввести характерное время развития хлыстообразного движения конца струи τ_w , которое можно принять совпадающим с τ_j , т. е.

$$\tau_w \approx \tau_j.$$

6.3. Предлагаемая классификация наблюдаемых режимов спонтанного распада струй (электродиспергирования жидкости)

Как отмечалось во второй главе, в проводимом исследовании мы сосредоточим свои усилия на усовершенствовании классификации, предложенной в [56, 176–177], поскольку по сравнению с предложенной в [58] она является более полной и строгой и оставляет простор для уточнения на основе углубленного понимания физических закономерностей осцилляций, неустойчивости и спонтанного распада заряженных струй.

В нижеследующих рассуждениях при описании переходов между режимами, кроме ранее введенного массового расхода жидкости через капилляр \dot{M} , будем использовать и массовый расход жидкости при ее уносе из разрядной системы каплями \dot{M}_m . В отличие от классификации режимов [56, 176–177], выстроенных в систему для двух ситуаций вязких и маловязких жидкостей в порядке увеличения разности потенциалов, приложенных к разрядной системе, в нижеследующих рассуждениях будем принимать во внимание многофакторность феномена смены одного режима другим. Переход от одного режима диспергирования к другому может быть инициирован изменением: массового расхода жидкости через капилляр \dot{M} , массового расхода жидкости с мениска \dot{M}_m , разности потенциалов, приложенных к разрядной системе U , радиусов капилляра внутреннего R_{in} и внешнего R_{ex} , величины коэффициента кинематической (динамической) вязкости жидкости ν (или $\mu \equiv \rho\nu$), скорости уноса выброшенных мениском и образовавшихся при распаде струй капель из разрядной системы V .

Кроме того, отметим, что в классификации [56, 176–177] во всех режимах включен учет соотношения сил, отрывающих каплю, тогда как согласно [191]) при достаточно большой напряженности электрического поля в окрестности мениска жидкости (для тонких капилляров) роль поля силы тяжести в феномене реализации неустойчивости мениска пренебрежимо мала. В этой связи в диаграмме соотношений режимов уберем приведенные в класси-

фикации [56, 176–177] соотношения сил для каждого режима, но оставим их там, где это необходимо, – в кратких описаниях режимов, дополнив их (там, где это необходимо) еще и учетом баланса давлений на вершину мениска (капли).

6.4. Маловязкие жидкости

1. Капельный (*dripping*) и микрокапельный (*microdripping*) режимы. Прежде всего отметим, что капельный и микрокапельный режимы электродиспергирования жидкости, включенные в классификацию и в [56, 176–177] и в [58], характерны тем, что заряженные капельки отрываются непосредственно от мениска на торце капилляра или от большой (родительской) капли, электростатический распад которой исследуется, весьма детально описаны в работах [192–193] (см. также [194]). В этой связи в нижеследующем изложении основное внимание сосредоточим на режимах, связанных с распадом на капли заряженных струй жидкости.

Напомним, что капельный режим по [58] включает в себя два режима из классификации [56, 176–177] – собственно капельный и струйно-капельный. Струйно-капельный режим в [58] обозначается как капельный с сателлитами (*dripping+sibling*). Мы же, как отмечалось выше, будем ориентироваться на классификацию [56, 176–177].

2. Струйно-капельный (*jet-dripping*) режим. Переход от капельного режима к струйно-капельному, согласно и [56, 176–177], и [58], происходит при увеличении прикладываемой к разрядному промежутку разности потенциалов. При этом форма мениска становится более вытянутой, а отрицательное давление электрического поля P_U на его вершину увеличивается настолько, что еще до отрыва всего мениска при выполнении условия $F_V + F_U + F_g \geq F_\gamma$ (т. е. когда сумма сил, отрывающих каплю, превысит капиллярную силу в перетяжке, связывающей каплю с торцом капилляра) в малой окрестности вершины мениска выполнится условие $P_V + P_U + P_g \gg P_\gamma$ (здесь P – давление) и из вершины мениска будет выброшена струя жидкости, которая будет распадаться на отдельные капельки, образуя так называемые

мые «сателлиты» (термин взят из теории и практики вынужденного капиллярного монодисперсного распада струй [6]). Характерное время натекания мениска τ_γ должно быть больше характерного времени его отрыва τ_k , которое, в свою очередь, должно быть больше характерного времени развития неустойчивости мениска $\tau_\gamma^{(v)}$ и характерного времени распада струи τ_j . В итоге совместно со сказанным ранее про струйно-капельный режим получим

$$\tau_\varepsilon \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} < \tau_k < \tau_V < \tau_v.$$

3. Веретенообразный (spindle) режим реализуется при дальнейшем увеличении прикладываемой к разрядному промежутку разности потенциалов U и некотором увеличении массового расхода жидкости через капилляр \dot{M} для положительной полярности потенциала, подаваемого на капилляр. При отрицательном потенциале, подаваемом на капилляр, переход от струйно-капельного режима к веретенообразному происходит при снижении массового расхода [58]. Общая схема временной эволюции мениска сходна с эволюцией мениска в струйно-капельном режиме, только образующаяся струя более длинная, а ее конец совершает хлыстообразное движение и сводится к следующему: натекающий закругленный мениск под действием сильного электрического поля вытягивается и из его вершины выстреливается тонкая струйка жидкости, распадающаяся на весьма мелкие капельки. Удлинение мениска усиливается, у основания заостренной части мениска и у основания струйки жидкости возникают перетяжки. Наконец, веретенообразный объём жидкости отделяется от мениска и от струйки и сжимается, образуя основную каплю, в то время как отделившаяся нить продолжает распадаться на маленькие капельки. Характерное время развития хлыстообразного движения конца струи τ_w сравнимо с характерным временем распада струи τ_j . Соотношение характерных времен имеет вид

$$\tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} < \tau_\varepsilon < \tau_k < \tau_V < \tau_v.$$

4. Режим осциллирующей струи (oscillating jet). Переход от веретенообразного режима к режиму осциллирующей струи происходит при неизменном массовом расходе \dot{M} с ростом прикладываемой к разрядному промежутку разности потенциалов U для положительной полярности потенциала, подаваемого на капилляр, и при увеличении разности потенциалов U и неизменном массовом расходе \dot{M} для отрицательной полярности потенциала [58]. Появление этого режима, по-видимому, связано с накоплением на периферии межэлектродного пространства (электрическое поле в нем сильно неоднородно), объемного заряда движущихся с различной скоростью заряженных капелек, имеющих различные размеры и заряды. Иными словами, в этом режиме массовый расход через капилляр \dot{M} меньше \dot{M}_m – массового расхода жидкости при ее уносе из разрядной системы каплями так, что в межэлектродном пространстве накапливается объемный заряд, объемная концентрация которого является функцией времени. Сами осцилляции, по всей видимости, связаны с флуктуациями объемного заряда, отсутствием осевой симметрии эмиссии капель и струй из мениска, отклонением формы стенок капилляра от цилиндрических и от осесимметричности. Характерное время возникновения осцилляций мениска τ_ω должно быть больше характерного времени удаления капли из разрядного промежутка τ_q , которое, в свою очередь, должно быть меньше характерного времени отрыва мениска τ_k , но больше характерного времени распада струи на капли τ_j . В итоге совместно со сказанным ранее про веретенообразный режим получим для соотношения характерных времен

$$\tau_w \sim \tau_j < \tau_q < \tau_\gamma^{(v)} < \tau_\varepsilon < \tau_\omega < \tau_k < \tau_V < \tau_v.$$

5. Многоверетённый режим (multispindel) по сравнению с режимом осциллирующей струи проявляется при снижении массового расхода через капилляр \dot{M} и увеличении разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку [58]. В этом режиме мы имеем почти плоский мениск, на кромке которо-

го хаотическим образом появляются отрывающиеся веретенообразные выступы. По всей видимости, в этом режиме массовый расход жидкости через капилляр слишком мал для формирования большого мениска, а напряженность электрического поля у торца капилляра достаточно велика для проявления неустойчивости неосесимметричных кольцевых волн на торце мениска. В итоге на кромке капилляра, толщина стенок которого может быть сравнима с внутренним радиусом капилляра [56,190], образуются симметрично относительно оси капилляра нескольких мелких эмиссионных выступов в соответствии со степенью неосесимметричности неустойчивой волны. Расход жидкости через эти выступы в веретенообразном режиме и обеспечивает отток жидкости от мениска в режиме $\dot{M}_m = \dot{M}$. Соотношение характерных времен примет вид

$$\tau_q < \tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} < \tau_\varepsilon < \tau_k < \tau_V < \tau_v.$$

6. Режим прецессирующей струи (*precession jet*) проявляется по сравнению с многоверетённым режимом при некотором увеличении разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку, и существенном увеличении массового расхода жидкости \dot{M} [58]. От режима осциллирующей струи к режиму прецессирующей струи можно перейти простым увеличением разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку. Причина возникновения прецессии струи, по-видимому, такова же, как и причина возникновения ее осцилляций:

$$\tau_q < \tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} < \tau_\varepsilon < \tau_\omega < \tau_k < \tau_V < \tau_v.$$

7. Режим с нерегулярно ветвящимся мениском (*ramified meniscus*), введенный в [58], описан там чрезвычайно кратко. По всей видимости, он может быть получен из многоверетенного режима при существенном увеличении разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку, и существенном же увеличении массового расхода жидкости \dot{M} . В [58] описан переход к этому режиму из многоструйного режима при снижении вязкости жидкости, что при прочих равных условиях означает

увеличение массового расхода через капилляр. От режима прецессирующей струи к режиму с нерегулярно ветвящимся мениском можно перейти путем увеличения массового расхода жидкости \dot{M} и разности потенциалов U . В этом режиме из мениска выбрасываются случайным образом короткие струи. Скорость подачи жидкости в мениск велика и мениск выпуклый. Напряженность электрического поля в окрестности мениска достаточно велика, чтобы в нем реализовалась неустойчивость сразу нескольких высоких неосесимметричных мод кольцевых волн с близкими инкрементами:

$$\tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} \ll \tau_\varepsilon < \tau_V < \tau_v.$$

8. Конусно-короткоструйный (cone-short jet) режим реализуется при дальнейшем увеличении разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку. Форма мениска коническая. Струя устойчивая, а ее конец может претерпевать неустойчивости двух типов: варикозную и изгибную. Варикозная неустойчивость означает неустойчивость осесимметричных волн, при которой цилиндрическая разбивается на капли монодисперсным образом. Изгибная неустойчивость соответствует возбуждению волны с $m=1$, а феноменологически – хлыстообразному движению ее конца. Соотношение характерных времен имеет вид

$$\tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} \ll \tau_\varepsilon < \tau_v \sim \tau_V.$$

9. Многоструйный режим (multijet) обычно развивается из конусно-короткоструйного режима при увеличении разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку [56, 58]. В этом режиме по кромке капилляра при почти плоском мениске образуется симметрично относительно оси капилляра несколько маленьких эмитирующих конусов [56, 58], каждый из которых функционирует в конусно-короткоструйном режиме. Такая феноменологическая картина допускает такую же трактовку, что и многоверетенный режим, а именно в этом режиме массовый расход жидкости через капилляр слишком мал для формирования большого мениска, а напряженность электрического поля у торца капилляра достаточно велика для проявления неустойчивости не-

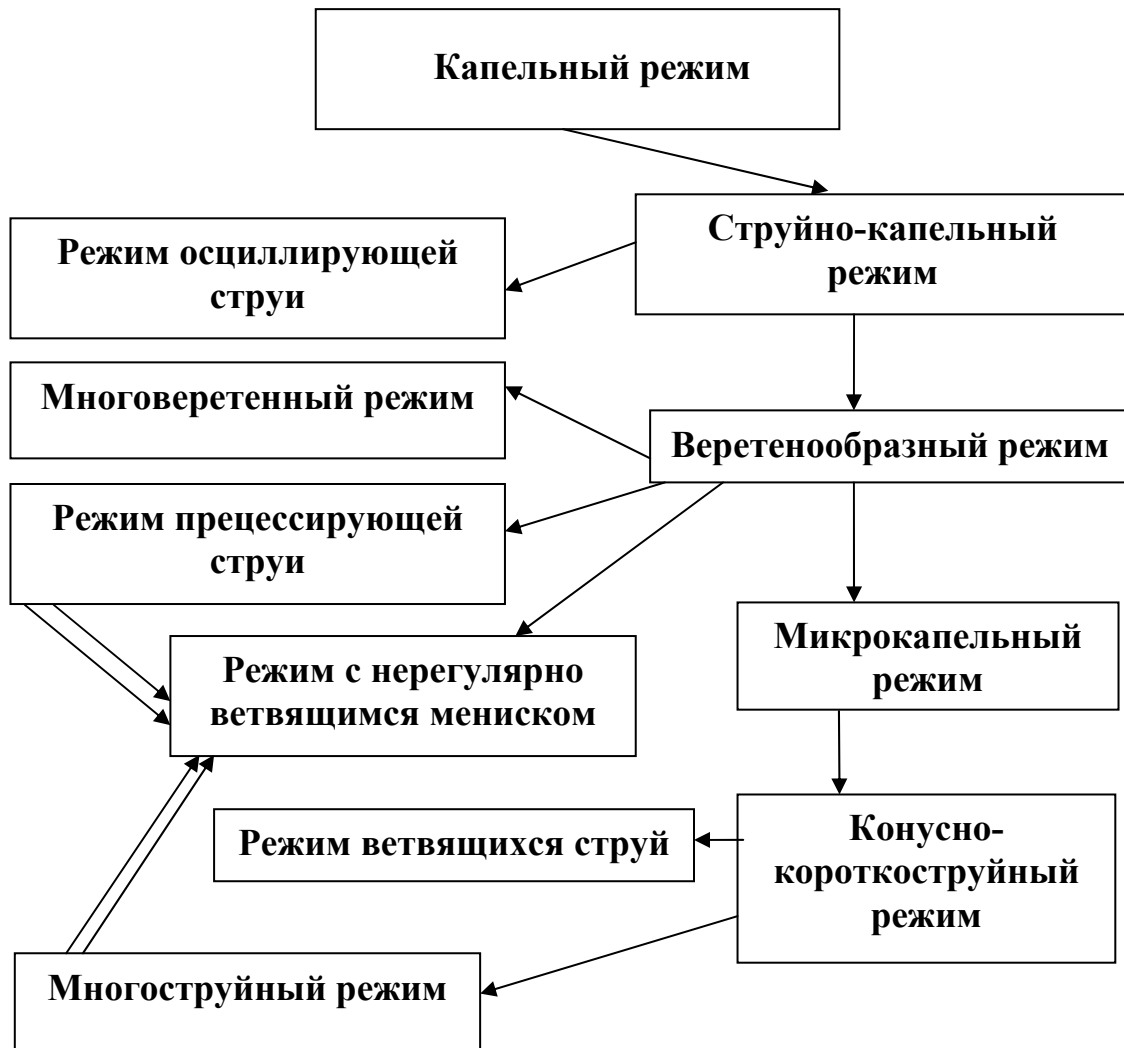
осесимметричных кольцевых волн на торце мениска. В итоге на кромке капилляра, толщина стенок которого сравнима с внутренним радиусом капилляра [56, 58], образуются симметрично относительно оси капилляра нескольких мелких эмиссионных выступов в соответствии со степенью неосесимметричности неустойчивой волны. Расход жидкости через эти мелкие эмиссионные выступы и обеспечивает отток жидкости от мениска в режиме $\dot{M}_m = \dot{M}$ так, что мениск остается плоским. Соотношение характерных времен примет вид

$$\tau_w \sim \tau_j < \tau_\gamma^{(v)} \ll \tau_\varepsilon < \tau_v < \tau_V.$$

10. Режим ветвящихся струй (ramified jet), схематично описанный в [58] (ранее о нем сообщалось в [57]) по всей видимости, связан с возбуждением в струе, эмитированной мениском в конусно-короткоструйном режиме, электростатической неустойчивости неосесимметричных волн с $m \geq 2$, что достигается увеличением разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку. При этом цилиндрическая поверхность струи оказывается сильно деформированной и при достаточно большой напряженности электрического поля в окрестности струи неоднородности на ее поверхности могут функционировать как самостоятельные эмиссионные выступы, с вершин которых выбрасываются дочерние струйки. Для корректной характеристики режима ветвящихся струй следует ввести еще два характерных времени, характеризующих вторичные струйки: $\tau_{\gamma j}^{(v)}$ – время развития неустойчивости с вершин неоднородностей на поверхности струи и τ_{jj} – время распада струек, выброшенных с вершин неоднородностей на поверхности центральной струи:

$$\tau_{jj} < \tau_{\gamma j}^{(v)} < \tau_\gamma^{(v)} \ll \tau_\varepsilon < \tau_v < \tau_V.$$

11. Диаграмма смены режимов для маловязких жидкостей в итоге принимает нижеприведенный вид. Одна стрелочка на диаграмме означает переход с увеличением разности потенциалов U , прикладываемой к разрядному промежутку, две стрелочки – переход с увеличением массового расхода через капилляр.



6.5. Вязкие жидкости

Новые режимы, описанные в [58], и введенные в классификацию в предыдущем разделе, описаны на основе экспериментов, проведенных с дистиллированной водой и капилляром диаметром ~ 1 мм, поэтому включить их в классификацию режимов диспергирования вязких жидкостей не представляется пока возможным, хотя повторение соответствующих экспериментов с той же жидкостью и с капиллярами много меньших диаметров перевело бы наблюдаемые режимы в режимы диспергирования вязких жидкостей, поскольку разделение жидкостей на вязкие и маловязкие происходит на основе безразмерной вязкости. Поэтому изменения в классификации режимов диспергирования вязких жидкостей касаются лишь выше проделанного уточнения характерных времен и критических условий реализации неустойчивости.

Список литературы

- [1] Strutt J. W. (Lord Rayleigh) // *Phil. Mag.* 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [2] Zeleny J. // *Phys. Rev.* 1917. Vol. 10, № 1. P. 1–6.
- [3] Macky W. A. // *Pros. Roy. Soc. London*, 1931. Vol. 133? № A822. P. 565–587.
- [4] Tonks L. A. // *Phys. Rev.* 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [5] English W. N. // *Phys. Rev.* 1948. Vol. 74? № 2. P. 179–189.
- [6] Монодиспергирование вещества: принципы и применение // Е. В. Аметистов, В. В. Блаженков, А. К. Городов и др.; под ред. В. А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [7] Wagner A., Holl T. M. // *J. Vacuum Sci. Techn.* 1981. Vol. 19, № 4. P. 1186–1189.
- [8] Габович М. Д. // *УФН.* 1983. Т. 140, № 1. С. 137–151.
- [9] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, № 18. С. 1637–1640.
- [10] Гасанов И. С., Гурбанов И. И. // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34, № 12. С. 42–47.
- [11] Fenn J. B., Mann M., Meng C. K. et al. // *Science.* 1989. Vol. 246, № 4926. P. 64–71.
- [12] Григорьев А. И., Морозов В. В., Ширяева С. О. // *ЖТФ.* 2002. Т. 72, вып. 10. С. 33–40.
- [13] Коженков В. И., Фукс Н. А. // *Успехи Химии.* 1976. Т. 45, № 12. С. 2274–2284.
- [14] Bailey A. G. // *Atomization and Spray Technology.* 1986. Vol. 2. P. 95–134.
- [15] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // *Изв. РАН. МЖГ.* 1994. № 3. С. 3–22.
- [16] Mahoney J. F., Taylor S., Perel J. // *IEEE Trans. Ind. Appl.* 1987. Vol. 23, № 2. P. 197–204.
- [17] D'Cruz C., Pourrezali K. // *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 58, № 7. P. 2724–2730.
- [18] Woosley J. P., Turnbull R. J., Kim K. // *IEEE Trans. Ind. Appl.* 1982. Vol. 18, № 3. P. 314–320.
- [18] Дьячук В. А., Мучник В. М. // *ДАН СССР.* 1979. Т. 248, № 1. С. 60–63.
- [20] Grigor'ev A. I., Shiryaeva S. O. // *Physica Scripta.* 1996. Vol. 54. P. 660–666.

- [21] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Волкова М. В. // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 11. С. 31–36.
- [22] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Волкова М. В. // ЖТФ. 2005. Т. 75, вып. 7. С. 40–47.
- [23] Григорьев А. И., Синкевич О. А. // ЖТФ. 1984. Т. 54, вып. 7. С. 1276–1283.
- [24] Grigor'ev A. I., Grigor'eva I. D., Shiryayeva S. O. // J. Sci. Explor. 1991. Vol. 5, № 2. P. 163–190.
- [25] Григорьев А. И., Синкевич О. А. // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 10. С. 1985–1987.
- [26] Strutt J. W. (Lord Rayleigh). // Proc. of the London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
- [27] Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
- [28] Eggers J. // Rev. Mod. Phys. 1997. Vol. 69, № 3. P. 865–929.
- [29] Strutt J. W. (Lord Rayleigh) // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. Serie 5. P. 145–154.
- [30] Basset A. B. // Amer. J. Math. 1894. Vol. 16. P. 93–110.
- [31] Weber C. // Z. Angew. Math. Mech. 1931. Bd.11. H.3. S.136–154.
- [32] Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [33] Kelvin, Lord W. // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. P. 368–374.
- [34] Strutt J. W. (Lord Rayleigh) // Phil. Mag. 1892. Vol. 34, serie 5. P. 177–180.
- [35] Ентов В. М., Ярин А. Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа». 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [36] Taylor G. Electrically driven jet // Proc. Roy. Soc., London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
- [37] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. London, 1964. Vol. A280. P. 383–397.
- [38] Григорьев А. И., Синкевич О. А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [39] Baily A. G. // Phys. Bull. 1984. Vol. 35, № 4. P. 146–148.
- [40] Savart F. // Annal. chimic. 1833. Ser. 2. Vol. 53, № 3. P. 337–386.
- [41] Strutt J. W. (Lord Rayleigh) // Pros. Roy. Soc., London. 1879. Vol. 28. P. 406–409.
- [42] Френкель Я. И. На заре новой физики. Л.: Наука, 1970. 384 с.
- [43] Schneider J. M. et al. Stability of an electrified liquid jet // J. Appl. Phys. 1967. Vol. 38, № 5. P. 2599–2605.
- [44] Neukermans A. // J. Appl. Phys. 1973. Vol. 44, № 10. P. 4769–4770.

- [45] Назин С. С., Изотов А. Н., Шикин В. Б. // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 1. С. 121–125.
- [46] Герценштейн С. Я. и др. // ДАН СССР. 1989. Т. 306, № 5. С. 1073–1077.
- [47] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Волкова М. В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [48] Grossmann S., Muller A. // Z. Phys. B: Condensed Matter. 1984. Vol. 57. P. 161–174.
- [49] Григорьев А. И. // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып. 7. С. 41–45.
- [50] Григорьев А. И. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, вып. 18. С. 72–77.
- [51] Ширяева С. О. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 10. С. 32–40.
- [52] Ширяева С. О. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 11. С. 36–42.
- [53] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Мокшеев П. В. // ЖТФ. 2007. Т. 77, вып. 4. С. 32–40.
- [54] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Мокшеев П. В. // ЖТФ. 2008. Т. 78, вып. 3. С. 11–20.
- [55] Tomita Yu., Ishibashi Yu., Yokoyama T. // Bulletin of JSME. 1986. Vol. 29, № 257. P. 3737–3743.
- [56] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Святченко А. А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов: препринт ИМ РАН. № 25. Ярославль. 1993. 118 с.
- [57] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [58] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30, № 7. P. 873–893.
- [59] Lopez-Herera J. M., Ganán-Calvo A. M. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 501. P. 303–326.
- [60] Ganán-Calvo A. M., Lopez-Herera J. M., Riesco-Chuera P. // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 566. P. 421–445.
- [61] Saville D. // Phys. of Fluids. 1971. Vol. 14, № 6. P. 1095–1099.
- [62] Ширяева С. О. и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 4. С. 5–12.
- [63] Френкель Я. И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6, № 4. С. 348–350.
- [64] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Левчук Т. В. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 8. С. 6–14.
- [65] Ширяева С. О., Воронина Н. В., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 9. С. 31–41.
- [66] Magarvey R., Outhouse L. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13, № 1. P. 151–157.
- [67] Huebner A., Chu H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49, № 2. P. 361–372.

- [68] Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белоножко Д. Ф., Климов А. В. // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
- [69] Кириченко В. Н. и др. // ДАН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 284–287.
- [70] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 7. С. 1272–1278.
- [71] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 1991. Т. 61, вып. 3. С. 19–28.
- [72] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994, № 3. С. 3–22.
- [73] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Левчук Т. В. // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 11. С. 22–30.
- [74] Гиневский А. Ф., Мотин А. И. // ИФЖ. 1991. Т. 60, № 4. С. 576–581.
- [75] Saville D. A. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48, № 4. P. 815–827.
- [76] Mestel A. J. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
- [77] Mestel A. J. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312, № 2. P. 311–326.
- [78] Шкадов В. Я., Шутов А. А. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 29–40.
- [79] Shkadov V. Ya., Shutov A. A. // Fluid Dynamic Res. 2001. Vol. 28. P. 23–39.
- [80] Белоножко Д. Ф., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 11. С. 22–28.
- [81] Белоножко Д. Ф., Ширяева С. О., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2005. Т. 75, вып. 2. С. 37–44.
- [82] Ширяева С. О. // Известия РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.
- [83] Naayyar N. K., Murty G. S. // Proc. of the Phys. Soc. 1960. Vol. 75, pt. 3, № 483. P. 369–373.
- [84] Saville D. A. // Phys. of Fluids. 1970. Vol. 13, № 12. P. 2987–2994.
- [85] Глонти Г. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, № 5. С. 1328–1330.
- [86] Raso R. J. // AIAA Journal. 1968. Vol. 6, № 5. P. 979–980.
- [87] El-Sayed M. F., Mohamed A. A., Metwaly T. M. N. // Physica A: Stat. Mech. and its Appl. 2007. Vol. 379, Issue 1. P. 59–80.
- [88] Elazab S. S. // Phys. Scripta. 1996. Vol. 54. P. 522–524.
- [89] Шутов А. А. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 52–67.
- [90] Feng J. J. // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2003. Vol. 116. P. 55–70.
- [91] Зубарев Н. М., Зубарева О. В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 1. С. 51–55.
- [92] Zubarev N. M., Zubareva O. V. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 016307. 6 с.

- [93] Григорьев А. И. // ЖТФ. 2001. Т. 71, вып. 10. С. 1–7.
- [94] Кириченко В. Н. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 4. С. 817–820.
- [95] Кириченко В. Н., Супрун Н. Н., Петрянов-Соколов И. В. // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 4. С. 553–555.
- [96] Turnbull R. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1989. Vol. 25, № 4. P. 699–704.
- [97] Ganan-Calvo A. M. // J. Fluid Mechanics. 1997. Vol. 335. P. 165–188.
- [98] Шутов А. А., Захарьян А. А. // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 12–15.
- [99] Ширяева С. О. // ЖТФ. 1998. Т. 68, вып. 4. С. 20–27.
- [100] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 1999. Т. 69, вып. 7. С. 10–14.
- [101] Ширяева С. О. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 6. С. 44–54.
- [102] Ширяева С. О. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 3. С. 93–95.
- [103] Григорьев А. И. // ЖТФ. 2008. Т. 78, вып. 2. С. 20–32.
- [104] Yuen M. // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33, part 1. P. 151–163.
- [105] Wang D. P. // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 34, part 2. P. 299–313.
- [106] Nayfeh F. H. // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13, № 4. P. 841–847.
- [107] Bogy D. B. // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 207–228.
- [108] Malik S. K., Singh M. // Quart. Appl. Math. 1983. Vol. 41, № 3. P. 273–287.
- [109] Kant R., Malik S. K. // Quart. Appl. Math. 1986. Vol. 43, № 4. P. 407–419.
- [110] Горшков В. Н., Чабан М. Г. // ЖТФ. 1999. Т. 69, вып. 11. С. 1–9.
- [111] Григорьев А. И. и др. // ЭОМ. 2005. № 3. С. 25–36.
- [112] Григорьев А. И. и др. // ЭОМ. 2005. № 4. С. 24–35.
- [113] Григорьев А. И., Жаров А. Н., Ширяева С. О. Нелинейные капиллярные колебания заряженных уединенных капель. Ярославль: ЯГТУ, 2006. 276 с.
- [114] Белоножко Д. Ф., Ширяева С. О., Григорьев А. И. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 288 с.
- [115] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Левчук Т. В. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 8. С. 6–14.
- [116] Григорьев А. И., Ширяева С. О., Егорова Е. В. // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–50.

- [117] Ширяева С. О., Воронина Н. В., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 9. С. 31–41.
- [118] Ширяева С. О., Воронина Н. В., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2007. Т. 77, вып. 2. С. 46–55.
- [119] Филипс О. М. Взаимодействие волн // Нелинейные волны: сб. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
- [120] Tsamopoulos J. A., Brown R. A. // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [121] Ширяева С. О. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [122] Ширяева С. О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 17. С. 28–35.
- [123] Жаров А. Н., Ширяева С. О., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 12. С. 9–19.
- [124] Рыбакова М. В., Ширяева С. О., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 1. С. 24–31.
- [125] Doo-Sung Lee // The European Phys. J., Ser. B. 2003. Vol. 33. P. 487–494.
- [126] Ширяева С. О., Воронина Н. В., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2008. Т. 78, вып. 6. С. 1–14.
- [127] Ширяева С. О., Воронина Н. В., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2008. Т. 78, вып. 7. С. 21–29.
- [128] Белоножко Д. Ф., Григорьев А. И. // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 11. С. 37–45.
- [129] Ширяева С. О. // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 14–29.
- [130] Жаров А. Н., Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 2005. Т. 75, № 12. С. 33–46.
- [131] Жаров А. Н., Григорьев А. И. Аналитический асимптотический расчет нелинейных осцилляций заряженного пузырька в вязкой среде: препринт ИМИ РАН. № 32. Ярославль, 2005. 16 с.
- [132] Маркова М. П., Шкадов В. Я. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 30–37.
- [133] Новиков А. А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 179–182.
- [134] Hohman M. M. et al. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, № 8. P. 2201–2220.
- [136] Garcia F. J., Castellanos A. // Conf. Rec. 1999 Annu. Meet. IEEE Electr. Ins. Diel. Phenom. 1999. P. 346–349.
- [137] Lopez-Herera J. M., Riesco-Chueca P., Ganan-Calvo A. M. // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17, № 034106. P. 1–22.
- [138] Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 640 с.

- [139] Владимиров В. В., Горшков В. Н. // ЖТФ. 1990. Т. 60, № 11. С. 197–200.
- [140] Бухаров А. В., Гиневский А. Ф., Коновалов Н. А. // ИФЖ. 1991. Т. 60, № 4. С. 582–586.
- [141] Герценштейн С. Я. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 55–62.
- [142] Блаженков В. В. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
- [143] Горшков В. Н., Мозырский Д. В. // ЖТФ. 1996. Т. 66, вып. 10. С. 15–25.
- [144] Huynh H., Ashgriz N., Mashayek F. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 320. P. 185–210.
- [145] Чесноков Ю. Г. // ЖТФ. 2000. Т. 70, вып. 8. С. 31–38.
- [146] Higuera F. J. // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 484. P. 303–327.
- [147] Higuera F. J. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 513. P. 239–246.
- [148] Higuera F. J. // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 558. P. 143–152.
- [149] Бураев Т. К., Верещагин И. П., Пашин Н. М. // Сильные электрические поля в технологических процессах: сб. М.: Энергия, 1979. № 3. С. 87–105.
- [150] Краснов Н. В., Мурадымов М. З., Шевченко С. И. // Научное приборостроение. 1991. Т. 1, № 1. С. 42–51.
- [151] Drozin V. G. // J. Coll. Sci. 1955. Vol. 10, № 1. P. 158–164.
- [152] Бураев Т. К., Пашин Н. М. // Электричество. 1971. № 4. С. 70–79.
- [153] Carson H. S., Hendrics C. D. // J. Coll. Sci. 1965. Vol. 6. P. 1072–1075.
- [154] Коженков В. И., Кирш А. А., Фукс Н. А. // КЖ. 1974. Т. 36, № 6. С. 1168–1171.
- [155] Hendrics C. D. et al. // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. № 4.
- [156] Hayati I., Bailey A. I., Tadros Th. F. // J. Coll. Int. Sci. 1987. Vol. 117, № 1. P. 205–221.
- [157] Hayati I., Bailey A. I., Tadros Th. F. // J. Coll. Int. Sci. 1987. Vol. 117. № 1. P. 222–230.
- [158] Попов С. И., Петрянов И. В. // ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 893–895.
- [159] Pfeifer R. J. // Phys. Fluids. 1973. Vol. 16, № 3. P. 454–455.
- [160] Ширяева С. О., Григорьев А. И. // 1994. ЖТФ. Т. 64, вып. 3. С. 13–25.

- [161] Belonozhko D. F., Shiryaeva S. O., Grigor'ev A. I. // Proceedings of 17-th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray System. Zurich. Switzerland. 2–6 September 2001.
- [162] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1989. Vol. 24. P. 135–159.
- [163] Fernandes de la Mora J., Loscertales I. G. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 260. P. 155–184.
- [164] Marginean I. et al. // Anal. Chem. 2004. Vol. 76. P. 4202–4207.
- [165] Fernandes de la Mora J. // Ann. Rev. Fluid Mech. 2007. Vol. 39. P. 217–243.
- [166] Collins R. T. et al. // Nature Phys. 2008. Vol. 4, № 2. P. 149–154.
- [167] Fenn R. W., Middleman S. // AIChE Journal. 1969. Vol. 12, № 3. P. 379–383.
- [168] Haenlein A. // Forschung. Ing. Wes. 1931. Bd 2. H. 4. S. 139–149.
- [169] Grant R. P., Middleman S. // AIChE Journal. 1966. Vol. 12, № 4. P. 669–678.
- [170] Iciek J. // Int. J Multiphase Flow. 1983. № 2. P. 167–179.
- [171] Taylor G. Electrically driven jet // Proc. Roy. Soc., London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
- [172] Григорьев А. И., Синкевич О. А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [173] Baily A. G. // Phys. Bull. 1084. Vol. 35, № 4. P. 146–148.
- [174]. Zeleny J. // Phys. Rev. 1914. Vol. 3, № 2. P. 69–91.
- [175] Zeleny J. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1914. Vol. 18, part 1. P. 71–83.
- [176] Ширяева С. О., Григорьев А. И. / ЖТФ. 1994. Т. 64, вып. 3. С. 13–25.
- [177] Shiryaeva S. O., Grigor'ev A. I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [178] Ширяева С. О., Григорьев А. И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2010. 180 с.
- [179] Ширяева С. О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, вып. 4. С. 5–8.
- [180] Ширяева С. О., Григорьев А. И., Волкова М. В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [181] Александров А. Ф., Бычков В. Л., Грачев Л. П. и др. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 3. С. 38–43.
- [182] Ширяева С. О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, вып. 4. С. 5–8.
- [183] Григорьев А. И. и др. // ЖТФ. 2005. Т. 75, № 2. С. 19–27
- [184] Eggers J., Willermaux E. // ReP. Prog. Phys. 2008. Vol. 71, № 036601. P. 1–79.

- [185] Kim O. V., Dunn P. F. // *Langmuir*. 2010. Vol. 26. P. 15807–15813.
- [186] Григорьев А. И. // *ЖТФ*. 2009. Т. 79, вып. 4. С. 36–45.
- [187] Ширяева С. О. // *ЖТФ*. 2010 Т. 80, вып. 2. С. 47–51.
- [188] Pfeifer R. J. // *Phys. Fluids*. 1973. Vol. 16, № 3. P. 454–455.
- [189] Taylor G. I., McEwan A. D. // *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 22, № 1. P. 1–15.
- [190] Sample S. B., Bollini R. // *J. Coll. Sci.* 1972. Vol. 41, № 2. P. 185–193.
- [191] Григорьев А. И. // *ЖТФ*. 2007. Т. 77, вып. 2. С. 31–40.
- [192] Земсков А. А., Григорьев А. И., Ширяева С. О. // *ЖТФ*. 1991. Т. 61, № 11. С. 32–38.
- [193] Zemskov A. A., Shiryayeva S. O., Grigor'ev A. I. // *J. Coll. Int. Sci.* 1993. Vol. 158. P. 54–63.
- [194] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // *ЖТФ*. 1991. Т. 61, № 3. С. 19–28.

Оглавление

1. Введение. Ретроспектива исследований устойчивости и спонтанного капиллярного распада заряженных струй.....	3
2. Линейные осцилляции и капиллярный распад заряженных жидких струй.....	61
2.1. Линейные осцилляции и распад незаряженной цилиндрической струи идеальной жидкости.....	66
2.2. Линейные осесимметричные осцилляции и распад незаряженной цилиндрической струи вязкой жидкости.....	72
2.3. Линейные неосесимметричные осцилляции и распад заряженной цилиндрической струи.....	82
2.4. Линейные неосесимметричные осцилляции объемно заряженной цилиндрической струи вязкой диэлектрической жидкости.....	103
3. Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды.....	117
4. Влияние внешнего поля	130
4.1. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле	130
4.2. Об устойчивости цилиндрической струи, движущейся относительно материальной среды вдоль внешнего электростатического поля.....	141
5. Об устойчивости объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном ее оси электрическом поле	155
6. Теоретическое обоснование выделяемых режимов спонтанного распада заряженных струй.....	170
6.1. Дисперсионное уравнение, описывающее осцилляции и устойчивость заряженной капли вязкой жидкости.....	170
6.2. Описание характерных времен.....	180
6.3. Предлагаемая классификация наблюдаемых режимов спонтанного распада струй (электродиспергирования жидкости)	186
6.4. Маловязкие жидкости.....	187
6.5. Вязкие жидкости	193
Список литературы	194
Оглавление.....	203

Научное издание

Ширяева Светлана Олеговна
Григорьев Александр Иванович

СПОНТАННЫЙ распад струй

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Верстка И. Н. Иванова

Подписано в печать 25.07.11. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 11,85. Уч.-изд. л. 11,02. Тираж 75 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе.
ООО «КопиЦентр»
150000, Ярославль, ул. Первомайская, 37а, оф. 1
тел. (4852) 73-10-88.