

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В.Я. Трофимец, Л.А. Маматова

Компьютерное моделирование экономических систем и процессов

Часть I Оптимизационные и статистические модели

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Менеджмент организации,
Бухгалтерский учет, анализ и аудит*

Ярославль 2007

УДК 338:004
ББК У.в6я73
Т 76

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2007 года*

Рецензенты:

А.Д. Бурькин, доктор экономических наук, профессор;
кафедра высшей математики
Ярославского государственного технического университета

Трофимец, В.Я. Компьютерное моделирование экономических систем и процессов. Часть I. Оптимизационные и статистические модели: учеб. пособие / В.Я. Трофимец, Л.А. Маматова; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 122 с.; ил.
ISBN 978-5-8397-0565-4

Рассматриваются вопросы построения компьютерных моделей оптимизационных и статистических задач экономического анализа с использованием табличного процессора MS Excel. Описывается технология компьютерного моделирования на примерах задач линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионного анализа, анализа временных рядов.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 080507 Менеджмент организации; 080109 Бухгалтерский учет, анализ и аудит (дисциплины «Компьютерные модели финансового анализа», «Исследование систем управления», блок СД), очной и очно-заочной форм обучения, а также аспирантов, преподавателей, экономистов, занимающихся моделированием экономических систем и процессов.

Рис. 64. Табл. 28. Библиогр.: 6 назв.

УДК 338:004
ББК У.в6я73

© Ярославский государственный университет, 2007

© В.Я. Трофимец,
Л.А. Маматова, 2007

ISBN 978-5-8397-0565-4

Предисловие

Вопросы использования научных, в том числе и математических, методов и моделей в процессах принятия экономических решений привлекают постоянное внимание как ученых, так и специалистов-практиков. Можно констатировать, что в настоящее время математическое моделирование занимает одно из ключевых мест среди методов исследования экономических проблем.

Современное состояние экономико-математического моделирования можно рассматривать в разных ракурсах. Так, для экономиста-практика математическое моделирование имеет сугубо прагматическую основу, заключающуюся в его использовании для решения широкого круга практических задач экономического характера. Это задачи о перевозках, складировании и распределении ресурсов, задачи календарного планирования, задачи оценки эффективности и рисков инвестиционных проектов и многие другие. В этом направлении экономико-математическое моделирование достигло существенных успехов, что обусловлено, по всей видимости, реализацией многих моделей на программном уровне.

Другое крупное направление применения математического моделирования в экономике связано с исследованием некоторых специальных классов экономических моделей. В рамках этого направления решаются различные вопросы существования экстремальных значений тех или иных параметров, точек равновесия и т.д. Опираясь на относительно простые модели, исследователи получают результаты, которым далеко не всегда можно придать правдоподобную экономическую интерпретацию, поэтому особой роли в работах прикладного характера подобные исследования не сыграли. Однако не следует и недооценивать их значение – они не только содействовали становлению экономико-математических методов, но и помогли развить математические методы экономического анализа и, следовательно, косвенно содействовали развитию экономических исследований.

Широкое распространение математического моделирования в экономике в значительной степени обусловлено развитием информационных инструментальных сред, которые позволяют переводить экономико-математические модели из классической символьной формы представления в компьютерную и тем самым предоставляют пользователю доступные и эффективные средства всестороннего ана-

лиза моделей, что для практической деятельности играет решающую роль.

Универсальными инструментальными средствами создания моделей являются языки программирования общего пользования (Basic, Pascal, C/C++ и др.). На основе этих языков широкое развитие получили средства визуального проектирования программ (Visual Basic, Delphi, Visual C++), облегчающие выполнение некоторых трудоемких операций, например создание интерфейса программы. Наряду с этим существует множество специализированных средств моделирования, позволяющих быстрее и с меньшими затратами (по сравнению с универсальными языками программирования) создавать и исследовать модели. В развитии специализированных средств моделирования можно выделить следующие два направления:

1. Средства моделирования для анализа достаточно широкого класса систем. К ним относятся языки имитационного моделирования (GPSS, SIMSCRIPT и др.), а также пакеты прикладных программ, использующих для моделирования аналитические методы (MathCad, MathLab, MVS, UniCalc, Когнитрон и др). Основным недостатком этих средств является то, что их применение требует от исследователя специальной подготовки.

2. Программные комплексы, специализирующиеся на моделировании узкого круга систем одной конкретной предметной области. Недостаток, заключающийся в ограниченности применения таких программ одной предметной областью, с лихвой покрывается такими преимуществами, как легкость их освоения специалистами в данной предметной области и эффективность применения, являющаяся следствием узкой специализации.

В настоящем учебном пособии для создания компьютерных моделей использован несколько иной инструментальный подход – в качестве среды моделирования выбран табличный процессор MS Excel.

Выбор Excel в качестве инструмента программной реализации экономико-математических моделей обусловлен рядом обстоятельств. Во-первых, данный программный продукт достаточно глубоко изучается во всех вузах финансово-экономического профиля; во-вторых, он установлен во всех организациях; в-третьих, MS Excel имеет специальные программные надстройки и развитую библиотеку аналитико-расчетных функций, которые могут использоваться для решения широкого класса задач экономического анализа; в-четвертых, MS Excel обладает открытой архитектурой и при необходимости его функциональные возможности могут быть значительно расширены за счет

разработки пользовательских функций и программных надстроек; в-пятых, MS Excel интегрируется с большим числом программных продуктов, что позволяет его рассматривать как связывающее звено при разработке учебных фрагментов распределенной системы поддержки принятия решений.

Практика использования табличного процессора MS Excel в качестве среды моделирования экономических систем и процессов подтвердила не только его высокий дидактический потенциал, но и целесообразность широкого распространения такого подхода в практической деятельности экономистов-аналитиков.

Первая часть учебного пособия посвящена вопросам построения компьютерных моделей оптимизационных задач экономического анализа и адресована студентам, аспирантам, слушателям факультетов повышения квалификации, экономистам различного профиля.

В первой главе пособия приведены общие сведения о программной надстройке MS Excel "Поиск решения": рассмотрены порядок её установки, интерфейс диалоговых окон; определены её роль и место в процессе принятия экономических решений; даны методические рекомендации по корректировке математической модели задачи в случае невозможности отыскать оптимальное решение.

Вторая глава пособия посвящена вопросам разработки оптимизационных моделей задач экономического анализа. Представленные в главе модели затрагивают основные классы задач математического программирования в экономических постановках.

Третья глава пособия посвящена вопросам разработки статистических моделей задач экономического анализа. Представленные в главе модели затрагивают основные классы задач корреляционно-регрессионного анализа и анализа временных рядов в экономических постановках.

Все примеры, рассмотренные в пособии, реализованы автором в среде Microsoft Excel 2003. При апробировании этих примеров читателем возможны некоторые незначительные расхождения в получаемых результатах, что объясняется выбранным форматом соответствующих ячеек.

Остается выразить надежду, что настоящее учебное пособие поможет вам в полной мере оценить возможности табличного процессора MS Excel в решении оптимизационных и статистических задач экономического анализа и станет незаменимым помощником в работе.

Глава 1

НАДСТРОЙКА MS EXCEL "ПОИСК РЕШЕНИЯ" КАК ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЕ СРЕДСТВО ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Назначение надстройки "Поиск решения"

В своей практической деятельности экономистам-аналитикам нередко приходится сталкиваться с задачами, которые математик охарактеризовал бы как "оптимизационные задачи с наличием ограничений". В чем же заключаются отличительные особенности таких задач и каковы методы их решения? Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим несколько типовых примеров задач, принадлежащих данному классу.

Задача 1. Предприятие производит несколько видов продукции. Для производства каждого вида продукции требуется определенное количество материальных и трудовых ресурсов.

Известны ограничения на все виды ресурсов. Изготовление каждого вида продукции приносит определенную прибыль. Необходимо разработать такую производственную программу, при которой прибыль предприятия будет максимальной.

Задача 2. Компанией разрабатывается план обеспечения потребителей горюче-смазочными материалами (ГСМ). Известны запасы ГСМ в пунктах отправления и их потребности в пунктах назначения. Необходимо разработать такой план доставки ГСМ из пунктов отправления в пункты назначения, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Задача 3. Для производства продукции предприятие закупает листовую материал типовых размеров, из которого выкраиваются заготовки. Известны размеры заготовок и требуемое их количество. Необходимо так раскроить листовую материал, чтобы обеспечить минимум отходов.

Задача 4. В летно-испытательном центре проводится обучение летчиков на различных тренажерах и учебных самолетах. Стоимость

одного часа занятий на тренажерах меньше, чем на самолетах, но и уровень подготовки обучаемых при обучении на тренажерах ниже по сравнению с уровнем обучения на самолетах. Известны продолжительность программы подготовки летчиков, требуемый уровень их обученности, лимиты расхода ресурса тренажеров и учебных самолетов. Требуется составить такой план подготовки летчиков, который позволил бы добиться требуемого уровня обученности при наименьших затратах.

Задача 5. Для проведения комплексной ревизии финансово-хозяйственной деятельности одного из соединений округа создана группа инспекторов-ревизоров. Известны перечень работ, которые необходимо выполнить в процессе ревизии, ожидаемая продолжительность каждой из этих работ и распределение их между исполнителями. Требуется составить график проведения ревизии, позволяющий выполнить весь комплекс работ в возможно короткий срок.

При всей разнородности перечисленных задач каждой из них присущи следующие свойства:

- 1) наличие альтернативных решений;
- 2) наличие цели;
- 3) наличие ограничивающих факторов.

Первое свойство указывает на то, что для каждой задачи существует как минимум два варианта её решения. Решение, которое в наибольшей степени способствует достижению цели, и является оптимальным.

Второе и третье свойства определяют характерную для всех перечисленных задач их общую (каноническую) постановку, которую можно представить следующим формальным образом:

найти оптимум $F = f(x_1, \dots, x_n)$ (целевая функция задачи)

при (1.1)

$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq (=; \geq) b_i, i = 1, \dots, m$, (ограничения задачи)

$x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Ограничение $x_1, \dots, x_n \geq 0$ называется условием неотрицательности. Оно требует, чтобы переменные принимали только положительные или нулевые значения. Хотя, строго говоря, эти условия не являются обязательными, но в подавляющем большинстве случаев финансово-экономической практики они имеют место, что и обусловило их

включение в представленную модель общего вида*.

Такая общность рассмотренных задач позволяет применить для их решения близкие по своей сути математические методы, которые достаточно широко представлены в такой научной дисциплине, как исследование операций (в частности в важнейшем её разделе математического программирования).

Изучение методов математического программирования давно включено в учебные программы всех экономических вузов, однако их реальное практическое применение всегда было сопряжено с рядом серьёзных трудностей, одной из которых являлось отсутствие "под рукой" соответствующего программного обеспечения. Лишь с появлением табличного процессора Excel 5.0 и его последующих версий (Excel 7/97/2000/2002/2003) вопрос о необходимом программном обеспечении оказался решенным. Теперь с полным основанием можно говорить, что "центр тяжести" в решении оптимизационных экономических задач полностью переместился от трудоемкой разработки вычислительных процедур их решения к творческой разработке их математических и вычислительных моделей. Это стало возможным благодаря включению в состав Excel дополнительной программы-надстройки "Поиск решения"**, позволяющей моделировать и находить решения практически для всех классов оптимизационных задач экономического анализа. О том, как работать с этой надстройкой, какие задачи экономического анализа могут быть решены с её помощью, как правильно составить вычислительную модель задачи и проанализировать её решение – обо всём этом мы и расскажем Вам в настоящем пособии.

1.2. Установка надстройки "Поиск решения"

Итак, Вы создали новую или открыли существующую книгу MS Excel. Перед Вами хорошо знакомое окно – мы на это надеемся*** – активного рабочего листа. Где же находится надстройка "Поиск ре-

* В дальнейшем, если специально не оговорено, будет подразумеваться, что искомые переменные могут принимать только неотрицательные значения.

** Здесь и в дальнейшем речь будет идти о русскоязычных версиях Excel. В англоязычных версиях надстройка "Поиск решения" имеет название "Solver".

*** Тем читателям, кто раньше не работал с Excel, мы настоятельно рекомендуем первоначально ознакомиться с основными техническими приемами работы с этой программой. Это не займет много времени и значительно ускорит прочтение не только этой книги, но и многих других, посвященных рассмотрению вопросов применения Excel в финансово-экономической практике.

шения"? Для этого нам необходимо "посетить" меню *Сервис*. Здесь нас поджидают три возможных ситуации, действовать по которым надо следующим образом:

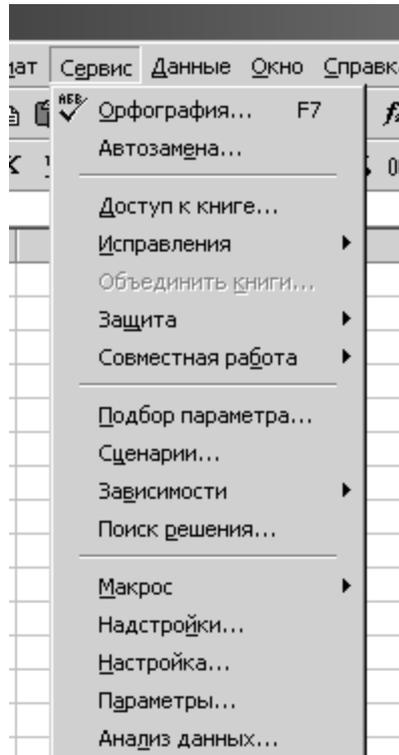


Рис. 1.1

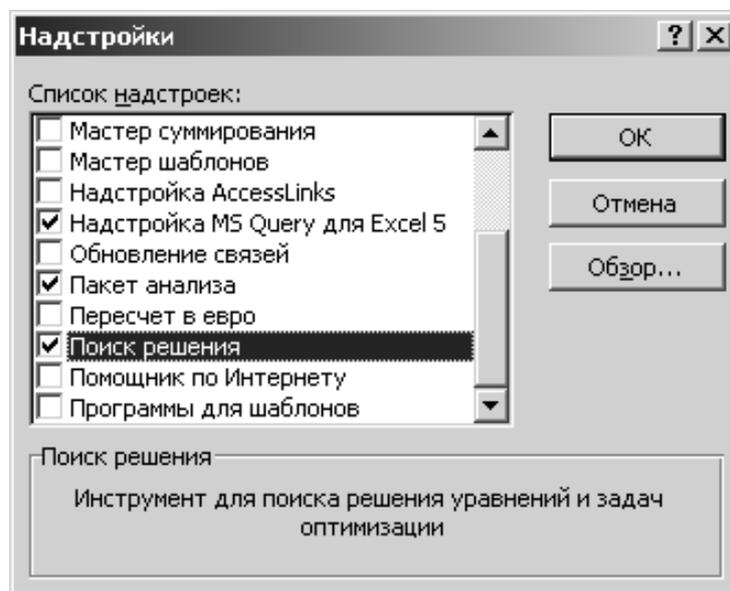


Рис. 1.2

- ситуация №1 – в меню *Сервис* присутствует команда **Поиск решения** (рис. 1.1). Это "идеальная" ситуация, достаточно только

щелкнуть указателем мыши на данной команде – и мы попадем в диалоговое окно надстройки;

- ситуация №2 – в меню **Сервис** отсутствует команда **Поиск решения**. Но пока еще рано расстраиваться, необходимо в этом же меню опуститься чуть ниже и выполнить команду **Надстройки**. Раскроется одноименное окно со списком доступных надстроек, установленных на Вашем компьютере (рис. 1.2).

В этом списке необходимо найти поле *Поиск решения*, активизировать перед ним флажок и нажать кнопку **ОК**. После этого в меню **Сервис** появится команда **Поиск решения**.

- ситуация №3 – в меню **Сервис** отсутствует команда **Поиск решения**, а в окне **Надстройки** нет поля *Поиск решения*. Это самая неприятная ситуация, так как без диска с дистрибутивом MS Office в этом случае не обойтись. Необходимо доустановить надстройку "Поиск решения" с диска.

Итак, уважаемый читатель, мы с Вами рассмотрели все возможные ситуации, связанные с установкой надстройки "Поиск решения". Если Вы её еще не установили, то поторопитесь, так как пора переходить к изучению элементов диалогового окна данной надстройки.

1.3. Диалоговое окно "Поиск решения"

Если в меню **Сервис** выбрать команду **Поиск решения**, то мы вызовем окно с одноименным названием (рис. 1.3).

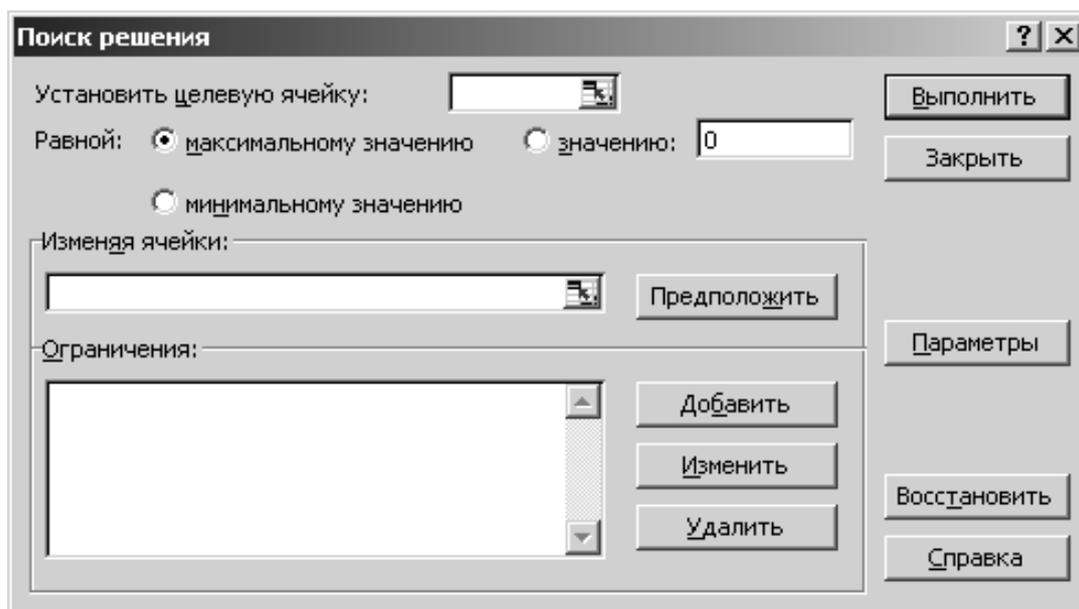


Рис. 1.3

Это окно является по существу той рабочей областью, в которой задаются параметры модели задачи, разрабатываемой пользователем на рабочем листе (о том, как разрабатывается модель оптимизации, будет рассказано ниже). Задание параметров модели задачи, а также условий и вариантов поиска решения осуществляется с помощью соответствующих элементов окна **Поиск решения** (кнопок, полей, флажков, переключателей и т.д.). В настоящем параграфе мы рассмотрим назначение этих элементов, а о том, как практически с ними работать, Вы узнаете при прочтении главы, посвященной вопросам разработки оптимизационных моделей экономических задач.

Основными элементами окна **Поиск решения**, описывающими вычислительную модель задачи, являются:

1. Поле *Установить целевую ячейку* и связанный с ним переключатель *Равной: максимальному значению / минимальному значению / значению* (с указанием конкретного значения в соответствующем поле). Поле *Установить целевую ячейку* указывает на ячейку, в которой содержится формула целевой функции модели. Переключатель *Равной* указывает на направление оптимизации (максимизация или минимизация) или устанавливает строго определенное значение, которое должна принять целевая функция. На практике обычно решаются задачи максимизации или минимизации.

В канонической постановке задачи оптимизации (1.1) полю *Установить целевую ячейку* и переключателю *Равной* соответствует выражение

$$\text{найти оптимум } F = f(x_1, \dots, x_n).$$

2. Поле *Изменяя ячейки*. Это поле указывает на диапазон изменяемых в модели ячеек. Вместе с ним связана кнопка *Предположить*, которую можно использовать для автоматического ввода с помощью Excel диапазона изменяемых ячеек. Однако, как показывает практика, всё же Excel иногда "ошибается" в решении этого вопроса, предлагая не совсем правильный диапазон ячеек. Поэтому мы рекомендуем самому вводить этот диапазон или внимательно проверять его после автоматического ввода с помощью кнопки *Предположить*.

В канонической постановке задачи оптимизации (1.1) полю *Изменяя ячейки* соответствуют переменные x_1, \dots, x_n .

3. Поле *Ограничения*. Это поле указывает на ячейки, в которых содержатся формулы ограничений модели. Вместе с ним связаны кнопки *Добавить*, *Изменить*, *Удалить*, которые используются для

работы с ограничениями модели в соответствии со своими названиями.

При нажатии кнопки *Добавить* вызывается окно **Добавление ограничения** (рис. 1.4), а при нажатии кнопки *Изменить* – **Изменение ограничения** (по интерфейсу это окно аналогично окну **Добавление ограничения**).

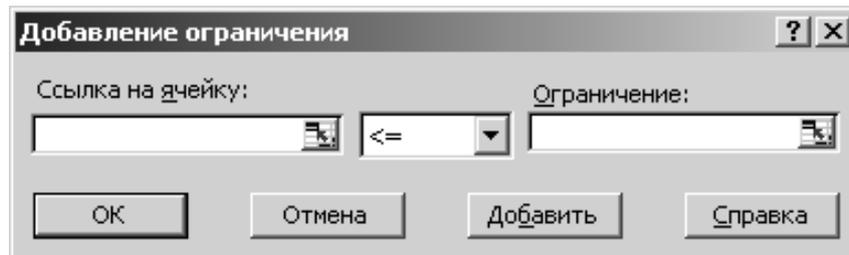


Рис. 1.4

В поле *Ссылка на ячейку* вводится адрес ячейки, содержащей левую часть уравнения (неравенства), а в поле *Ограничение* – адрес ячейки, содержащей правую часть уравнения (неравенства). В среднем поле выбирается знак ограничения, а также, если необходимо, указывается требование целочисленности переменных (для задач целочисленного программирования) или требование двоичности переменных (для задач булевого программирования).

В канонической постановке задачи оптимизации (1.1) полю *Ограничения* соответствуют выражения

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq (=; \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

Замечание. В поле *Ограничения* можно не задавать условие неотрицательности $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Для задания этого условия достаточно активизировать флажок *Неотрицательные значения* в окне **Параметры поиска решения** (см. п. 1.4).

Кроме того, в состав окна **Поиск решения** входит пять кнопок:

- кнопка **Выполнить** запускает вычислительную процедуру поиска оптимального решения;
- кнопка **Заккрыть** закрывает окно **Поиск решения**;
- кнопка **Параметры** вызывает окно **Параметры поиска решения**;
- кнопка **Восстановить** очищает окно **Поиск решения**;
- кнопка **Справка** вызывает раздел справочной системы MS Ex-

cel с краткой информацией об элементах диалогового окна **Поиск решения**.

В большинстве практических случаев для составления и решения вычислительных моделей задач достаточно использовать только вышеописанные элементы окна **Поиск решения**. Однако бывают ситуации, когда для поисковой процедуры необходимо указать некоторые дополнительные параметры. Для этого служит диалоговое окно **Параметры поиска решения**.

1.4. Диалоговое окно "Параметры поиска решения"

Окно **Параметры поиска решения** вызывается при нажатии кнопки **Параметры** в окне **Поиск решения**. На рис. 1.5 окно **Параметры поиска решения** показано со значениями элементов окна, установленных по умолчанию. Данные значения подходят для большинства практических задач и не требуют своего изменения. Дадим краткую характеристику элементов окна **Параметры поиска решения**.

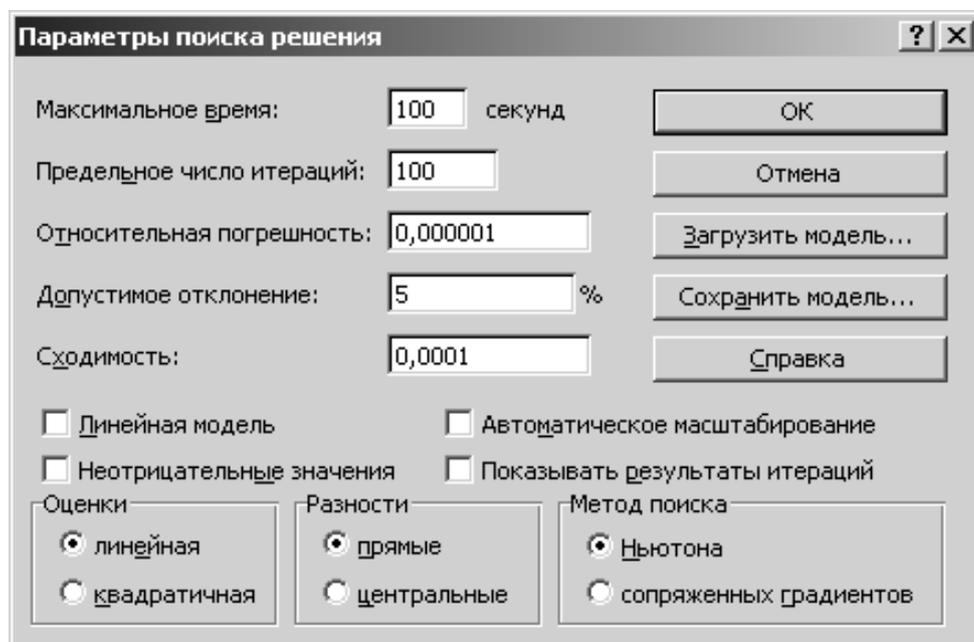


Рис. 1.5

1. Поле *Максимальное время* служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В это поле можно ввести время (в секундах), не превышающее 32767. Значение 100, исполь-

зуемое по умолчанию, подходит для решения большинства практических задач.

2. Поле *Итерации* служит для управления временем решения задачи, путем ограничения числа промежуточных вычислений (итераций). Значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства практических задач.

3. Поле *Точность* служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Значение 0.000001, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства практических задач. Более высокая точность увеличивает время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

4. Поле *Допустимое отклонение* служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения (в %) в задачах целочисленного программирования. Значение 5%, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства практических задач. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

5. Поле *Сходимость* служит для задания величины относительного изменения значения в целевой ячейке за последние пять итераций. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле *Сходимость*, поиск прекращается. Поле *Сходимость* применяется только к задачам нелинейного программирования. Значение 0.001, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства практических задач. Лучшая сходимость требует больше времени на поиск оптимального решения.

6. Флажок *Линейная модель* служит для ускорения поиска решения задач линейного программирования или линейной аппроксимации задач нелинейного программирования.

7. Флажок *Неотрицательные значения* служит для задания условия неотрицательности $x_1, \dots, x_n \geq 0$ для тех переменных, для которых оно не было установлено в поле *Ограничения* окна **Поиск решения**.

8. Флажок *Автоматическое масштабирование* служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине – например, максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

9. Флажок *Показывать результаты итераций* служит для приостановки поиска решения для просмотра результатов отдельных итераций.

10. Переключатель *Оценка* служит для указания метода экстраполяции, используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске. Позиция *Линейная (оценка)* используется для линейной экстраполяции, а позиция *Квадратичная (оценка)* – для квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.

11. Переключатель *Разности* служит для указания метода численного дифференцирования, который используется для вычисления частных производных целевых и ограничивающих функций. Позиция *Прямые (производные)* используется для нахождения производных гладких непрерывных функций, а позиция *Центральные (производные)* – для нахождения производных разрывных функций.

12. Переключатель *Метод поиска* служит для выбора алгоритма оптимизации. Позиция (*метод*) *Ньютона* служит для реализации квазиньютоновского метода, в котором запрашивается больше памяти, но выполняется меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов. Позиция (*метод*) *Сопряженных градиентов* служит для реализации метода сопряженных градиентов, в котором запрашивается меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно велика и необходимо экономить память.

13. Кнопка **Загрузить модель** служит для вызова диалогового окна **Загрузить модель**, в котором можно задать ссылку на область ячеек, содержащих загружаемую модель.

14. Кнопка **Сохранить модель** служит для вызова диалогового окна **Сохранить модель**, в котором можно задать ссылку на область ячеек, предназначенную для хранения модели оптимизации. Данный вариант предусмотрен для хранения на листе более одной модели оптимизации – первая модель сохраняется автоматически.

15. Кнопка **ОК** служит для закрытия окна **Параметры поиска решения** с сохранением изменений.

16. Кнопка **Отмена** служит для закрытия окна **Параметры поиска решения** без сохранения внесенных изменений.

Как уже было сказано выше, установленные по умолчанию значения элементов окна **Параметры поиска решения** подходят для решения большинства практических задач и не требуют своего изме-

нения. Те случаи, в которых требуется изменить какое-либо значение, принятое по умолчанию, будут оговариваться нами дополнительно.

1.5. Технология принятия экономических решений с использованием надстройки "Поиск решения"

В наиболее общем виде процесс принятия экономических решений представляет собой процедуру преобразования исходной экономической информации (информации о текущих значениях экономических параметров объекта управления) в выходную экономическую информацию (информацию о желаемых значениях экономических параметров объекта управления), на основании которой вырабатывается управляющее воздействие.

Экономическое решение может быть формальным и творческим. Принято считать, что если преобразование экономической информации выполняется с помощью математических моделей, то выработанное решение считается формальным. Если решение появляется в результате скрытой работы интеллекта лица, принимающего решение (ЛПР), то оно – творческое.

Такое деление в достаточной степени условно, поскольку чисто формальных или чисто творческих решений, как правило, не существует. Если решение вырабатывается с помощью математической модели, то знания, опыт и интуиция человека (элементы творчества) используются при разработке модели или анализе полученного решения. Если же основным инструментом выработки решения является интеллект человека, то и здесь формальные методы скрыто присутствуют в его знаниях и опыте.

В соответствии с подразделением на творческие и формальные все множество проблем, сопутствующих любому процессу принятия экономических решений, условно можно разделить на два класса: экономические проблемы концептуального характера и экономические проблемы формально-математического (или вычислительного) характера.

К концептуальным экономическим проблемам относятся сложные логические проблемы, которые невозможно решить с применением только формально-математических методов и ЭВМ. Часто эти проблемы уникальны в том смысле, что они решаются впервые и не имеют прототипов в прошлом. При решении таких проблем наибольший вес имеют не формально-математические методы, а эруди-

ция, опыт и интуиция лиц, принимающих решение. Формальные методы здесь также очень важны, но они играют вспомогательную роль как средство, облегчающее и организующее эвристическую деятельность ЛПР. В настоящее время в науке уделяется серьезное внимание разработке формализованных процедур решения концептуальных проблем. Решение этих вопросов составляет содержание так называемой неформальной теории принятия решений, представляющей собой новейшее направление общей теории принятия решений. В нашем учебном пособии мы не будем заниматься рассмотрением этих вопросов*, а сосредоточим свое внимание на решении экономических задач в рамках формальной, или, другими словами, количественной, теории принятия решений.

В настоящее время ещё не выработана (да и вряд ли, вообще, может быть выработана) единая технология процесса принятия экономических решений, однако определенная тенденция в этом направлении имеется. В работах многих авторов по исследованию операций и системному анализу содержатся рекомендации по формированию состава и последовательности действий в процессе принятия решений. На основании их анализа и обобщения можно предположить следующий состав "типового" процесса принятия экономических решений:

- 1) предварительное формулирование экономической проблемы;
- 2) определение целей действия и выбор соответствующих критериев оптимальности;
- 3) выявление и формулирование ограничивающих условий;
- 4) составление возможно более полного списка альтернатив и предварительный их анализ с целью отбрасывания явно неэффективных;
- 5) сбор необходимой информации и прогнозирование изменений значений экономических параметров объекта управления в будущем;
- 6) разработка постановки задачи;
- 7) разработка математической модели задачи;
- 8) анализ и выбор метода решения задачи и разработка алгоритма решения;
- 9) оценка альтернатив и выбор оптимальной альтернативы;
- 10) анализ оптимальной альтернативы;
- 11) принятие решения ответственным лицом;
- 12) выполнение решения и оценка результатов.

* Некоторые аспекты неформальной теории принятия решений рассмотрены в п. 2.2.

Процесс принятия экономических решений является сложной итерационной процедурой, структурная схема которой представлена на рис. 1.6.

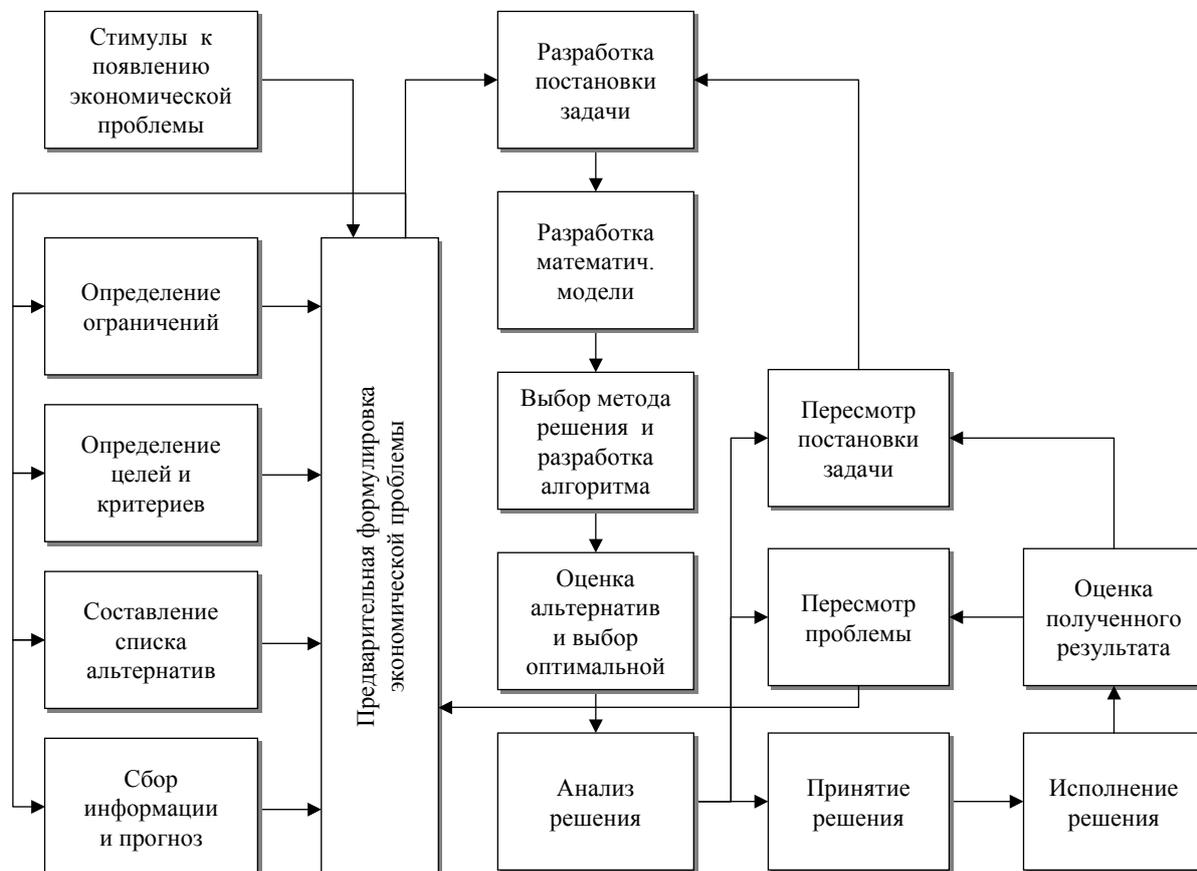


Рис. 1.6

В каких же блоках представленной схемы процесса принятия экономического решения можно прибегнуть к помощи надстройки "Поиск решения" MS Excel? Таких блоков три: "Выбор метода решения и разработка алгоритма", "Оценка альтернатив и выбор оптимальной", "Анализ решения".

Первые два блока – "Выбор метода решения и разработка алгоритма", "Оценка альтернатив и выбор оптимальной" – реализованы в виде оптимизационных методов "Поиска решения". Третий блок – "Анализ решения" – реализован в виде процедуры генератора отчетов, описанной в п. 2.1 и позволяющей проводить комплексный анализ полученного решения по результатам, устойчивости и пределам.

Но прежде чем при принятии экономического решения прибегнуть к помощи MS Excel, необходимо предварительно разработать

вычислительную модель задачи. Данный блок занял бы в схеме процесса принятия экономического решения промежуточное положение между блоками "Разработка математической модели" и "Принятие решения". Рассмотрим более подробно участок схемы между указанными блоками при условии, что решение принимается с использованием надстройки "Поиск решения" MS Excel.

1.6. Последовательность действий при решении оптимизационных экономических задач с использованием надстройки "Поиск решения"

Как уже отмечалось, надстройка MS Excel "Поиск решения" может применяться для решения оптимизационных задач экономического анализа, что в общей схеме процесса принятия экономических решений может быть представлено фрагментом от блока "Разработка математической модели" до блока "Принятие решения" (рис. 1.6). Данный фрагмент в детализированном виде представлен на рис. 1.7.

С точки зрения пользователя MS Excel наибольший интерес на рис. 1.7 представляют прямоугольники с пунктирной линией. Таким образом обозначены на схеме сообщения, выдаваемые надстройкой "Поиск решения" в диалоговом окне **Результаты решения задачи** (рис. 1.8 – 1.10).

Так, если "Поиск решения" выдает сообщение "Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены" (рис. 1.8), то все в порядке, можно приступать к следующему этапу – анализу оптимального решения.

Ну а что делать, если выдано сообщение "Поиск не может найти подходящего решения" (рис. 1.10) или сообщение "Значения целевой ячейки не сходятся" (рис. 1.9)? "Надо скорректировать модель задачи или ввести дополнительные ограничения", – ответите Вы, посмотрев на рисунок 1.7. Да, действительно это так, но как это сделать осмысленно, а не наугад?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать причину выдаваемых сообщений. И здесь, уважаемый читатель, опять-таки подтверждается истина, что нет ничего практичнее хорошей теории, так как прояснить суть данного вопроса позволяют следующие теоретические примеры из линейного программирования.

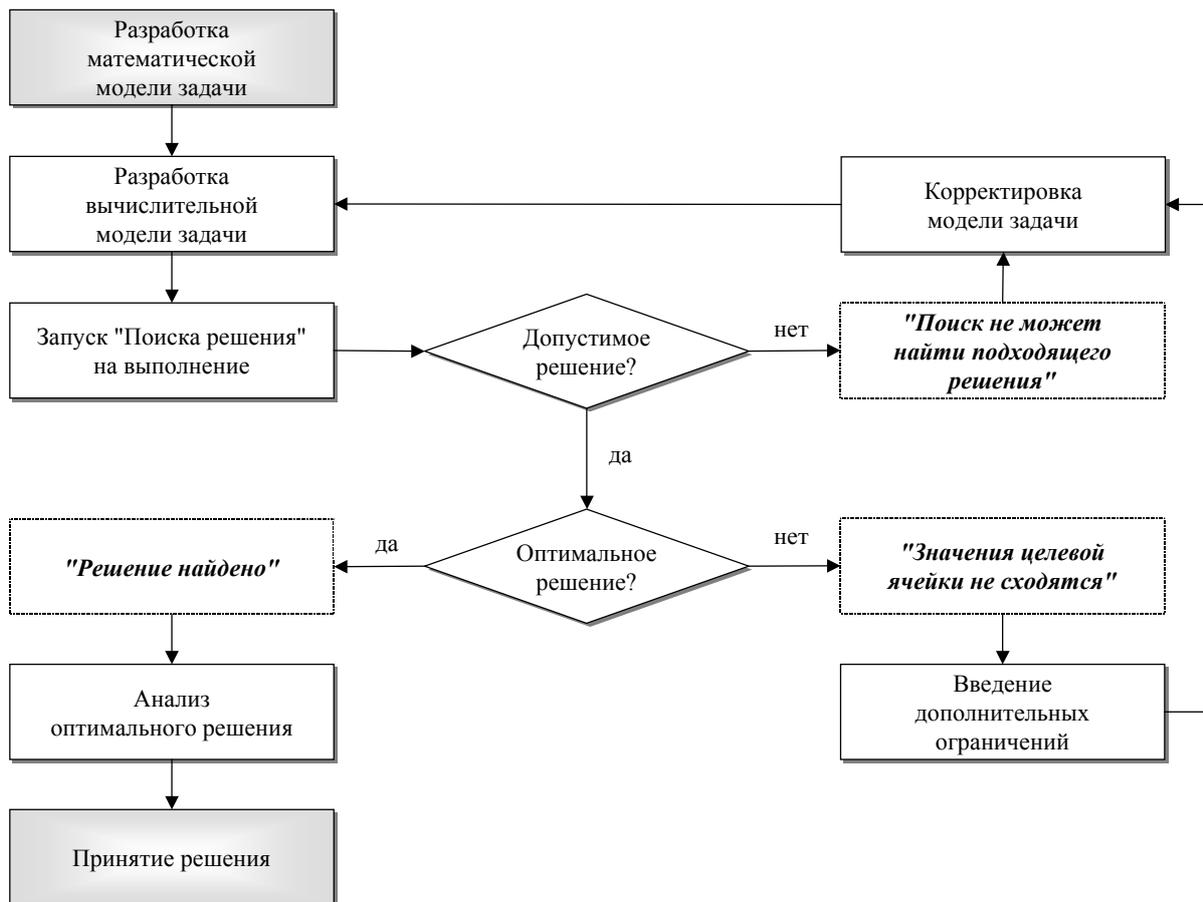


Рис. 1.7

Причину выдачи сообщения *"Поиск не может найти подходящего решения"* проиллюстрируем на примере (1.2):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 2, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Систему (1.2) представим графически (рис. 1.11). На рисунке видно, что нет таких значений x_1 и x_2 , которые удовлетворяли бы системе (1.2). Значит, в данном примере область допустимых решений отсутствует. Про такую систему говорят, что ограничения несовместимы. К сожалению, это очень часто встречается на практике, а не только теоретически возможный вариант.

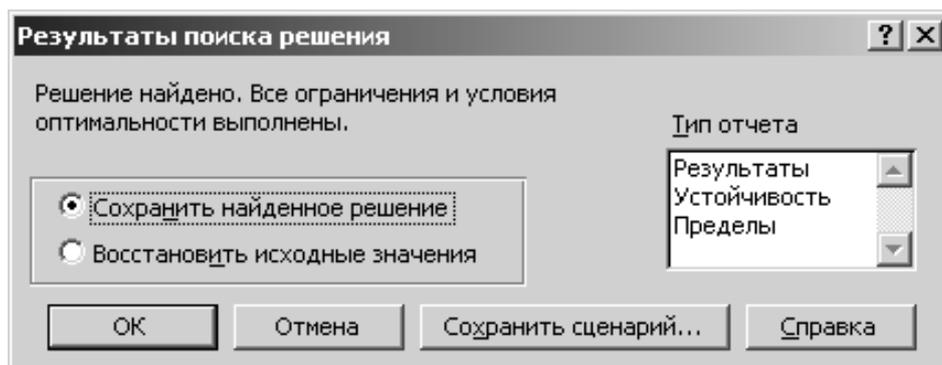


Рис. 1.8

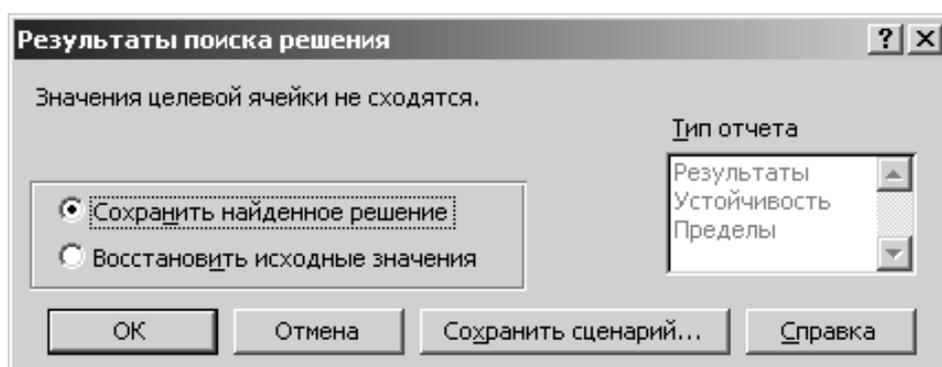


Рис. 1.9

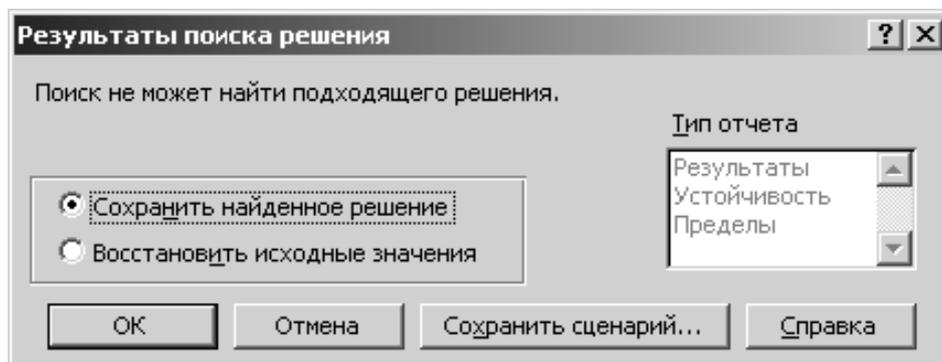


Рис. 1.10

Для преодоления несовместимости необходимо откорректировать математическую модель задачи. Например, в системе (1.2) одним из возможных вариантов является изменение ограничения $x_1 \geq 2$ на ограничение $x_1 \geq 0$. В этом случае область допустимых решений систе-

мы (1.2) будет представлять собой треугольник, ограниченный прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_2 = 1 - x_1$ (рис. 1.12).

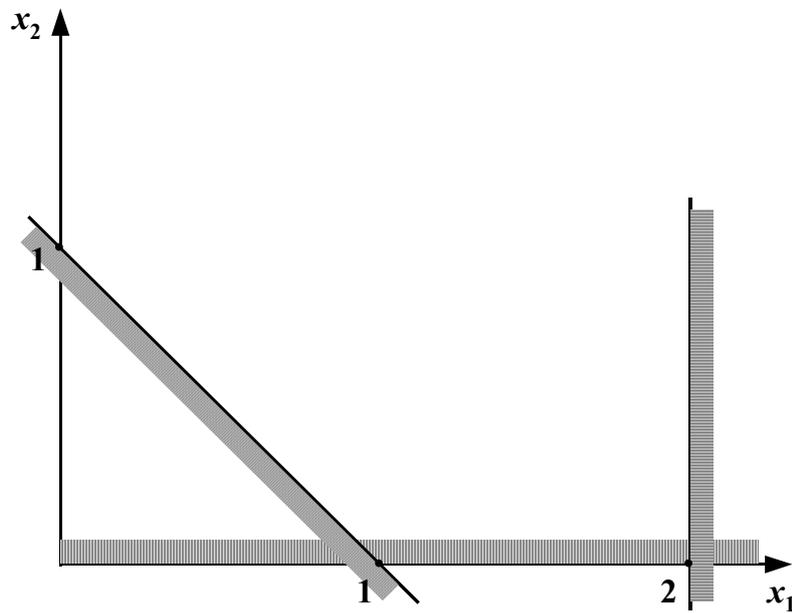


Рис. 1.11

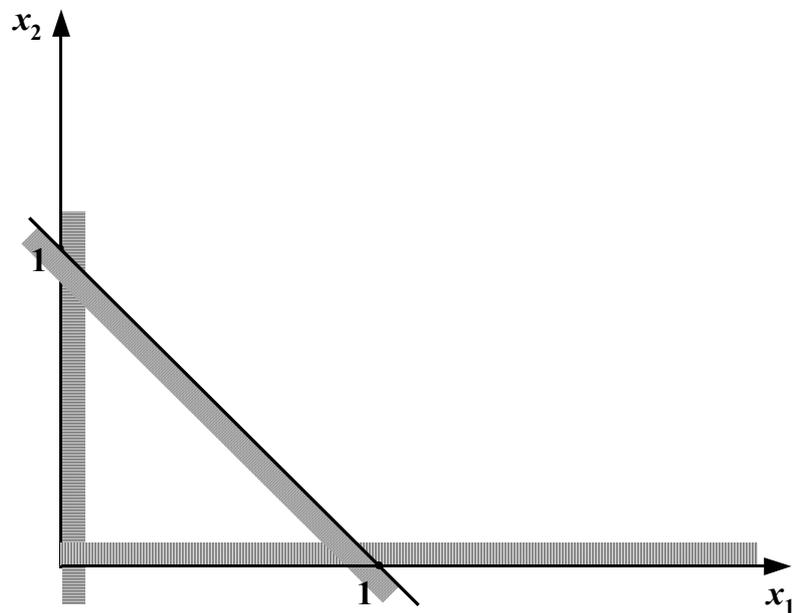


Рис. 1.12

Причину выдачи сообщения "Значения целевой ячейки не сходятся" проиллюстрируем на примере (1.3):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Эта система показана на рис. 1.13, из которого видно – область допустимых решений не ограничена сверху. В таком случае при максимизации целевой функции (например, $F = 2x_1 + 3x_2$) решение получено быть не может, т.к. целевая функция, как и область допустимых решений, не ограничена сверху.

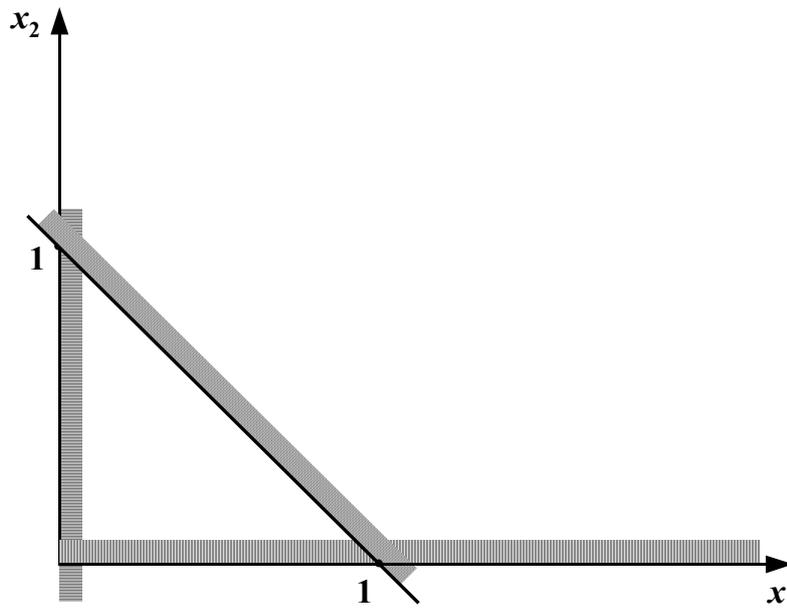


Рис. 1.13

Неограниченность целевой функции – это следствие ошибки в математической модели. Чтобы избежать таких ошибок, надо выполнять следующие правила:

1. При максимизации целевой функции она должна быть ограничена сверху с помощью ограничений, при этом модель с точки зрения содержания должна иметь вид:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \max, \\ F &\leq b_i. \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. При минимизации целевой функции она соответственно должна быть ограничена снизу, как это показано в (1.5):

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \min, \\ F &\geq b_i. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Итак, уважаемый читатель, вот Вы и получили тот минимум теоретических сведений, который необходимо знать при решении оптимизационных задач экономического анализа с использованием надстройки MS Excel "Поиск решения". Но вместе с тем Вы, наверное, и сами это чувствуете, что в нашем изучении остался один очень существенный пробел – мы не показали примеры практического решения задач. А это – все равно что учиться плавать на берегу. Невозможно научиться решать задачи, не решая их. Поэтому, не откладывая в долгий ящик, советуем Вам переходить к изучению следующей главы.

Глава 2

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Настоящая глава предваряется рассмотрением оптимизационных экономических задач, относящихся к классу задач линейного программирования. Это объясняется не столько желанием следовать сложившейся традиции построения книг по исследованию операций, сколько тем фактом, что линейное программирование послужило основой для разработки других методов математического программирования – квадратичного, выпуклого, целочисленного, геометрического и др. Важно и то, что применение линейного программирования привело к значительным успехам в решении широкого круга задач в различных предметных областях, в том числе и в сфере экономики.

Параграф 2.1, посвященный решению задач линейного программирования, отличается наибольшей подробностью и детализацией изложения материала. В последующих параграфах, в целях избежания излишнего повторения, некоторые моменты решения оптимизационных задач будут представлены достаточно кратко или вообще упущены. Исходя из этого, советуем читателю особенно внимательно изучить параграф, посвященный решению задач линейного программирования, что позволит достаточно легко разобраться со всем последующим материалом.

2.1. Компьютерные модели задач линейного программирования

В этом параграфе рассматривается построение математических и вычислительных моделей задач линейного программирования, их решение и анализ с помощью надстройки "Поиск решения". При изучении материала особое внимание следует обратить на допущения, принятые при построении моделей, а также на их анализ после нахождения оптимального решения. Рассматривая конкретные примеры, старайтесь делать обобщающие выводы о применении MS Excel для решения оптимизационных задач экономического анализа.

2.1.1. Задача формирования оптимальной производственной программы предприятия

Содержательная постановка задачи

Предприятие "Оргсинтез" выпускает специальные модификаторы (добавки) к моторным маслам. Модификаторы производятся в двух вариантах – З и Л – для зимнего и летнего типа масел. Для производства модификаторов используются два исходных ингредиента – И1 и И2, максимально возможные суточные запасы которых составляют 6 и 8 тонн соответственно. Расходы ингредиента И1 и ингредиента И2 на 1 т соответствующих модификаторов приведены в нижеследующей таблице.

Ингредиент	Расход ингредиентов (в тоннах) на тонну модификатора		Максимально возможный запас, т
	модификатор З	модификатор Л	
И1	1	2	6
И2	2	1	8

На предприятии разрабатывается план производства модификаторов на осенний период. Для этого маркетинговым отделом предприятия был проанализирован спрос на модификаторы за последние годы. В результате проведенного анализа было установлено, что в осенний период спрос на летний модификатор Л никогда не превышает 2 тонн в сутки, причем объемы его продаж всегда превышают объемы продаж зимнего модификатора З, но не более, чем на 1 т.

Цена летнего модификатора установлена в размере 20 у.е. за тонну, цена зимнего модификатора – 30 у.е. за тонну.

Какое количество модификаторов каждого вида должно производить предприятие в сутки, чтобы ожидаемый доход от реализации продукции был максимальным?

Математическая модель задачи

Процесс построения математической модели задачи можно начать с ответов на три следующих вопроса:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель?

2. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному решению задачи?

Конструктивный путь формулировки ответов на поставленные вопросы состоит в том, чтобы словесно выразить суть проблемы. Рассматриваемую ситуацию можно охарактеризовать следующим образом.

Предприятию "Оргсинтез" требуется определить *объемы производства* (в тоннах) каждого из модификаторов, максимизирующие доход (в у. е.) от реализации продукции, с учетом *ограничений* на спрос и расход ингредиентов.

Трудность построения математической модели заключается в идентификации переменных и последующем представлении цели и ограничений в виде математических функций этих переменных. В рассматриваемом случае мы имеем следующее.

Переменные. Так как нужно определить объемы производства каждого вида модификатора, переменными в модели являются:

x_1 – суточный объем производства зимнего модификатора З (в тоннах);

x_2 – суточный объем производства летнего модификатора Л (в тоннах).

Целевая функция. Так как стоимость 1 т модификатора З равна 30 у.е., суточный доход от его производства составит $30x_1$ у.е. Аналогично доход от реализации x_2 тонн модификатора Л составит $20x_2$ у.е. в сутки. При допущении независимости объемов сбыта каждого из модификаторов общий доход равен сумме двух слагаемых – дохода от продажи модификатора З и дохода от продажи модификатора Л.

Обозначив общий доход через F , можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить значения x_1 и x_2 , максимизирующие величину общего дохода $F = 30x_1 + 20x_2$.

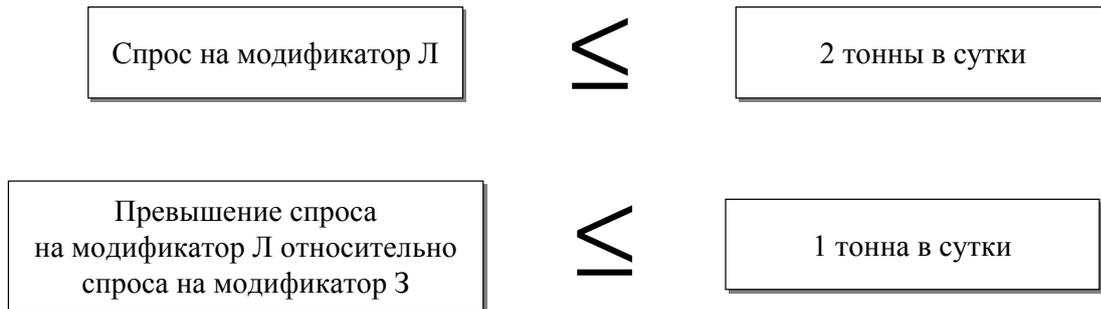
Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на расход ингредиентов и спрос на производимые модификаторы. Ограничение на расход ингредиентов можно записать следующим образом:

Расход ингредиента для производства обоих видов модификаторов	≤	Максимально возможный запас данного вида ингредиента
---	---	--

Это приводит к следующим двум ограничениям (см. условия задачи):

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 6 \text{ (для ингредиента И1),} \\2x_1 + x_2 &\leq 8 \text{ (для ингредиента И2).}\end{aligned}$$

Ограничения на величину спроса на продукцию имеют вид:



Математически эти ограничения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}x_2 &\leq 2 \text{ (максимальная величина спроса на модификатор Л),} \\x_2 - x_1 &\leq 1 \text{ (соотношение величин спроса на модификатор Л и модификатор З).}\end{aligned}$$

Неявное (т. е. "подразумеваемое") ограничение заключается в том, что объемы производства продукции не могут принимать отрицательных значений, т. е. быть меньше нуля. Чтобы предотвратить получение таких недопустимых решений, потребуем выполнения условия *неотрицательности* переменных, т. е. введем ограничения на их знак:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0 \text{ (объем производства модификатора З),} \\x_2 &\geq 0 \text{ (объем производства модификатора Л).}\end{aligned}$$

Итак, математическую модель задачи можно записать следующим образом:

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad (2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \quad (3)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1, \quad (4) \quad (2.1)$$

$$x_2 \leq 2, \quad (5)$$

$$x_1 \geq 0, \quad (6)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (7)$$

Разработанная математическая модель (2.1) является основой для построения вычислительной (компьютерной) модели задачи.

Вычислительная модель задачи

Под вычислительной моделью задачи будем понимать совокупность форм её представления на рабочем листе и в диалоговом окне **Поиск решения** MS Excel. В соответствии с данным определением можно выделить два основных этапа в процессе разработки вычислительной модели задачи.

Этап 1. Разработка вычислительной модели задачи на рабочем листе.

Данный этап является наиболее творческим в процессе разработки вычислительной модели задачи. Поэтому, как и для любого другого творческого процесса, для данного этапа не существует каких-то определенных правил или инструкций по его реализации. В зависимости от целей разработки модели, знаний и "технологических" навыков пользователя, а также от его склонности к представлению информации в той или иной форме, вычислительная модель задачи на рабочем листе может выглядеть по-разному. Вместе с тем, опираясь на определенный практический опыт в разработке таких моделей, мы все же дадим некоторые рекомендации по их построению. Эти рекомендации могут быть как приняты, так и не приняты "на вооружение" читателем, однако, по нашему мнению, ознакомиться с ними будет все-таки полезно, так как разработанные на их основе модели обладают, как нам кажется, достаточной понятностью, определенной наглядностью и позволяют быстро и безошибочно составить в последующем вычислительную модель задачи в диалоговом окне **Поиск решения**.

Вычислительная модель рассматриваемой задачи до нахождения оптимального решения представлена на рис. 2.1.

Вначале охарактеризуем структуру представленной модели, а затем рассмотрим содержимое её ячеек.

Во-первых, модель представляет собой таблицу, состоящую из двух основных частей: *Значения переменных и параметров модели и Уравнения (неравенства)*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Значения переменных и параметров модели			Уравнения (неравенства)			
2	Наименование переменных и параметров	Модификатор З	Модификатор Л	Левая часть	Знак	Правая часть	№ в ММЗ
3	Оптимальное значение						
4	Нижняя граница	0		0,00	>=	0	(6)
5			0	0,00	>=	0	(7)
6	Верхняя граница	нет огранич.				нет огранич.	
7			2	0,00	<=	2	(5)
8	Разность спроса на модификаторы			0,00	<=	1	(4)
9	Расход ингредиента И1	1	2	0,00	<=	6	(2)
10	Расход ингредиента И2	2	1	0,00	<=	8	(3)
11	Стоимость модификатора	30	20	0,00	→	max	(1)

Рис. 2.1

Первая часть таблицы служит для ввода исходных данных (параметров модели), а также для резервирования диапазона ячеек, в которых будут рассчитываться оптимальные значения искомым переменных (в нашем случае x_1 и x_2). На последний аспект обращаем Ваше особое внимание, так как он играет ключевую роль при составлении вычислительной модели задачи. На рис. 2.1 данный диапазон представлен ячейками В3 и С3.

Обратим также внимание и на то, как задано условие неотрицательности (нижняя граница) переменных x_1 и x_2 . В представленной модели условие неотрицательности указано в явном виде (строки 4 и 5 на рабочем листе), что, вообще-то, делать совершенно необязательно. Для этого достаточно активизировать флажок *Неотрицательные значения* в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 1.5). В последующих примерах мы так и будем делать. Те же случаи, когда для искомым переменных необходимо задать другие нижние границы, мы будем оговаривать дополнительно. Однако заметим, такие случаи в задачах экономического анализа встречаются достаточно редко.

Если условие неотрицательности переменных установлено в окне **Параметры поиска решения**, то нет необходимости его дублировать

в вычислительной модели задачи на рабочем листе. Например, в рассматриваемой модели в этом случае можно было бы безболезненно удалить строки 4 и 5.

Также нет необходимости вводить в вычислительную модель задачи и строки для верхних границ переменных, если последние сверху не ограничены. В рассматриваемой модели такое ограничение существует только для переменной x_2 ($x_2 \leq 2$), поэтому для неё и указана верхняя граница в ячейке C7. Переменная x_1 сверху не ограничена, поэтому в ячейке B6 введено "нет ограничений" (строку 6 вообще можно удалить).

Дальше следует строка 8, характеризующая разность спроса на модификаторы. Эта строка заполняется только во второй части таблицы, так как в первой части (ячейки B8:C8) она не имеет физического смысла (это *разность спроса*, а не *спрос* на отдельные модификаторы). Ограниченный спрос на модификатор Л мы уже ввели в модель как допустимую верхнюю границу переменной x_2 (ячейка C7).

Остальные ячейки в первой части таблицы (диапазон B6:C11) заполняются исходными данными, которые присутствуют в левой части уравнений (неравенств) математической модели задачи.

После заполнения первой части таблицы переходим к заполнению второй части. Вторая часть таблицы – *Уравнения (неравенства)* – представляет по существу математическую модель задачи, записанную "в терминологии" MS Excel. Сразу же заметим, что в последнем столбце № в ММЗ указаны номера соответствующих уравнений (неравенств) в математической модели задачи.

По своему строению вторая часть таблицы соответствует конструкции математического уравнения (неравенства), т. е. имеет правую и левую части, разделенные знаком равенства (или неравенства).

В правый диапазон ячеек (столбец F – *Правая часть*) введены значения в соответствии с математической моделью задачи. В средний диапазон ячеек (столбец E – *Знак*) введены знаки неравенств. В левый диапазон ячеек (столбец D – *Левая часть*) введены формулы, соответствующие левым частям уравнений (неравенств) математической модели, а именно:

- ячейка D4 содержит формулу =B3. А так как ячейка B3 отведена под переменную x_1 , то в ячейках D4:F4 будет "записано" выражение $x_1 \geq 0$, соответствующее неравенству (6) в математической модели задачи;

- ячейка D5 содержит формулу =C3 (соответственно в ячейках D5:F5 "записано" неравенство 7: $x_2 \geq 0$);

- ячейка D7 содержит формулу =C3 (соответственно в ячейках D7:F7 "записано" неравенство 5: $x_2 \leq 2$);
- ячейка D8 содержит формулу =C3-B3 (соответственно в ячейках D8:F8 "записано" неравенство 4: $-x_1 + x_2 \leq 1$);
- ячейка D9 содержит формулу =СУММПРОИЗВ(B9:C9;B3:C3) (соответственно в ячейках D9:F9 "записано" неравенство 2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$);
- ячейка D10 содержит формулу =СУММПРОИЗВ(B10:C10;B3:C3) (соответственно в ячейках D10:F10 "записано" неравенство 3: $2x_1 + x_2 \leq 8$);
- ячейка D11 содержит формулу целевой функции =СУММПРОИЗВ(B11:C11;B3:C3) (соответственно в ячейках D11:F11 "записано" выражение 1: $30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$).

Таким образом, мы составили вычислительную модель задачи на рабочем листе. Следующим этапом является её разработка в диалоговом окне **Поиск решения**. Покажем, как это теперь легко и, главное, безошибочно можно сделать, используя составленную нами модель на рабочем листе.

Этап 2. Разработка вычислительной модели задачи в диалоговом окне **Поиск решения**.

Находясь на рабочем листе с разработанной вычислительной моделью задачи, вызовем на выполнение надстройку "Поиск решения". Перед нами появится одноименное диалоговое окно (рис. 1.3), подробно разобранное нами в первой главе. Покажем теперь, как надо заполнить это окно, чтобы решить рассматриваемую задачу.

Во-первых, в поле *Установить целевую ячейку* необходимо ввести ссылку на ячейку, в которой будет рассчитываться значение целевой функции. Такой ячейкой на рабочем листе является ячейка D11, в которой заключена формула расчета выручки предприятия. Так как выручку необходимо максимизировать, то и переключатель *Равной* необходимо установить в положение *максимальному значению*. При этом заметим, что задание ссылки на ячейку возможно следующими тремя технологическими приемами:

- прием 1 – в поле *Установить целевую ячейку* непосредственно с клавиатуры вводится ссылка на ячейку D11;
- прием 2 – установить курсор в поле *Установить целевую ячейку* и щелкнуть мышью на ячейке D11 на рабочем листе. Этот прием удобно использовать, если окно занимает небольшую площадь экрана и позволяет обращаться к ячейкам рабочего листа;

• *прием 3* – щелкнуть мышью по кнопке с красной стрелочкой, расположенной в конце поля *Установить целевую ячейку*. Окно **Поиск решения** временно свернется в узкую полоску, предоставив тем самым свободный обзор ячеек рабочего листа (рис. 2.2). После этого щелкнуть мышью по нужной ячейке и нажать в конце поля кнопку с красной стрелочкой, в результате чего окно **Поиск решения** восстановит прежний вид с введенной в него ссылкой на целевую ячейку. Этот прием удобно использовать, если окно занимает значительную площадь экрана и не позволяет обращаться к ячейкам рабочего листа.



Рис. 2.2

Описанные приемы задания ссылок на ячейки имеют место и для всех других полей, имеющих в правом конце кнопку с изображением красной стрелки. Использование того или иного приема зависит от конкретной ситуации и предпочтений, отдаваемых пользователем тому или иному приему ввода информации.

Во-вторых, после заполнения поля *Установить целевую ячейку* заполняется поле *Изменяя ячейки*. В это поле вводится ссылка на диапазон ячеек, в которых будут рассчитываться значения искомым переменных. Для рассматриваемой задачи такой диапазон образуют ячейки В3:С3, в которые будут помещены значения переменных x_1 и x_2 .

Напомним, что вместе с полем *Изменяя ячейки* связана кнопка *Предположить*, которую можно использовать для автоматического ввода диапазона изменяемых ячеек. Однако, как показывает практика, Excel иногда "ошибается" в решении этого вопроса, предлагая не совсем правильный диапазон ячеек. Поэтому мы рекомендуем самому вводить этот диапазон или внимательно проверять его после автоматического ввода с помощью кнопки *Предположить*.

Третьим полем, подлежащим заполнению в окне **Поиск решения**, является поле *Ограничения*. Как показывает практика, при заполнении именно этого поля чаще всего и возникают ошибки, особенно когда в модель входит значительное число уравнений (неравенств). Избежать этих ошибок нам поможет правая часть вычислительной модели задачи на рабочем листе *Уравнения (неравенства)*.

При нажатии кнопки *Добавить* появляется диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 1.4), которое состоит из трех полей, со-

ответствующих ячейкам столбцов D (*Левая часть*), E (*Знак*) и F (*Правая часть*) на рабочем листе. Ввод информации в эти поля осуществляется с помощью приемов, аналогичных ранее рассмотренным для полей *Установить целевую ячейку* и *Изменяя ячейки*. Знак ограничения вводится путем выбора из предлагаемого списка (рис. 2.3). Подобным же образом задаются ограничения на целочисленность и булевость переменных.

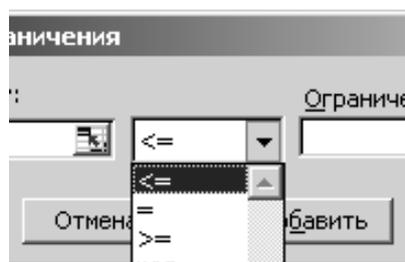


Рис. 2.3

После ввода последнего ограничения модели нажмите кнопку *ОК*, после чего вновь раскроется окно **Поиск решения**, но уже с заполненным полем *Ограничения* (рис. 2.4). При необходимости изменить или удалить из модели то или иное ограничение, его надо предварительно отметить курсором мыши, а затем нажать кнопку *Изменить* или *Удалить* в соответствии с выполняемой операцией.

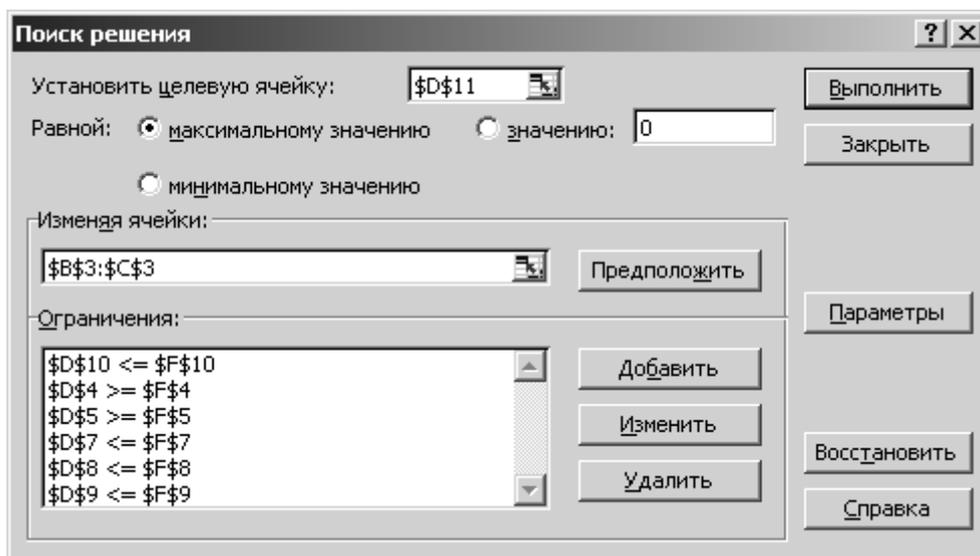


Рис. 2.4

На завершающем этапе необходимо с помощью кнопки *Пара-*

метры вызвать диалоговое окно **Параметры поиска решения** и активизировать в нем флажок *Линейная модель*. Активизация этого флажка подключает для решения задачи алгоритм симплекс-метода, в противном случае для нахождения оптимального решения будет задействован градиентный метод, что может приводить к неоптимальным решениям (точнее – к локальным оптимумам).

В последующем в диалоговом окне **Параметры поиска решения** мы будем также активизировать флажок *Неотрицательные значения*, который позволяет быстро задавать условие неотрицательности для искомых переменных. Активизация флажка *Неотрицательные значения* задает значения x_1 и x_2 и избавляет нас от необходимости их задания в поле *Ограничения* диалогового окна **Поиск решения**.

По завершении построения вычислительной модели задачи в диалоговом окне **Поиск решения** необходимо нажать кнопку *Выполнить*, в результате чего будет запущен вычислительный процесс и найдены оптимальные значения объема производства модификаторов, обеспечивающие максимальную выручку (рис. 2.5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Значения переменных и параметров модели			Уравнения (неравенства)			
2	Наименование переменных и параметров	Модификатор З	Модификатор Л	Левая часть	Знак	Правая часть	№ в ММЗ
3	Оптимальное значение	3,33	1,33				
4	Нижняя граница	0		3,33	>=	0	(6)
5			0	1,33	>=	0	(7)
6	Верхняя граница	нет огранич.				нет огранич.	
7			2	1,33	<=	2	(5)
8	Разность спроса на модификаторы			-2,00	<=	1	(4)
9	Расход ингредиента И1	1	2	6,00	<=	6	(2)
10	Расход ингредиента И2	2	1	8,00	<=	8	(3)
11	Стоимость модификатора	30	20	126,67	→	max	(1)

Рис. 2.5

Из полученного решения можно заключить, что для предприятия "Оргсинтез" оптимальным является суточное производство зимнего

модификатора в объеме 3,33 тонны и летнего модификатора – в объеме 1,33 тонны (ячейки B3:C3). При такой структуре производства суточные запасы ингредиентов И1, И2 будут израсходованы полностью (ячейки D9:D10), и выручка предприятия составит 126,67 у.е. в сутки (ячейка D11).

Анализ модели после нахождения оптимального решения

При принятии экономических решений с использованием оптимизационных моделей важным является не только получение оптимального решения модели, но и анализ полученного решения на чувствительность.

Анализ моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после того, как оптимальное решение задачи получено. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В рассматриваемой задаче, например, может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение спроса и (или) изменения запасов исходных продуктов. Возможно, также потребуется определить влияние на оптимальное решение изменения рыночных цен.

При таком анализе всегда рассматривается некоторая совокупность линейных оптимизационных моделей, т.е. по существу некоторая модель исследования операций. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую экономисту проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Динамические характеристики моделей фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие методов (программных средств), позволяющих выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное (статическое) решение устареет ещё до своей реализации. Предусмотрев данное обстоятельство, разработчики MS Excel включили в надстройку "Поиск решения" модуль генерации отчетов по результатам, устойчивости и пределам.

С точки зрения анализа оптимального решения наибольший интерес представляет отчет по устойчивости, поэтому мы его рассмотрим более подробно, уделив предварительно некоторое внимание отчетам по результатам и пределам.

При нахождении оптимального решения на экран вызывается окно **Результаты поиска решения** (рис. 1.8). Это окно содержит поле

Тип отчета, в котором пользователю предлагается выбрать все или определенные типы отчетов по полученному оптимальному решению. Для выбора необходимо отметить нужные отчеты курсором мыши и нажать кнопку *ОК*, в результате чего в текущую рабочую книгу MS Excel добавятся дополнительные листы с соответствующими названиями.

Отчет по результатам представляет собой совокупность трех таблиц – **Целевая ячейка**, **Изменяемые ячейки**, **Ограничения**, в которых приведены итоговые результаты полученного оптимального решения. Особого пояснения в данном отчете требуют графы *Статус* и *Разница*, входящие в таблицу **Ограничения** (рис. 2.6).

Microsoft Excel Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$D\$11	Стоимость модификатора Левая часть	126,67	126,67

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$B\$3	Оптимальное значение Модификатор З	3,33	3,33
\$C\$3	Оптимальное значение Модификатор Л	1,33	1,33

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$D\$4	Нижняя граница Левая часть	3,33	\$D\$4>=\$F\$4	не связан.	3,33
\$D\$5	Левая часть	1,33	\$D\$5>=\$F\$5	не связан.	1,33
\$D\$7	Левая часть	1,33	\$D\$7<=\$F\$7	не связан.	0,667
\$D\$8	Разн. спроса на модиф. Левая часть	-2,00	\$D\$8<=\$F\$8	не связан.	3
\$D\$9	Расход ингредиента И1 Левая часть	6,00	\$D\$9<=\$F\$9	связанное	0
\$D\$10	Расход ингредиента И2 Левая часть	8,00	\$D\$10<=\$F\$10	связанное	0

Рис. 2.6

Значения ячеек в графе *Разница* получаются в результате абсолютной разности значений ячеек столбцов *Правая часть* и *Левая*

часть вычислительной модели задачи на рабочем листе (рис. 2.5). Например, для ячейки $DS8$ имеем $|1 - (-2)| = 3$. С физической точки зрения это значение указывает на *запас прочности* соответствующего ограничения. Если *запас прочности* > 0 , то ограничение называется *несвязывающим*, если же *запас прочности* $= 0$ – *связывающим* (графа *Статус* в таблице **Ограничения**). Разделение ограничений на связывающие и несвязывающие является важным, как будет показано ниже, в ходе анализа модели задачи на чувствительность.

Вторым генерируемым отчетом является отчет по пределам (рис. 2.7). В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск модификаторов при сохранении оптимального решения, а именно:

- приводятся значения x_j в оптимальном решении;
- приводятся нижние и верхние пределы изменения значений x_j .

Microsoft Excel Отчет по пределам

Ячейка	Целевое Имя	Значение				
$DS11$	Стоимость модификатора Левая часть	126,67				
Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевое результат	Верхний предел	Целевое результат
$BS3$	Оптимальное значение Мо- дификатор З	3,33	0,33	36,67	3,33	126,67
$CS3$	Оптимальное значение Мо- дификатор Л	1,33	0,00	100,00	1,33	126,67

Рис. 2.7

Кроме того, в отчете указаны значения целевой функции при выпуске данного типа модификатора на нижнем и верхнем пределе. Так, для зимнего модификатора нижним пределом является значение 0,33 тонны и целевая функция принимает значение $F = 30 \times 0,33 + 20 \times 1,33 = 36,67$ у.е. Соответственно для верхнего предела, равного 3,33 тонны, имеем $F = 30 \times 3,33 + 20 \times 1,33 = 126,67$ у.е. Аналогичные расчеты можно провести и для летнего типа модификатора.

Третьим генерируемым отчетом является отчет по устойчивости (или отчет по чувствительности), представленный на рис. 2.8. Данный

тип отчета представляет наибольший интерес при анализе модели задачи после нахождения оптимального решения.

Microsoft Excel Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф-нт	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
\$B\$3	Оптимальное значение Модификатор З	3,33	0,00	30	10	20
\$C\$3	Оптимальное значение Модификатор Л	1,33	0,00	20	40	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Огранич. Правая часть	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
\$D\$4	Нижняя граница Левая часть	3,33	0,00	0	3,33333	1E+30
\$D\$5	Левая часть	1,33	0,00	0	1,33333	1E+30
\$D\$7	Левая часть	1,33	0,00	2	1E+30	0,667
\$D\$8	Разн. спроса на модиф. Левая часть	-2,00	0,00	1	1E+30	3
\$D\$9	Расход ингредиента И1 Левая часть	6,00	3,33	6	1	2
\$D\$10	Расход ингредиента И2 Левая часть	8,00	13,33	8	4	2

Рис. 2.8

Первая задача анализа на чувствительность

Во-первых, после нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение правой части уравнений (неравенств) модели, при этом особенно важно проанализировать следующие два аспекта:

1. Насколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции F ?
2. Насколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Так как величина каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части ограничений.

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, вспомним, что при рассмотрении отчета по результатам мы классифицировали ограничения модели задачи на связывающие и несвязывающие. В рассматриваемой задаче связывающими ограничениями являются только ограничения (2) и (3), т. е. те, которые лимитируют запасы ингредиентов И1 и И2.

Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к разряду *дефицитных ресурсов*, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду *недефицитных ресурсов* (т. е. имеющихся в некотором избытке). Таким образом, при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

- 1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;
- 2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции.

Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна в ситуациях, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей.

Может возникнуть вопрос: не следует ли проанализировать, как повлияет на оптимум увеличение объема ресурсов, имеющихся в избытке, и сокращение объема дефицитных ресурсов? Ответ на первую часть вопроса очевиден, так как в этом случае мы попытались бы сделать и без того избыточный ресурс еще более избыточным, что никак не повлияет на полученное ранее решение. Вторая часть вопроса заслуживает особого внимания, так как при возможных недопоставках дефицитного ресурса важно знать, как это скажется на результатах решения задачи. Однако надо иметь в виду, что сокращение объёма дефицитного ресурса никогда не улучшает значения целевой функции.

Обратимся опять к рассматриваемой задаче и сгенерированному для неё отчету по устойчивости (рис. 2.8). Из представленного отчета видно (таблица **Ограничения**), что при сохранении неизменными прочих ограничений, для ингредиента И1 допустимым является увеличение его суточного запаса на 1 тонну, т. е. до 7 тонн ($7 = 6 + 1$).

Действительно, изменив на рабочем листе содержимое ячейки F9 с 6 на 7 и выполнив процедуру поиска решения, мы получим увеличение значения целевой функции – $F = 130,00$, при этом $x_1 = 3 \text{ т}$, $x_2 = 2 \text{ т}$. При последующем увеличении значения ячейки F9 изменения оптимального решения не происходит.

Аналогичная ситуация наблюдается и для ингредиента И2, имеющего допустимое увеличение суточного запаса в размере 4 тонн, т. е. до 12 тонн включительно ($12 = 8 + 4$). При F10 = 12 целевая функция $F = 180,00$ у.е., $x_1 = 6 \text{ т}$, $x_2 = 0 \text{ т}$. Последующее увеличение значения ячейки F10 также не приводит к изменению оптимального решения задачи.

Следует заметить, что допустимое уменьшение суточного запаса для ингредиентов И1 и И2 имеет иной смысл по сравнению с допустимым увеличением. Вспомним, что ингредиенты И1 и И2 являются дефицитными ресурсами, поэтому всякое уменьшение их запасов приводит и к уменьшению значения целевой функции. Тогда возникает вопрос: какой же физический смысл имеют значения допустимого уменьшения запасов ингредиентов И1 и И2, являющихся дефицитными ресурсами? Физический смысл данных значений состоит в том, что, пока они не будут превышены, ингредиенты И1 и И2 будут оставаться дефицитными ресурсами, т. е. будут полностью израсходованы на производство модификаторов. При превышении допустимого уменьшения один из модификаторов будет переходить в разряд недефицитных ресурсов. При этом чем больше превышение допустимого уменьшения, тем меньше значение целевой функции и больше избыточность запаса одного из ингредиентов. Например, для ингредиента И1 допустимое уменьшение составляет 2 тонны, т. е. до 4 тонн включительно. При F9 = 4 целевая функция $F = 120,00$ у.е., $x_1 = 4 \text{ т}$, $x_2 = 0 \text{ т}$, ингредиент И2 расходуется полностью. При последующем уменьшении значения ячейки F9 получаем:

– при F9 = 3: $F = 90,00$ у.е.; $x_1 = 3 \text{ т}$; $x_2 = 0 \text{ т}$; ингредиент И2 расходуется в размере 6 т, его избыточность составляет 2 т;

– при F9 = 2: $F = 60,00$ у.е.; $x_1 = 2 \text{ т}$; $x_2 = 0 \text{ т}$; ингредиент И2 расходуется в размере 4 т, его избыточность составляет 4 т;

– при F9 = 1: $F = 30,00$ у.е.; $x_1 = 1 \text{ т}$; $x_2 = 0 \text{ т}$; ингредиент И2 расходуется в размере 2 т, его избыточность составляет 6 т.

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений. Выше уже отмечалось, что несвязывающие ограничения ассоциируются с избыточными ресурсами, увеличение которых никак не влияет на полученное оптимальное решение. Поэтому

рассмотрение допустимого увеличения избыточных ресурсов является не целесообразным, вместе с тем большой интерес представляет граница их допустимого уменьшения, в рамках которой оптимальное решение (значение целевой функции и переменных x_1 и x_2) остается неизменным.

Ограничение (5), $x_2 \leq 2$, фиксирует предельный уровень спроса на летний модификатор Л. Из отчета по устойчивости видно, что уменьшение спроса на модификатор Л до величины $x_2 = 1,33$ ($1,33 = 2 - 0,67$) никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения (см. на рис. 2.8 графу *Допустимое уменьшение* для ячейки D7). Например, при $F7 = 1,5$ целевая функция $F = 126,67$ у.е., $x_1 = 3,33$ т, $x_2 = 1,33$ т, т.е. имеем ранее полученное оптимальное решение. При изменении уровня спроса сверх допустимого значения получим другое оптимальное решение, например, при $F7 = 1$ целевая функция $F = 125,00$ у.е., $x_1 = 3,50$ т, $x_2 = 1,00$ т.

Рассмотрим ограничение (4), $-x_1 + x_2 \leq 1$, которое представляет соотношение между спросом на модификатор Л и спросом на модификатор З. Из рассматриваемого отчета видно, что на оптимальное решение не повлияет уменьшение данной разности спроса на 3 т. В этом случае имеем ограничение $-x_1 + x_2 \leq -2$ ($-2 = 1 - 3$), или в эквивалентной форме $x_1 - x_2 \geq 2$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на модификатор З превысит спрос на модификатор Л, но не более чем на 2 тонны. Например, при $F8 = -1$ целевая функция $F = 126,67$ у.е., $x_1 = 3,33$ т, $x_2 = 1,33$ т, т.е. имеем ранее полученное оптимальное решение.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу (рис. 2.9).

Ресурс (№ в ММЗ)	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, т	Максимальное изменение дохода от реализации ΔF , у.е.
(2)	дефицитный	+1	$130,00 - 126,67 = 3,33$
(3)	дефицитный	+4	$180,00 - 126,67 = 53,33$
(4)	недефицитный	-3	$126,67 - 126,67 = 0$
(5)	недефицитный	-0,67	$126,67 - 126,67 = 0$

Рис. 2.9

Вторая задача анализа на чувствительность

В первой задаче анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов (т.е. изменения связывающих ограничений). При ограничениях на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов (что характерно для большинства экономических задач), естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Для ответа на этот вопрос введем характеристику ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемую через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы на рис. 2.9, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса, задаваемого i -м ограничением через y_i . Величина y_i определяется из соотношения:

$$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } F}{\text{Максимально допустимый прирост объема } i\text{-го ресурса}}.$$

Воспользовавшись данными из таблицы на рис. 2.9, получим:

$$y_2 = \frac{130,00 - 126,67}{1} = 3,33 \text{ у.е./}t \text{ – для ограничения (2);}$$

$$y_3 = \frac{180,00 - 126,67}{4} = 13,33 \text{ у.е./}t \text{ – для ограничения (3);}$$

$$y_2 = \frac{126,67 - 126,67}{-3} = 0 \text{ у.е./}t \text{ – для ограничения (4);}$$

$$y_2 = \frac{126,67 - 126,67}{-0,67} = 0 \text{ у.е./}t \text{ – для ограничения (5).}$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса (3), т.е. ингредиента И2, и лишь затем – на увеличение ресурса (2), т.е. ингредиента И1. Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

В отчете по устойчивости ценность единицы каждого из ресурсов приведена в графе *Теневая цена* таблицы **Ограничения** (см. рис. 2.8).

Третья задача анализа на чувствительность

В рамках данной задачи изучается влияние изменения коэффициентов целевой функции на полученное оптимальное решение. При этом могут исследоваться следующие вопросы:

1. Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2. Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Из отчета по устойчивости (таблица **Изменяемые ячейки**) видно, что для модификатора 3 диапазон изменения его стоимости, при котором не происходит изменения оптимального решения, составляет от 10 ($10 = 30 - 20$) до 40 ($40 = 30 + 10$) у.е. за тонну. Здесь следует заметить, что неизменными сохраняются значения только для переменных x_1 и x_2 . Целевая функция F в этом случае, безусловно, будет изменять своё значение. Так, при $c_1 = 10$ имеем: $F = 60,00$ у.е., $x_1 = 3,33$ т, $x_2 = 1,33$ т; при $c_1 = 40$: $F = 160,00$ у.е., $x_1 = 3,33$ т, $x_2 = 1,33$ т. Во всех промежуточных значениях $x_1 = 3,33$ т, $x_2 = 1,33$ т, а целевая функция принимает значения в интервале $60 \leq F \leq 160$ у.е.

Можно заметить, как только коэффициент c_1 оказывается меньше 10 (содержимое ячейки В11 на рабочем листе), ингредиент И2 становится недефицитным, а предельный уровень спроса на летний модификатор Л – дефицитным. Для предприятия "Оргсинтез" это означает, что если доход от продажи одной тонны модификатора 3 станет меньше 10 у.е., то наиболее выгодная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества модификатора Л (т. е. $x_2 = 2$ тонны в сутки). При этом общее потребление ингредиента И2 (ограничение (3)) снизится, что обусловит недефицитность этого ресурса. Соответствующие выводы легко сделать и для случая, когда значение c_1 превысит максимальное значение, равное 40.

Таким образом, мы провели подробный анализ модели рассматриваемой задачи на чувствительность, что позволило нам изучить влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение и тем самым исследовать рассматриваемую задачу в её динамическом развитии.

Анализ модели на основе сценариев

В MS Excel предусмотрена еще одна возможность проведения анализа модели после нахождения оптимального решения. Это можно сделать с помощью *сценариев*. Сценарий представляет собой некоторое множество исходных значений, на основе которых надстройка "Диспетчер сценариев" создает отчет. Отчет содержит как исходные значения, так и полученные после их подстановки в таблицу и произведения необходимых вычислений итоговые значения, что позволяет проследить зависимости между данными в таблице.

Анализ модели на основе сценариев во многом напоминает анализ модели на чувствительность, но все же не является таковым в полной мере. В определенных ситуациях он имеет преимущества перед анализом модели на чувствительность в плане наглядности представления информации и технологической реализации. Тем не менее, сценарный анализ следует рассматривать, скорее, как дополнение к анализу модели на чувствительность.

На наш взгляд, наиболее целесообразным является комплексное применение обоих методов при доминирующей роли анализа на чувствительность. Впрочем, окончательное решение вопроса о том, какой из методов анализа модели целесообразней применить, остается за экономистом-аналитиком и зависит от целей анализа, масштаба модели, требований к форме представления информации и ряда других факторов.

В качестве примера рассмотрим процесс разработки сценариев, позволяющих проанализировать, как повлияет на оптимальное решение изменение запасов ингредиента И2. Исходными данными для построения сценариев являются следующие значения запаса ингредиента И2: 4 т, 6 т, 8 т, 10 т, 12 т, 14 т.

Порядок действий при разработке сценариев следующий:

1. В вычислительной модели задачи на рабочем листе изменим значение запаса ингредиента И2 с 8 т на 4 т (ячейка F10).

2. Решим задачу для измененных исходных данных (**Сервис – Поиск решения – Выполнить**).

3. В диалоговом окне **Результаты поиска решения** активизируем кнопку *Сохранить сценарий*, в результате чего появится окно **Сохранение сценария**, в которое введем название сценария, например, "И2=4(т)" (рис. 2.10).

4. Выполним пункты 1-3 для значений ингредиента И2: 6 т, 8 т, 10 т, 12 т, 14 т с сохранением сценариев под соответствующими именами.

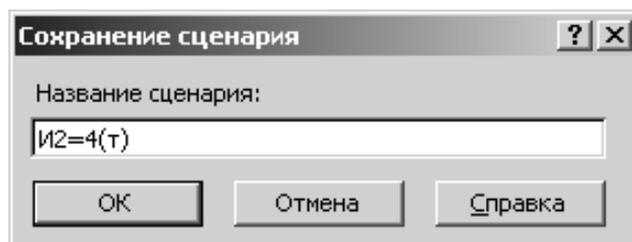


Рис. 2.10

5. Вызовем диалоговое окно **Диспетчер сценариев** (**Сервис – Сценарии**) (рис. 2.11). Если выделить какой-либо из сценариев в поле *Сценарии* и при этом активизировать кнопку *Вывести*, то в вычислительной модели задачи на рабочем листе будет возвращено оптимальное решение для соответствующего значения запаса ингредиента И2.

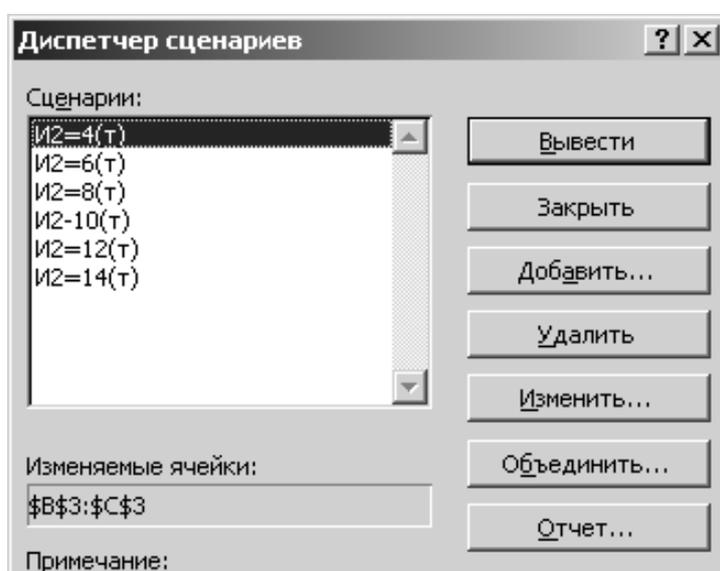


Рис. 2.11

6. В окне **Диспетчер сценариев** активизируем кнопку *Отчет* – на экране появится окно **Отчет по сценарию** (рис. 2.12).

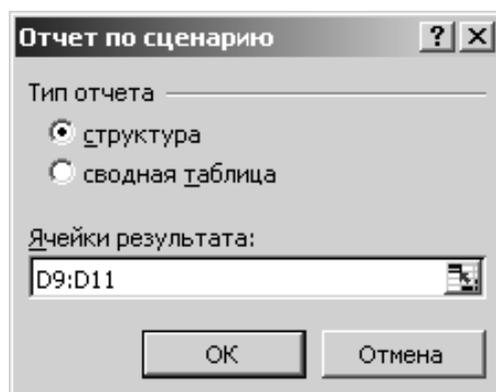


Рис. 2.12

Селекторный переключатель *Тип отчета* установим в положение *Структура*, а в поле *Ячейки результата* введем диапазон D9:D11. Нажмем кнопку *ОК* – в результате чего в рабочую книгу добавится лист **Структура сценария** (рис. 2.13).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Структура сценария								
3				Текущие значения:	И2=4(т)	И2=6(т)	И2=8(т)	И2=10(т)	И2=12(т)	И2=14(т)
4					Автор: Трофимец					
5		Изменяемые:								
6			\$BS\$3	3,33	1,00	2,00	3,33	4,67	6,00	6,00
7			\$CS\$3	1,33	2,00	2,00	1,33	0,67	0,00	0,00
8		Результат:								
9			\$DS\$9	6,00	5,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
10			\$DS\$10	8,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	12,00
11			\$DS\$11	126,67	70,00	100,00	126,67	153,33	180,00	180,00
12		Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых								
13		ячеек в момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки								
14		для каждого сценария выделены серым цветом.								

Рис. 2.13

7. Для удобства дальнейшей работы произведем редактирование листа сценария – в результате получим таблицу, представленную на рис. 2.14.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Отчет по сценарию						
2		И2=4(т)	И2=6(т)	И2=8(т)	И2=10(т)	И2=12(т)	И2=14(т)
3	Модиф. З	1,00	2,00	3,33	4,67	6,00	6,00
4	Модиф. Л	2,00	2,00	1,33	0,67	0,00	0,00
5	Ингр. И1	5,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
6	Ингр. И2	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	12,00
7	Выручка	70,00	100,00	126,67	153,33	180,00	180,00

Рис. 2.14

Для наглядного представления результатов могут быть построены диаграммы. На рис. 2.15 представлена диаграмма, отражающая зависимость выручки от запаса ингредиента И2.



Рис. 2.15

Если для анализа модели часто используются одни и те же типовые сценарии, то целесообразно автоматизировать рутинные операции по преобразованию таблицы сценариев и построению диаграмм. Для этого могут быть эффективно использованы инструментальные средства макропрограммирования MS Excel.

И в заключение рассмотрения задачи формирования оптимальной производственной программы сформулируем общие выводы об этапах решения задач линейного программирования в MS Excel.

Технология решения задач линейного программирования в табличном процессоре MS Excel состоит из следующих основных этапов:

1. На основании содержательной (вербальной) постановки задачи разрабатывается математическая модель задачи.
2. На основании математической модели задачи разрабатывается вычислительная модель задачи на рабочем листе.
3. На основании вычислительной модели задачи на рабочем листе разрабатывается вычислительная модель задачи в диалоговом окне "Поиск решения" и находится оптимальное решение.
4. Производится анализ модели задачи после нахождения оптимального решения.

Сформулированная технология является по своей сути концептуальной и применима не только для решения задач линейного

программирования, но и других типов задач математического программирования.

2.1.2. Транспортная задача

Настоящий параграф посвящен вопросам разработки в MS Excel компьютерных моделей транспортного типа. Такие модели используются для составления наиболее экономичных планов перевозки продукции из нескольких пунктов отправления (например, склады) в несколько пунктов назначения (например, магазины). Транспортную модель можно также применять и при рассмотрении ряда других практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением исполнителей по рабочим местам, оборотом наличного капитала и многими другими. Кроме того, модель можно видоизменять, с тем чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции.

Широкое практическое приложение транспортной задачи обусловило её обязательное рассмотрение в курсе математического программирования высших учебных заведений. Можно предположить, что для многих читателей линейное программирование ассоциируется именно с решением транспортной задачи, рассмотрению которой уделено достаточно внимания в книгах по исследованию операций, экономико-математическому моделированию, логистике, экономическому анализу и некоторых других. Поэтому мы не будем подробно останавливаться на теоретических аспектах решения транспортной задачи, а сфокусируем свое внимание на вопросах разработки её компьютерной модели и последующего анализа различных практических ситуаций.

В качестве примера транспортной задачи рассмотрим задачу перевозки горюче-смазочных материалов (ГСМ).

Содержательная постановка задачи

Компанией разрабатывается план обеспечения потребителей горюче-смазочными материалами. Исходные данные о запасах ГСМ в хранилищах, заявках на ГСМ в центрах распределения и стоимости перевозки 1 т ГСМ от хранилищ к центрам распределения представлены в нижеследующей таблице.

Хранилища ГСМ	Центры распределения					Запасы ГСМ в хранилищах, т
	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	
Хранилище1	4	6	7	9	1	350
Хранилище2	6	4	1	2	2	200
Хранилище3	5	8	7	4	9	450
Хранилище4	2	3	8	5	7	350
Потребность в ГСМ, т	350	400	250	100	250	

Требуется разработать такой план доставки ГСМ от хранилищ к центрам распределения, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Математическая модель задачи

Рассматриваемая задача является классической транспортной задачей или, другими словами, транспортной задачей закрытого типа, или сбалансированной транспортной задачей. Последнее название, на наш взгляд, является наиболее удачным, так как отражает условие сбалансированности запасов и потребностей, имеющееся в рассматриваемой задаче, т. е.:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2.2)$$

где m – количество исходных пунктов (в рассматриваемой задаче количество хранилищ);

n – количество пунктов назначения (в рассматриваемой задаче количество центров распределения);

a_i – количество (объем) груза в i -м исходном пункте;

b_j – количество (объем) груза, которое должно быть завезено в j -й пункт назначения.

Для рассматриваемой задачи имеем: $\sum_{i=1}^4 a_i = 1350$, $\sum_{j=1}^5 b_j = 1350$,

т.е. $\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j$, таким образом, она является сбалансированной.

Так как запасы равны потребностям, то все запасы будут вывезены, а все потребности будут удовлетворены. Данные условия можно записать в виде следующих уравнений:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

где x_{ij} – искомые переменные задачи – количество (объем) груза, которое должно быть перевезено с i -го исходного пункта в j -й пункт назначения.

Так как количество перевозимого груза не может принимать отрицательные значения, то в рассматриваемой задаче имеет место условие неотрицательности, т. е.:

$$x_{ij} \geq 0. \quad (2.5)$$

Выражения (2.3)-(2.5) образуют систему ограничений задачи, целевая функция в которой задается выражением:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.6)$$

где c_{ij} – стоимость перевозки *одной* единицы груза (в рассматриваемой задаче 1 т ГСМ) с i -го исходного пункта в j -й пункт назначения.

Экономическая интерпретация выражения (2.6) становится очевидной, если его записать в развернутом виде:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min. \quad (2.7)$$

Так как c_{ij} – это стоимость перевозки *одной* единицы груза с i -го исходного пункта в j -й пункт назначения, а x_{ij} – объем перевозимого груза по данному маршруту, то $c_{ij}x_{ij}$ – это стоимость перевозки груза

по маршруту i -й исходный пункт – j -й пункт назначения. Сложение стоимостей перевозок по всем возможным маршрутам образует стоимость общего плана перевозок.

Объединяя выражения (2.3)-(2.6), получаем модель сбалансированной транспортной задачи:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2) \quad (2.8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (3)$$

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (4)$$

Опираясь на модель (2.8), разработаем математическую модель для рассматриваемой задачи.

Выражение (1) в модели (2.8) запишется в виде системы следующих уравнений:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 350, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 200, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 450, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 350, \end{aligned} \quad (2.9)$$

выражение (2) – в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 350, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 400, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 250, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 100, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 250. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условие неотрицательности (3) будет задано двадцатью неравенствами следующего вида:

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{45} \geq 0. \quad (2.11)$$

Целевая функция (4) запишется в виде выражения:

$$F = 4x_{11} + 6x_{12} + \dots + 5x_{31} + \dots + 7x_{45} \rightarrow \min. \quad (2.12)$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи разработана, можно переходить к разработке вычислительной модели задачи на рабочем листе.

Вычислительная модель задачи на рабочем листе

Как уже отмечалось, форма представления вычислительной модели задачи на рабочем листе может быть разной. Для рассматриваемой задачи нами предлагается вычислительная модель, представленная на рис. 2.16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Запасы ГСМ в хр-щах, т		
2		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5			
3	Хр-ще1	4	6	7	9	1	350		
4	Хр-ще2	6	4	1	2	2	200		
5	Хр-ще3	5	8	7	4	9	450		
6	Хр-ще4	2	3	8	5	7	350		
7	Потребн. в ГСМ, т	350	400	250	100	250			
8									
9									
10	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1						0,00	=	350,00
13	Хр-ще2						0,00	=	200,00
14	Хр-ще3						0,00	=	450,00
15	Хр-ще4						0,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	350,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						0,00	→	min

Рис. 2.16

Представленная вычислительная модель включает в себя две таб-

лицы. Первая таблица служит для ввода и корректировки исходных данных задачи, вторая таблица – для ввода формул и расчета значений, соответствующих оптимальному решению. При этом диапазон В12:F15 отведен для расчета оптимального плана перевозок, а ячейка G19 – для расчета целевой функции.

Логика построения вычислительной модели задачи на рабочем листе достаточно проста и состоит в записи выражений (2.9)-(2.12) в "терминологии" MS Excel. Покажем, как это делается.

Так как мы отвели диапазон В12:F15 для расчета оптимального плана перевозок, то ячейка В12 соответствует переменной x_{11} , ячейка С12 – переменной x_{12} , ячейка D12 – переменной x_{13} и т.д. Любое уравнение (неравенство) состоит из левой части, знака и правой части (заметим, что таким же образом мы обозначили и ячейки в диапазонах G12:I15 и В16:F18). Тогда, первое уравнение математической модели задачи – $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 350$ – может быть "записано" на рабочем листе следующим образом:

- левая часть уравнения – $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}$ – в ячейке G12 путем ввода формулы =СУММ(В12:F12);
- знак "=" – в ячейке H12 путем ввода соответствующего символа с клавиатуры;
- правая часть уравнения – 350 – в ячейке I12 путем ввода формулы =G3 (в ячейку I12 можно непосредственно ввести число 350, но первый способ является более удобным при последующих изменениях исходных данных задачи).

Подобным образом записываются и другие уравнения. Уравнения (2.9) записываются в диапазоне G12:I15, а уравнения (2.10) – в диапазоне – В16:F18. Уравнения можно быстро ввести, если воспользоваться маркером заполнения MS Excel. Для этого необходимо ввести первое уравнение, выделить соответствующие ему три смежные ячейки, после чего с помощью маркера заполнения получить другие однородные уравнения (рис. 2.17).

15	Хранилище4						0,00	
16	лев. часть (завезено)	0,00	0,00	0,00				
17	знак	=	=	=				
18	прав. часть (потребн.)	350,00	400,00	250,00				
19				=	Стоимость перевозки :		0,00	=

Рис. 2.17

Условие неотрицательности (2.11) на рабочем листе задавать не будем, зададим его позже в диалоговом окне **Параметры поиска решения**.

Для расчета целевой функции отведена ячейка G19. Введем в эту ячейку формулу =СУММПРОИЗВ(B3:F6;B12:F15), которая соответствует математическому выражению (2.12).

Таким образом, вычислительная модель задачи на рабочем листе разработана, можно переходить к разработке вычислительной модели задачи в диалоговом окне **Поиск решения**.

Вычислительная модель задачи в диалоговом окне Поиск решения

Находясь на рабочем листе с разработанной вычислительной моделью, вызовем на выполнение надстройку "Поиск решения" (рис. 1.3).

В поле *Установить целевую ячейку* введем ссылку на ячейку, в которой будет рассчитываться значение целевой функции. Такой ячейкой на рабочем листе является ячейка G19, в которой заключена формула расчета стоимости плана перевозок. Так как стоимость плана необходимо минимизировать, то и переключатель *Равной* необходимо установить в положение *минимальному значению* (рис. 2.18).

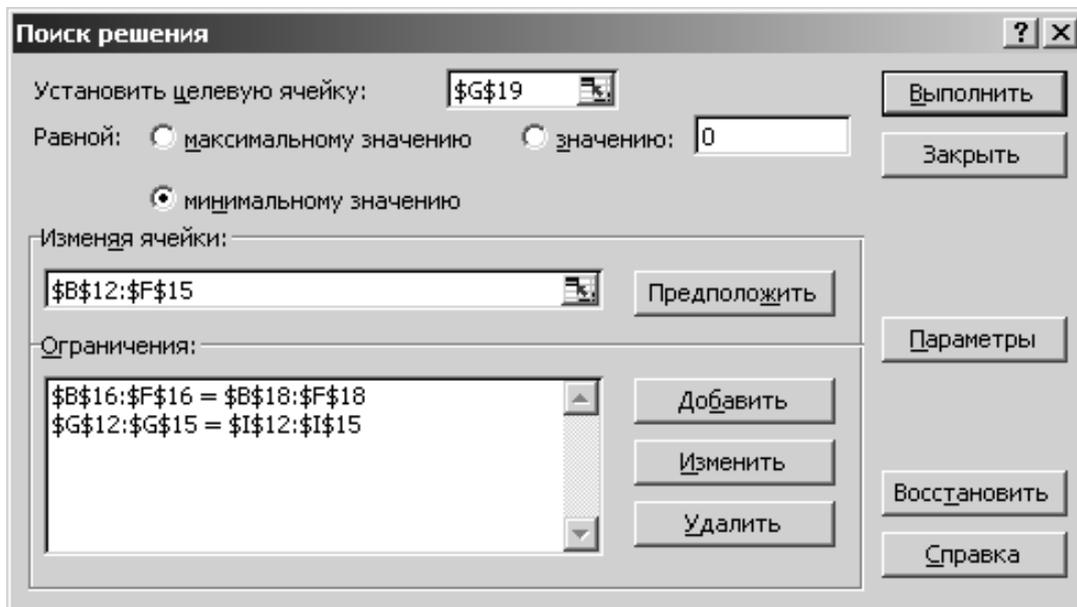


Рис. 2.18

В поле *Изменяя ячейки* введем ссылку на диапазон ячеек, в которых будут рассчитываться значения искомым переменных, т.е. на диапазон B12:F15.

В поле *Ограничения* введем ссылки на диапазоны G12:I15 и B16:F18, которые соответствуют выражениям (2.9) и (2.10).

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** активизируем флажки *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*.

Нажмем кнопку *Выполнить* – получим решение задачи (рис. 2.19).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І
9									
10	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	50,00	50,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	0,00	200,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	300,00	0,00	50,00	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	350,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	350,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						4250,00	→	min

Рис. 2.19

План перевозок, рассчитанный в ячейках В12:F15, является оптимальным. При данном решении значение целевой функции, рассчитанное в ячейке G19, является минимальным и равно 4250 у.е.

Построенная модель классической транспортной задачи является платформой, на основе которой могут быть разработаны различные модифицированные модели, учитывающие разнообразные ситуации, возникающие в практической деятельности. Рассмотрим некоторые из них.

Увеличим потребности в ГСМ у первого центра до 500 тонн, а у второго центра до 650 тонн (см. ячейки В7 и С7 на рис. 2.20). Получим, что $\sum_{i=1}^4 a_i = 1350$, $\sum_{j=1}^5 b_j = 1750$, т. е. $\sum_{i=1}^4 a_i < \sum_{j=1}^5 b_j$. Таким образом,

спрос превышает предложение, и задача стала несбалансированной. В такой ситуации для решения задачи обычно вводят фиктивного поставщика. При использовании надстройки "Поиск решения" в этом нет необходимости, надо только правильно расставить знаки в системе ограничений. Посмотрим, как это можно сделать в рассматриваемой задаче.

С точки зрения экономической интерпретации выражение $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ означает, что все запасы должны быть вывезены, а выражение $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, что все потребности должны быть удовлетворены. В ситуации дефицита запасы будут вывезены полностью, т. е. выражение $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ останется без изменений, а вот потребности будут удовлетворены не в полном объеме, т.е. уравнение $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ трансформируется в неравенство $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j$. Обратим внимание, что используется знак нестрогого неравенства, так как какие-то центры могут быть обеспечены ГСМ в полном объеме, а какие-то нет.

После модификации математической модели задачи внесем соответствующие изменения в её вычислительную модель. Для этого на рабочем листе в диапазоне В17:F17 поменяем знаки "=" на " \leq "*, то же самое сделаем и в диалоговом окне **Поиск решения**. Нажмем кнопку *Выполнить* – получим решение модифицированной задачи (рис. 2.20).

Обратим внимание, что ячейки диапазона G12:G15 равны ячейкам диапазона I12:I15, т. е. все запасы вывезены. Ячейки В16, Е16 и F16 равны соответствующим ячейкам в диапазоне В18:F18, т.е. Центр1, Центр4 и Центр5 удовлетворены ГСМ в полном объеме, а ячейки С16 и D16 меньше соответствующих ячеек в диапазоне В18:F18, т. е. в Центр2 и Центр3 горюче-смазочные материалы недопоставлены в размере 250 и 50 тонн соответственно. Ниже мы рассмотрим, как в данной ситуации осуществить "справедливую" недопоставку ГСМ по всем центрам. А сейчас рассмотрим ещё ряд важных ситуаций, встречающихся на практике.

Допустим, вам поступило указание обеспечить Центр2 в полном объеме. Для этого необходимо лишь изменить в ячейке С17 знак " \leq " на знак "=" и ввести дополнительное ограничение С16=С18 в диалоговом окне **Поиск решения**. Решение представлено на рис. 2.21.

* Изменение знаков на рабочем листе хотя и имеет лишь иллюстративный характер и не влияет на процедуру поиска решения, тем не менее, является очень полезным для понимания сути задачи и позволяет в последующем избежать ошибок при задании новых ограничений.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Запасы ГСМ в хр-щах, т		
2		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5			
3	Хр-ще1	4	6	7	9	1	350		
4	Хр-ще2	6	4	1	2	2	200		
5	Хр-ще3	5	8	7	4	9	450		
6	Хр-ще4	2	3	8	5	7	350		
7	Потребн. в ГСМ, т	500	650	250	100	250			
8									
9									
10	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	100,00	0,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	0,00	200,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	350,00	0,00	0,00	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	50,00	300,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	500,00	300,00	200,00	100,00	250,00			
17	знак	<=	<=	<=	<=	<=			
18	прав. часть (потребн.)	500,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						4000,00	→	min

Рис. 2.20

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	0,00	100,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	200,00	0,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	350,00	0,00	0,00	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	350,00	650,00	0,00	100,00	250,00			
17	знак	<=	=	<=	<=	<=			
18	прав. часть (потребн.)	500,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						4850,00	→	min

Рис. 2.21

Как видно из рис. 2.21, в Центр3 горюче-смазочные материалы вообще не доставляются. Допустим, вам поступило указание обеспечить Центр3 не менее чем на 85% от его потребностей. В математической интерпретации это указание запишется как $b_3 \geq 212,5$. С учетом ранее имеющегося ограничения на потребность ГСМ в Центре3 будем иметь, что $212,5 \leq b_3 \leq 250$.

Ограничение $b_3 \leq 250$ в разработанной модели имеется, остается добавить ограничение $b_3 \geq 212,5$. Это можно сделать различными способами, допустим, непосредственно в диалоговом окне **Поиск решения** ввести D16 $\geq 212,5$. Решение представлено на рис. 2.22.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	0,00	100,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	0,00	200,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	137,50	200,00	12,50	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	137,50	650,00	212,50	100,00	250,00			
17	знак	<=	=	<=	<=	<=			
18	прав. часть (потребн.)	500,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						4875,00	→	min

Рис. 2.22

В практической деятельности также встречаются задачи, связанные с блокированием перевозок. Это может быть обусловлено причинами техногенного характера (оползень, сход снега на перевал и т.п.), ремонтно-восстановительными работами (закрытие моста на реконструкцию и т.п.) или, что чаще встречается на практике, коммерческими соображениями.

Например, в плане на рис. 2.22 осуществляется перевозка по маршруту Хранилище2 – Центр3 в размере 200 тонн, необходимо заблокировать перевозку по данному маршруту. В математической интерпретации это указание запишется в виде ограничения $x_{23} = 0$. Другим, "искусственным", способом задания блокировки является назна-

чение большой стоимости перевозки блокируемому маршруту, например, $c_{31} = 1000$.

Используем первый способ для блокирования маршрута Хранилище2 – Центр3, для чего в диалоговом окне **Поиск решения** введем ограничение $D13 = 0$. Второй способ используем для блокирования маршрута Хранилище3 – Центр1, для чего в ячейку B5 введем какое-нибудь относительно большое число, например, 1000. Решение представлено на рис. 2.23.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	100,00	0,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	200,00	0,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	0,00	100,00	250,00	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	100,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	<=	=	<=	<=	<=			
18	прав. часть (потребн.)	500,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						5450,00	→	min

Рис. 2.23

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	100,00	0,00	0,00	0,00	250,00	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	200,00	0,00	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	0,00	100,00	250,00	100,00	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	100,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	<=	=	<=	<=	<=			
18	прав. часть (потребн.)	500,00	650,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						5450,00	→	min

Рис. 2.24

Другой распространенной задачей является задача перевозки определенного объема груза по указанному маршруту. Например, между Хранилищем4 и Центром1 заключен договор на поставку 300 т ГСМ, а между Хранилищем1 и Центром4 – на поставку 100 т ГСМ. Решение задачи представлено на рис. 2.24.

И в заключение рассмотрим схему "справедливой" недопоставки в условиях дефицита, для чего обратимся к модели, представленной на рис. 2.20. Как видим, недопоставка коснулась только двух центров – Центра2 и Центра3, что является по отношению к ним несправедливым решением. Постараемся исправить сложившуюся ситуацию.

Самым простым решением в этом случае является равномерная недопоставка ГСМ во все пять центров. При дефиците в 400 тонн ($400 = 1750 - 1350$) она будет составлять 80 тонн ГСМ для каждого центра. Однако, как легко заметить, такое решение также будет несправедливым. Например, недопоставка в 80 тонн для Центра2 будет лишь "некоторой неприятностью", а для Центра4 – "бедой". Отсюда напрашивается пропорциональное распределение ГСМ относительно масштабов (потребностей) центров, что в нашем понимании и будет являться справедливым решением.

Существуют различные подходы к пропорциональному распределению ресурсов. Рассмотрим два из них.

Первый подход состоит в расчете коэффициента обеспеченности

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{j=1}^n b_j}.$$

Корректировка потребностей осуществляется в соответствии с формулой

$$b_j^{new} = \gamma b_j^{old},$$

где b_j^{new} – новое значение спроса в j -м центре;

b_j^{old} – старое значение спроса в j -м центре.

Второй подход состоит в следующих, несколько более длинных рассуждениях. Вначале определяется доля каждого центра в общем объеме потребностей

$$d_j = \frac{b_j}{\sum_{j=1}^n b_j}.$$

Логичным будет в соответствии с этими долями осуществить и недопоставку:

$$v_j^{nd} = d_j V^{\text{деф}},$$

где v_j^{nd} – объем недопоставки в j -й центр;

$V^{\text{деф}} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ – общий объем недостающих ресурсов (объем дефицита).

Корректировка потребностей осуществляется в соответствии с формулой

$$b_j^{\text{new}} = b_j^{\text{old}} - v_j^{nd}.$$

Выбрав тот или иной способ корректировки потребностей, рассчитаем их новые значения. Все расчеты целесообразно проводить непосредственно на рабочем листе MS Excel. При этом заметим, что задача из несбалансированной вновь превращается в сбалансированную.

После внесения необходимых изменений на рабочем листе и в диалоговом окне **Поиск решения** запускаем процедуру поиска. Решение задачи представлено на рис. 2.25.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ша ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	12,86	144,29	0,00	0,00	192,86	350,00	=	350,00
13	Хр-ще2	0,00	7,14	192,86	0,00	0,00	200,00	=	200,00
14	Хр-ще3	372,86	0,00	0,00	77,14	0,00	450,00	=	450,00
15	Хр-ще4	0,00	350,00	0,00	0,00	0,00	350,00	=	350,00
16	лев. часть (завезено)	385,71	501,43	192,86	77,14	192,86			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	385,71	501,43	192,86	77,14	192,86			
19	Стоимость перевозки						4554,29	→	min

Рис. 2.25

В рассмотренной задаче транспортировка ГСМ осуществлялась в условиях дефицита, т. е. выполнялось условие $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$. Наряду с "дефицитной" постановкой задачи возможна и противоположная ей "избыточная" постановка, т. е. когда выполняется условие $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. Исходные данные для такой задачи представлены на рис. 2.26.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І
1	Хр-ща ГСМ	Центры распределения					Запасы ГСМ в хр-щах, т		
2		Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5			
3	Хр-ще1	4	6	7	9	1	850		
4	Хр-ще2	6	4	1	2	2	400		
5	Хр-ще3	5	8	7	4	9	700		
6	Хр-ще4	2	3	8	5	7	500		
7	Потребн. в ГСМ, т	700	400	250	100	250			
8									

Рис. 2.26

Как видим $\sum_{i=1}^4 a_i = 2450$, $\sum_{j=1}^5 b_j = 1750$, т. е. наблюдается избыток запасов ГСМ – $\sum_{i=1}^4 a_i > \sum_{j=1}^5 b_j$. В данной ситуации потребности центров будут удовлетворены в полном объеме, т. е. имеет место ограничение $\sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j$ (будем считать, что удовлетворение потребностей производится в объеме, не превышающем поданных заявок). В то же время запасы ГСМ будут вывезены из хранилищ не в полном объеме, т. е. имеет место ограничение $\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i$ (знак нестрогого неравенства указывает на то, что из некоторых хранилищ запасы могут быть вывезены в полном объеме, а из каких-то не в полном).

Решение задачи представлено на рис. 2.27.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	550,00	0,00	0,00	0,00	250,00	800,00	<=	850,00
13	Хр-ще2	0,00	50,00	250,00	100,00	0,00	400,00	<=	400,00
14	Хр-ще3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	<=	700,00
15	Хр-ще4	150,00	350,00	0,00	0,00	0,00	500,00	<=	500,00
16	лев. часть (завезено)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						4450,00	→	min

Рис. 2.27

Предположим, что поступила следующая информация:

а) Хранилище3 ликвидируется, поэтому запасы ГСМ должны быть вывезены из него в полном объеме;

б) мост по дороге от Хранилища2 к Центру3 закрыт на реконструкцию, поэтому необходимо запретить перевозку по указанному маршруту.

Решение задачи представлено на рис. 2.28.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	0,00	0,00	0,00	0,00	250,00	250,00	<=	850,00
13	Хр-ще2	0,00	150,00	0,00	100,00	0,00	250,00	<=	400,00
14	Хр-ще3	450,00	0,00	250,00	0,00	0,00	700,00	=	700,00
15	Хр-ще4	250,00	250,00	0,00	0,00	0,00	500,00	<=	500,00
16	лев. часть (завезено)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						6300,00	→	min

Рис. 2.28

Предположим, что неприкосновенный (неснижаемый запас) в Хранилище2 составляет 300 тонн. Тогда при емкости в 400 тонн из него в пределе может быть вывезено 100 тонн ГСМ.

Решение задачи представлено на рис. 2.29.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І
9									
10		Центры распределения					Уравнения (неравенства)		
11	Хр-ща ГСМ	Центр1	Центр2	Центр3	Центр4	Центр5	лев. часть (вывезено)	знак	прав. часть (запас)
12	Хр-ще1	150,00	0,00	0,00	0,00	250,00	400,00	<=	850,00
13	Хр-ще2	0,00	0,00	0,00	100,00	0,00	100,00	<=	400,00
14	Хр-ще3	450,00	0,00	250,00	0,00	0,00	700,00	=	700,00
15	Хр-ще4	100,00	400,00	0,00	0,00	0,00	500,00	<=	500,00
16	лев. часть (завезено)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
17	знак	=	=	=	=	=			
18	прав. часть (потребн.)	700,00	400,00	250,00	100,00	250,00			
19	Стоимость перевозки						6450,00	→	min

Рис. 2.29

Рассмотренные модели, безусловно, не перекрывают разнообразие всех тех многочисленных ситуаций, которые встречаются в практической деятельности. Тем не менее, их можно рекомендовать в качестве отправных точек для дальнейшего исследования. Направлениями таких исследований могут быть многопродуктовые перевозки, перевозки с промежуточными пунктами, перевозки с учетом грузоподъемности транспортных средств и многие другие. Ниже, развивая транспортную тематику, рассматривается известная разновидность задач линейного программирования, получившая название задачи о назначениях.

2.1.3. Задача о назначениях

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить m работ (или исполнителей) по n станкам. Работа i ($i = 1, \dots, m$), выполняемая на станке j ($j = 1, \dots, n$), связана с затратами c_{ij} . Задача состоит в таком

распределении работ по станкам (одна работа выполняется одним станком), которое соответствует минимуму суммарных затрат. Такая задача известна как *задача о назначениях*. Рассмотрим данную задачу, в контексте транспортной тематики, предложенной в предыдущем параграфе.

Содержательная постановка задачи

В регионе располагаются хранилища ГСМ и центры их распределения. Доставка ГСМ от хранилищ к центрам распределения осуществляется периодически или по заявкам автомобильным транспортом. Исходные данные о емкости хранилищ и центров распределения, а также о среднем времени доставки ГСМ от хранилищ к центрам распределения представлены в нижеследующей таблице.

<i>Центры распред. ГСМ</i>	<i>Хранилища ГСМ</i>				<i>Емкость центров распред.</i>
	Хранилище1	Хранилище2	Хранилище3	Хранилище4	
Центр1	0,5	1,2	1,0	0,8	300
Центр2	1,0	1,1	0,6	1,4	270
Центр3	0,6	1,2	2,0	1,0	350
Центр4	0,8	1,5	0,9	1,4	550
Центр5	1,2	1,8	1,6	1,4	600
Центр6	0,7	1,2	0,3	0,5	420
Центр7	0,2	1,4	0,4	1,0	750
Центр8	1,2	1,0	0,6	0,6	560
Центр9	0,4	0,5	1,7	1,2	860
Центр10	0,9	1,0	0,8	1,3	580
<i>Емкость храни- лищ ГСМ</i>	1400	1200	1600	1400	

Требуется разработать такой план прикрепления центров распределения к хранилищам ГСМ, чтобы общее время доставки ГСМ было минимальным.

Математическая модель задачи

Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как задачу о назначениях. При этом работы являются центрами распределения, а станки – хранилищами, т. е. центры распределения назначаются хранилищам. Затраты c_{ij} будут соответствовать времени доставки ГСМ

от хранилищ к центрам распределения t_{ij} . Отличие рассматриваемой задачи от классической задачи о назначениях состоит в том, что к одному хранилищу может быть прикреплено несколько центров распределения, но при этом центр распределения может быть прикреплен только к одному хранилищу.

Для построения математической модели введем следующие обозначения:

V_i^u – емкость i -го центра, $i = 1, \dots, m$;

V_j^x – емкость j -го хранилища, $j = 1, \dots, n$;

t_{ij} – среднее время движения автомобильного транспорта от i -го центра распределения к j -му хранилищу;

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й центр прикреплен к } j\text{-му хранилищу;} \\ 1, & \text{если } i\text{-й центр не прикреплен к } j\text{-му хранилищу.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Искомые переменные x_{ij} получили название булевых переменных в честь предложившего их английского математика Дж. Буля*. Отсюда и рассматриваемая задача относится к классу задач линейного булева программирования, являющегося частной разновидностью линейного целочисленного программирования.

Так как i -й центр распределения может быть прикреплен только к одному j -му хранилищу, то будем иметь:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Так как к j -му хранилищу может быть прикреплено несколько i -х центров распределения, то будем иметь:

$$\sum_{i=1}^m V_i^u x_{ij} \leq V_j^x, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Выражения (2.13)-(2.15) образуют систему ограничений рассматриваемой задачи, а её целевая функция будет иметь следующий вид:

* Буль Джордж (1815 – 1864) – английский математик и логик, один из основоположников математической логики, разработал алгебру логики ("Исследование законов мышления", 1854).

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min . \quad (2.16)$$

Таким образом, математическая модель задачи построена, можно приступать к разработке вычислительной модели задачи на рабочем листе.

Вычислительная модель задачи на рабочем листе

Для рассматриваемой задачи предлагается вычислительная модель, представленная на рис. 2.30.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Центры распред. ГСМ	Хранилища ГСМ				Емкость центров распред.		
2		Хр-ще1	Хр-ще2	Хр-ще3	Хр-ще4			
3	Центр1	0,5	1,2	1,0	0,8	300		
4	Центр2	1,0	1,1	0,6	1,4	270		
5	Центр3	0,6	1,2	2,0	1,0	350		
6	Центр4	0,8	1,5	0,9	1,4	550		
7	Центр5	1,2	1,8	1,6	1,4	600		
8	Центр6	0,7	1,2	0,3	0,5	420		
9	Центр7	0,2	1,4	0,4	1,0	750		
10	Центр8	1,2	1,0	0,6	0,6	560		
11	Центр9	0,4	0,5	1,7	1,2	860		
12	Центр10	0,9	1,0	0,8	1,3	580		
13	Емкость хранилищ	1400	1200	1600	1400			
14								
15								
16	Центры распред. ГСМ	Хранилища ГСМ				Уравнения (неравенства)		
17		Хр-ще1	Хр-ще2	Хр-ще3	Хр-ще4	лев. часть	знак	прав. часть
18	Центр1					0	=	1
19	Центр2					0	=	1
20	Центр3					0	=	1
21	Центр4					0	=	1
22	Центр5					0	=	1
23	Центр6					0	=	1
24	Центр7					0	=	1
25	Центр8					0	=	1
26	Хр-ще9					0	=	1
27	Хр-ще10					0	=	1
28	лев. часть	0,00	0,00	0,00	0,00			
29	знак	<=	<=	<=	<=			
30	прав. часть	1400	1200	1600	1400			
31	Общее время доставки ГСМ					0,00	→	min

Рис. 2.30

Представленная вычислительная модель включает в себя две таблицы. Первая таблица служит для ввода и корректировки исходных данных задачи, вторая таблица – для ввода формул и расчета значений, соответствующих оптимальному решению. При этом диапазон B18:E27 отведен для отображения искомого плана прикрепления центров к хранилищам, а ячейка F31 – для расчета целевой функции.

В представленной модели содержатся следующие формулы:

- в диапазоне F18:F27 содержатся формулы =СУММ(B18:E18), ..., =СУММ(B27:E27), которые соответствуют левой части выражения (2.14);

- в диапазоне H18:H27 содержатся 1, которые соответствуют правой части выражения (2.14);

- в диапазоне B28:E28 содержатся формулы =СУММПРОИЗВ(\$F\$3:\$F\$12;B18:B27), ..., =СУММПРОИЗВ(\$F\$3:\$F\$12;E18:E27), которые соответствуют левой части выражения (2.15);

- в диапазоне B30:E30 содержатся формулы =B13, ..., =E13, которые соответствуют правой части выражения (2.15);

- в ячейке F31 содержится формула =СУММПРОИЗВ(B3:E12;B18:E27), которая соответствует целевой функции (2.16).

Ограничение (2.13) зададим непосредственно в диалоговом окне **Поиск решения**.

Вычислительная модель задачи в диалоговом окне Поиск решения

Вычислительная модель задачи в диалоговом окне **Поиск решения** представлена на рис. 2.31.

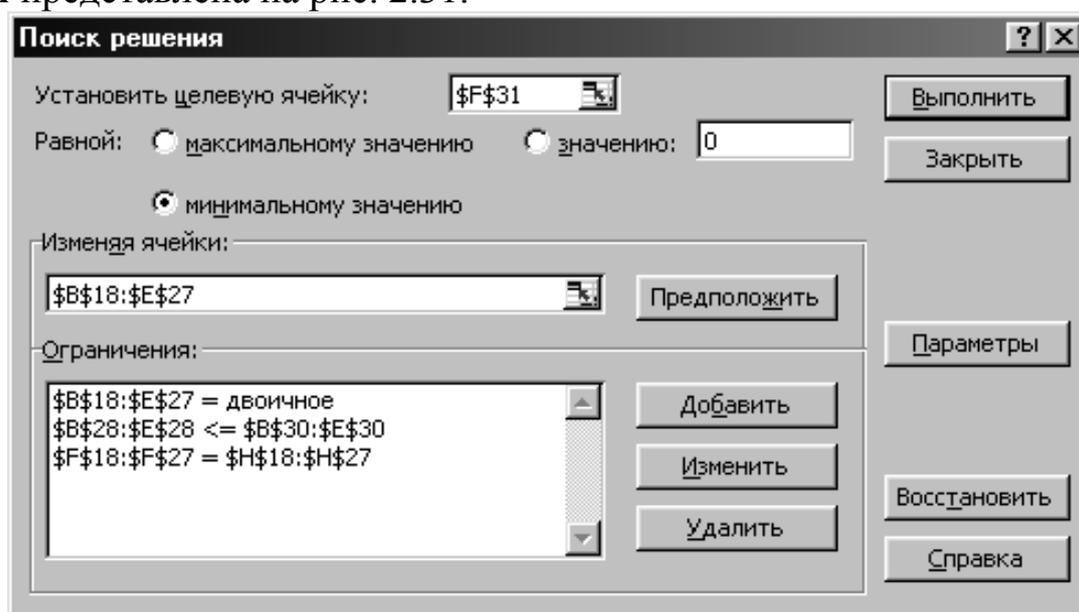


Рис. 2.31

Ограничение $B_{18}:E_{27} =$ двоичное соответствует выражению (2.13) и задается в диалоговом окне **Добавление ограничения** (рис. 2.32). В данном случае флажок *Неотрицательные значения* в диалоговом окне **Параметры поиска решения** можно не активизировать.

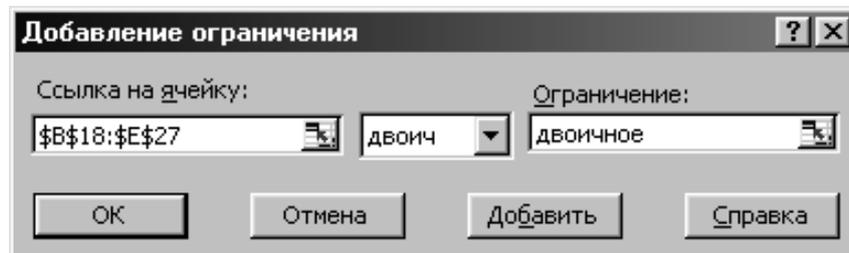


Рис. 2.32

Решение задачи представлено на рис. 2.33.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
15								
16	Центры распред. ГСМ	Хранилища ГСМ				Уравнения (неравенства)		
17		Хр-ще1	Хр-ще2	Хр-ще3	Хр-ще4	лев. часть	знак	прав. часть
18	Центр1	1	0	0	0	1	=	1
19	Центр2	0	1	0	0	1	=	1
20	Центр3	1	0	0	0	1	=	1
21	Центр4	0	0	1	0	1	=	1
22	Центр5	0	0	0	1	1	=	1
23	Центр6	0	0	1	0	1	=	1
24	Центр7	1	0	0	0	1	=	1
25	Центр8	0	0	0	1	1	=	1
26	Хр-ще9	0	1	0	0	1	=	1
27	Хр-ще10	0	0	1	0	1	=	1
28	лев. часть	1400	1130	1550	1160			
29	знак	<=	<=	<=	<=			
30	прав. часть	1400	1200	1600	1400			
31	Общее время доставки ГСМ					6,90	→	min

Рис. 2.33

Таким образом, оптимальный план прикрепления состоит в следующем: Хранилище1 обслуживает Центр1, Центр3 и Центр7, Хранилище2 – Центр2 и Центр9, Хранилище3 – Центр4, Центр6 и Центр10, Хранилище4 – Центр5 и Центр8. При таком плане общее время разовой доставки ГСМ от хранилищ к центрам распределения составит 6,9 часа.

2.2. Компьютерные модели задач нелинейного программирования

Решение задач нелинейного программирования рассмотрим на примере задачи распределения ограниченных финансовых средств в комплексных целевых программах регионального развития.

В условиях ограниченных экономических возможностей регионов особенно актуальным и практически значимым является развитие математических моделей и методов, ориентированных на решение экономических задач в условиях недостаточного финансирования.

Предлагаемая в настоящем параграфе модель позволяет сформировать оптимальный план распределения ограниченных финансовых средств в комплексных целевых программах регионального развития. При этом необходимо отметить, что получаемый на основе предлагаемой модели план следует рассматривать скорее как первоначальный опорный план при разработке реального плана финансирования. Это объясняется тем, что в моделях распределения финансовых средств в комплексных целевых программах регионального развития невозможно учесть всего многообразия факторов, которые принимают во внимание эксперты при разработке планов финансирования. Кроме того, многие из учитываемых на практике факторов трудно или вообще невозможно формализовать. Тем не менее, применение подобных моделей во многих случаях является полезным и оправданным, так как позволяет принимать практически рациональные решения на основе теоретических оптимальных решений.

Формализованную постановку задачи распределения недостаточных финансовых средств в комплексных целевых программах регионального развития предлагается сформулировать следующим образом.

Постановка задачи

Комплексная целевая программа включает в себя k подпрограмм, каждая из которых оценивается коэффициентом важности w_i , $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. Известно, что для выполнения i -й подпрограммы в полном объеме необходимо финансирование s_i , при этом минимально допустимый уровень финансирования составляет $h_i\%$. Принято допущение, что степень выполнения подпрограммы при выделении на неё суммы

в размере x_i составит $q_i = \frac{x_i}{s_i}$, $0 \leq x_i \leq s_i$. Необходимо найти такое распределение общей суммы финансирования R по k подпрограммам в случае дефицита ($\sum_{i=1}^k x_i > R$), чтобы степень выполнения всей программы Q была максимальной:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^k x_i &> R, \quad i = 1..k, \\ x_i &\geq s_i \times h_i\%. \end{aligned}$$

Важнейшим этапом конкретизации сформулированной постановки задачи является определение вида её целевой функции. Проблема определения (выбора и обоснования) вида целевой функции состоит в том, что сформулированная задача относится к классу многокритериальных (векторных) задач принятия решений, в которых вид целевой функции определяет не только значение, но и свойства оптимального решения, что предъявляет серьезные требования к выбору принципа оптимальности на основе соответствующего ему принципа компромисса.

Одним из наиболее распространенных принципов компромисса является принцип справедливой уступки, решающий проблему многокритериальности радикальным способом – за счет свертки набора критериев в один интегральный критерий, который с точки зрения системы предпочтений лица принимающего решение (ЛПР) эквивалентен этому набору критериев. Принцип справедливой уступки имеет две разновидности: принцип абсолютной уступки и принцип относительной уступки. Выбор одного из принципов компромисса позволяет достаточно аргументированно обосновать и выбор вида целевой функции.

Принципу абсолютной уступки соответствует принцип оптимальности, состоящий в максимизации суммы произведений локальных критериев на их весовые коэффициенты:

$$Q = \sum_{i=1}^k w_i q_i.$$

При данном принципе компромисса высокое значение интегрального критерия получается за счет высоких значений одних локальных критериев при сравнительно малых значениях других критериев, т.е. наблюдается резкая дифференциация уровней отдельных локальных критериев.

Принципу относительной уступки соответствует принцип оптимальности, состоящий в максимизации произведения критериев, возведенных в степень их весовых коэффициентов:

$$Q = \prod_{i=1}^k q_i^{w_i}.$$

Принцип относительной уступки весьма чувствителен к величине локальных критериев, причем за счет относительности уступки происходит автоматическое снижение "цены" уступки для локальных критериев с большой величиной и наоборот. В результате проводится значительное сглаживание уровней локальных критериев.

Рассмотренные интегральные критерии (аддитивный и мультипликативный) приводят к решениям, которые являются предельными частными случаями области решений, задаваемой обобщенным оператором агрегирования:

$$Q = \sum_{i=1}^k w_i q_i^{1/p},$$

где p – коэффициент, задающий вид оператора агрегирования.

При $p=1$ оператор является аддитивным, при $p<1$ – квазидизъюнктивным, при $p>1$ – квазиконъюнктивным. При $p \rightarrow \infty$ ($p>1$) решение, задаваемое обобщенным оператором агрегирования, асимптотически приближается к решению, задаваемому мультипликативным оператором.

Квазиконъюнктивные и квазидизъюнктивные операторы можно сформировать, используя генерирующие функции, показанные на рис. 2.34.

Чтобы оператор стал квазиконъюнктивным, необходимо, чтобы функция $Y(x)$ была выпуклой вниз или линейной, а $g(x) > Y(x)$. Используя в качестве генерирующих функций $g(x) = x^{1/p}$ ($p>1$) и $Y(x) = x$, получим оператор данного класса. Смысл квазиконъюнктивного оператора

состоит в том, что при малых значениях одного или нескольких агрегируемых критериев значение оператора уменьшается непропорционально x . Применение квазиконъюнктивных операторов (как и мультипликативного) обуславливается следующим правилом: для высокого значения интегрального критерия (агрегированного оператора) необходимо, чтобы все агрегируемые критерии имели высокое значение.

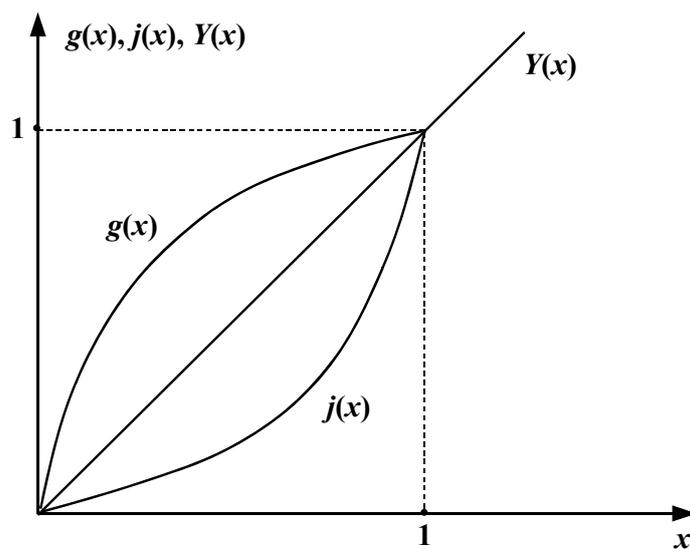


Рис. 2.34

Чтобы оператор стал квазиконъюнктивным, необходимо, чтобы функция $Y(x)$ была выпуклой вниз или линейной, а $g(x) > Y(x)$. Используя в качестве генерирующих функций $g(x) = x^{1/p}$ ($p > 1$) и $Y(x) = x$, получим оператор данного класса. Смысл квазиконъюнктивного оператора состоит в том, что при малых значениях одного или нескольких агрегируемых критериев значение оператора уменьшается непропорционально x . Применение квазиконъюнктивных операторов (как и мультипликативного) обуславливается следующим правилом: для высокого значения интегрального критерия (агрегированного оператора) необходимо, чтобы все агрегируемые критерии имели высокое значение.

Чтобы оператор стал квазидизъюнктивным, необходимо, чтобы функция $Y(x)$ была выпуклой вверх или линейной, а $j(x) < Y(x)$. Используя в качестве генерирующих функций $j(x) = x^{1/p}$ ($0 < p < 1$) и $Y(x) = x$, получим оператор данного класса. Условием использования квазидизъюнктивных операторов (как и аддитивного) является следующее правило: для высокого значения интегрального критерия (агрегиро-

ванного оператора) достаточно, чтобы хотя бы один (или несколько) агрегируемый критерий имел высокое значение. Необходимо отметить, что квазидизъюнктивные операторы значительно менее чувствительны к изменению p ($0 < p < 1$), чем квазиконъюнктивные операторы ($p > 1$), поэтому первые из них можно исключить из рассмотрения при практическом решении задач.

Таким образом, выбор того или иного вида целевой функции должен основываться на принятом принципе компромисса, который, в свою очередь, определяется из системы предпочтений лица, принимающего решение.

Кроме задания вида целевой функции в операторе агрегирования, необходимо также указать весовые коэффициенты локальных критериев, которые могут быть определены с помощью различных методов экспертных оценок, широко представленных в научной литературе. В предлагаемой модели рассмотрен метод парных сравнений. Достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет экспертам задавать не векторы весов, а векторы приоритетов, т.е. производить оценку на качественном уровне.

Пример

На комплексную целевую программу регионального развития, включающую в себя 6 подпрограмм (условные наименования "альфа", "сигма", "гамма", "дельта", "омега", "каппа"), выделено 150 млн. у.е. Уровень финансирования s_i , необходимый для выполнения каждой подпрограммы в полном объеме, а также их минимально допустимые уровни финансирования приведены в нижеследующей таблице.

	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
Необходимое финансирование, млн. у.е.	20,00	30,00	10,00	40,00	50,00	30,00
Минимально допустимый уровень финансирования, %	20%	30%	20%	25%	25%	30%
Минимально допустимый уровень финансирования, млн. у.е.	4,00	9,00	2,00	10,00	12,50	9,00

Принято допущение, что степень выполнения подпрограммы при выделении на неё суммы в размере x_i составит $q_i = \frac{x_i}{s_i}$, $0 \leq x_i \leq s_i$. Для оценки важности подпрограмм сформирована группа из трех экспертов. Необходимо найти такое распределение общей суммы финансирования по подпрограммам, чтобы степень выполнения всей программы была максимальной.

Проверяем условие $\sum_{i=1}^k x_i > R$. Так как $\sum_{i=1}^6 x_i = 180$, а $R = 150$, то имеем недофинансирование в объеме 30 млн. у.е.

Результаты оценки важности подпрограмм каждым из экспертов представлены в табл. 2.1-2.3. В указанных таблицах: 0 – i -я подпрограмма менее важна, чем j -я подпрограмма; 1 – важности i -й и j -й подпрограмм совпадают; 2 – i -я подпрограмма более важна, чем j -я подпрограмма.

Таблица 2.1

Оценка первого эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа	Сумма баллов
альфа		0	1	0	0	0	1
сигма	2		0	0	2	1	5
гамма	1	2		0	2	1	6
дельта	2	2	2		2	2	10
омега	2	0	0	0		2	4
каппа	2	1	1	0	0		4
Общая сумма баллов:							30

Таблица 2.2

Оценка второго эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа	Сумма баллов
альфа		0	1	0	0	0	1
сигма	2		2	0	0	1	5
гамма	1	0		0	2	0	3
дельта	2	2	2		2	2	10
омега	2	2	0	0		1	5
каппа	2	1	2	0	1		6
Общая сумма баллов:							30

Таблица 2.3

Оценка третьего эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа	Сумма баллов
альфа		0	0	0	1	0	1
сигма	2		2	0	1	1	6
гамма	2	0		0	2	1	6
дельта	2	2	2		2	2	10
омега	1	1	0	0		0	2
каппа	2	1	0	0	2		5
Общая сумма баллов:							30

На основе полученных экспертных оценок рассчитываются важности подпрограмм w_i :

$$w_i = \frac{\text{Сумма баллов } i\text{-й подпрограммы}}{\text{Общая сумма баллов}}$$

Результаты обработки экспертных оценок сведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Сводная таблица экспертизы важности подпрограмм

Эксперты	Подпрограммы						Сумма
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа	
Эксперт1	0,03	0,17	0,20	0,33	0,13	0,13	1,00
Эксперт2	0,03	0,17	0,10	0,33	0,17	0,20	1,00
Эксперт3	0,03	0,20	0,20	0,33	0,07	0,17	1,00
Итоговые важности подпрограмм	0,03	0,18	0,17	0,33	0,12	0,17	1,00

В табл. 2.4 итоговые важности подпрограмм являются средними арифметическими важностей, рассчитанных по экспертным оценкам.

После проведения экспертизы и получения значений коэффициентов важности w_i , можно переходить к решению задачи по оптимальному распределению финансовых ресурсов. Так как целевая функция $Q = \sum_{i=1}^k w_i q_i^{1/p}$ имеет нелинейный вид, то для решения рас-

сма триваемой задачи должны быть применены методы нелинейной оптимизации.

Для решения задачи воспользуемся программной надстройкой MS Excel "Поиск решения", в которой реализованы два итеративных метода поиска оптимальных решений: метод Ньютона и метод сопряженных градиентов. Для решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться как первым, так и вторым методом. Заметим только, что при использовании метода Ньютона запрашивается больше памяти ПК, но выполняется меньше итераций, и наоборот, при использовании метода сопряженных градиентов запрашивается меньше памяти, но выполняется больше итераций.

Решение задачи произведено для четырех видов оператора агрегирования и приведено в табл. 2.5-2.8.

Таблица 2.5

Оптимальное распределение финансовых средств по подпрограммам при аддитивном критерии

Параметры распределения	Подпрограммы					
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
Объем выделенных финансовых средств	4,00	30,00	10,00	40,00	36,00	30,00
Степень выполнения подпрограмм	0,20	1,00	1,00	1,00	0,72	1,00
Степень выполнения всей программы	0,94					

Таблица 2.6

Оптимальное распределение финансовых средств по подпрограммам при квазидизъюнктивном критерии ($p = 0,2$)

Параметры распределения	Подпрограммы					
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
Объем выделенных финансовых средств	4,00	30,00	2,00	40,00	44,00	30,00
Степень выполнения подпрограмм	0,20	1,00	0,20	1,00	0,88	1,00
Степень выполнения всей программы	0,74					

Таблица 2.7

Оптимальное распределение финансовых средств
по подпрограммам при квазиконъюнктивном критерии ($p = 2$)

Параметры распределения	Подпрограммы					
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
Объем выделенных финансовых средств	6,27	30,00	10,00	40,00	33,73	30,00
Степень выполнения подпрограмм	0,31	1,00	1,00	1,00	0,67	1,00
Степень выполнения всей программы	0,96					

Таблица 2.8

Оптимальное распределение финансовых средств
по подпрограммам при мультипликативном критерии

Параметры распределения	Подпрограммы					
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
Объем выделенных финансовых средств	8,57	30,00	10,00	40,00	31,43	30,00
Степень выполнения подпрограмм	0,43	1,00	1,00	1,00	0,63	1,00
Степень выполнения всей программы	0,92					

Решение задачи в табличном виде может быть также дополнено его графическим представлением. Полезность такого представления объясняется тем, что в процессе выработки решения участие принимает не только формально-логическое, но и интуитивно-абстрактное (правополушарное) мышление человека (по данным нейрофизиологов объем информации, которую человеческий мозг способен воспринимать и анализировать в виде геометрических образов, на несколько порядков превышает объем информации, которую он может обработать в буквенно-цифровом виде).

На рис. 2.35 показана диаграмма, дополняющая табличное представление оптимального решения применительно к квазиконъюнктивному критерию.



Рис. 2.35

Заметим, что в рассмотренной задаче для получения значений коэффициентов важности w_i использовалась шкала отношений из трёх градаций. Для многих практических задач такой градации может оказаться недостаточно для адекватного сравнения объектов. В этом случае необходимо использовать расширенную шкалу отношений, например, шкалу, предложенную Т. Саати (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Шкала отношений Саати

Степень значимости	Определение	Объяснение
1	Одинаковая значимость	Два объекта не имеют преимуществ друг перед другом
3	Некоторое преимущество одного объекта перед другим (слабое преимущество)	Существуют соображения в пользу предпочтения одного из объектов, однако эти соображения недостаточно убедительны
5	Существенное или сильное преимущество	Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из объектов

Степень значимости	Определение	Объяснение
7	Очевидное или очень сильное преимущество	Убедительное свидетельство в пользу одного объекта перед другим
9	Абсолютное преимущество	Свидетельства в пользу предпочтительности одного объекта другому в высшей степени убедительны
2,4,6,8	Промежуточные значения между соседними суждениями	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение

Правомочность этой шкалы доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами. При использовании указанной шкалы ЛПР, сравнивая два объекта по какому-либо показателю, должен поставить этому сравнению число в интервале от 1 до 9 или обратное значение чисел.

Шкала Саати используется в методе анализа иерархий (МАИ), широко используемом на практике для решения слабоструктурированных задач. По нашему мнению, этот метод может оказаться достаточно эффективным в процессе решения определенного круга задач по распределению финансовых средств, а также в процессе аналитического стратегического планирования.

Метод анализа иерархий имеет ряд модификаций, которые различаются характером связей между критериями и альтернативами, а также методами сравнения альтернатив.

По характеру связей между критериями и альтернативами определяется два типа иерархий. К первому типу относятся такие иерархии, у которых каждый критерий, имеющий связь с альтернативами, связан со всеми рассматриваемыми альтернативами (тип иерархий с одинаковым числом и функциональным составом альтернатив под критериями). Ко второму типу иерархий принадлежат такие, у которых каждый критерий, имеющий связь с альтернативами, связан не со всеми рассматриваемыми альтернативами (тип иерархий с различным числом и функциональным составом альтернатив под критериями).

По характеру связей между критериями и альтернативами определяется два типа иерархий. К первому типу относятся такие иерархии, у которых каждый критерий, имеющий связь с альтернативами, связан со всеми рассматриваемыми альтернативами (тип иерархий с одинаковым числом и функциональным составом альтернатив под критериями). Ко второму типу иерархий принадлежат такие, у кото-

рых каждый критерий, имеющий связь с альтернативами, связан не со всеми рассматриваемыми альтернативами (тип иерархий с различным числом и функциональным составом альтернатив под критериями).

В МАИ имеется три метода сравнения альтернатив: попарное сравнение; сравнение альтернатив относительно стандартов и сравнение альтернатив копированием. Выбор того или иного метода зависит от конкретной постановки задачи по распределению финансовых средств.

В рассмотренной задаче для получения значений коэффициентов важности w_i был использован упрощенный метод парных сравнений со шкалой отношений из трех градаций. В этом методе не учитывалась степень предпочтения одной подпрограммы над другой, а также не проводилась оценка однородности суждений. Необходимость последнего положения объясняется тем, что в практических задачах часто наблюдается нарушение транзитивной однородности, что объясняется нейрофизиологическими ограничениями интеллекта человека (особенные затруднения наблюдаются при сравнении 9 и более объектов).

В МАИ однородность суждений оценивается индексом однородности (ИО) или отношением однородности (ОО) в соответствии со следующими выражениями:

$$ИО = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1};$$
$$ОО = \frac{ИО}{E(ИО)},$$

где $E(ИО)$ – математическое ожидание индекса однородности случайным образом составленной матрицы парных сравнений \mathbf{A} , которое основано на экспериментальных данных, полученных Т. Саати;

n – порядок матрицы \mathbf{A} ;

λ_{\max} – максимальное собственное значение матрицы \mathbf{A} .

В качестве допустимого используется значение $ОО \leq 0,10$. Если для матрицы парных сравнений отношение однородности $ОО > 0,10$, то это свидетельствует о существенном нарушении логичности суждений, допущенных экспертом при заполнении матрицы, поэтому эксперту предлагается пересмотреть данные, использованные для построения матрицы, чтобы улучшить однородность.

Допустим, в рассмотренной задаче важности подпрограмм были оценены экспертами в соответствии со шкалой Саати (табл. 2.10 – 2.12).

Таблица 2.10

Оценка первого эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
альфа	1,00	0,50	1,00	0,50	0,33	0,33
сигма	2,00	1,00	1,00	0,14	1,00	0,33
гамма	1,00	1,00	1,00	0,50	2,00	1,00
дельта	2,00	7,00	2,00	1,00	3,00	2,00
омега	3,00	1,00	0,50	0,33	1,00	0,33
каппа	3,00	3,00	1,00	0,50	3,00	1,00
$\lambda_{\max}=6,599$; ИО=0,120; ОО=0,097						

Таблица 2.11

Оценка второго эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
альфа	1,00	0,50	1,00	0,50	0,33	0,33
сигма	2,00	1,00	1,00	0,14	1,00	0,33
гамма	1,00	1,00	1,00	0,50	2,00	1,00
дельта	2,00	7,00	2,00	1,00	3,00	2,00
омега	3,00	1,00	0,50	0,33	1,00	0,33
каппа	3,00	3,00	1,00	0,50	3,00	1,00
$\lambda_{\max}=6,622$; ИО=0,124; ОО=0,100						

Таблица 2.12

Оценка третьего эксперта

Подпрограммы	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа
альфа	1,00	1,00	1,00	0,50	0,33	0,25
сигма	1,00	1,00	0,50	0,11	2,00	0,50
гамма	1,00	2,00	1,00	0,50	1,00	1,00
дельта	2,00	9,00	2,00	1,00	2,00	2,00
омега	3,00	0,50	1,00	0,50	1,00	1,00
каппа	4,00	2,00	1,00	0,50	1,00	1,00
$\lambda_{\max}=6,623$; ИО=0,125; ОО=0,100						

Результаты обработки экспертных оценок сведены в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Сводная таблица экспертизы важности подпрограмм

Эксперты	Подпрограммы						Сумма
	альфа	сигма	гамма	дельта	омега	каппа	
Эксперт1	0,07	0,11	0,13	0,34	0,12	0,23	1,00
Эксперт2	0,03	0,19	0,16	0,37	0,10	0,15	1,00
Эксперт3	0,08	0,10	0,13	0,36	0,14	0,19	1,00
Итоговые важности подпрограмм	0,06	0,13	0,14	0,35	0,12	0,19	1,00

Для оценки согласованности мнений экспертов можно использовать коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{m^2 n(n^2 - 1)},$$

где S – сумма квадратов разностей между индивидуальными значениями оценок и средним значением;

m – количество экспертов;

n – количество объектов.

Коэффициент конкордации изменяется от нуля до единицы. Чем ближе он к единице, тем выше степень согласованности мнений экспертов.

Для рассмотренной задачи

$$W = \frac{12 \cdot 0,453}{3^2 \cdot 6 \cdot (6^2 - 1)} \approx 0,20,$$

что свидетельствует о низкой степени согласованности экспертов.

В этом случае в целях повышения степени объективности и качества процедуры принятия решения может быть организовано обсуждение полученных результатов для выявления причин разногласия оценок (в рассмотренном примере несогласованность мнений объясняется оценками второго эксперта).

Глава 3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ И ДИНАМИКИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Компьютерные модели для исследования взаимосвязей социально-экономических процессов

3.1.1. Корреляционные модели

В экономических исследованиях одной из важных задач является анализ зависимостей между изучаемыми переменными. Зависимость между переменными может быть либо *функциональной*, либо *стохастической (вероятностной)*. Для оценки тесноты и направления связи между изучаемыми переменными при их стохастической зависимости пользуются показателями *ковариации* и *корреляции*.

Ковариацией $cov(x, y)$ случайных величин X и Y называют среднее произведений отклонений каждой пары значений величин X и Y в исследуемых массивах данных:

$$cov(x, y) = \overline{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Ковариация есть характеристика системы случайных величин, описывающая помимо рассеивания величин X и Y еще и линейную связь между ними. В теории вероятностей доказывается, что для независимых случайных величин X и Y их ковариация равна нулю, а для зависимых случайных величин она отличается от нуля (хотя и необязательно). Поэтому ненулевое значение ковариации означает зависимость случайных величин. Однако обращение в нуль ковариации не гарантирует независимости, бывают зависимые случайные величины, ковариация которых равна нулю. Из формулы определения ковариации видно, что ковариация характеризует не только зависимость ве-

личин, но и их рассеивание. Действительно, если, например, одна из величин X или Y мало отличается от своего математического ожидания (почти не случайна), то показатель ковариации будет мал, какой бы тесной зависимостью ни были связаны величины X и Y . Так что обращение в нуль ковариации величин X и Y является не достаточным условием для их независимости, а только необходимым.

Использование ковариации в качестве меры связи признаков не совсем удобно, так как показатель ковариации не нормирован и при переходе к другим единицам измерения (например, от метров к километрам) меняет значение. Поэтому в статистическом анализе показатель ковариации сам по себе используется редко; он фигурирует обычно как промежуточный элемент расчета линейного коэффициента корреляции r_{xy} :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

В 1889 г. Ф. Голтон* высказал мысль о коэффициенте, который мог бы измерить тесноту связи между двумя коррелируемыми признаками. В начале 90-х гг. XIX в. Пирсон, Эджворт и Велдон получили формулу линейного коэффициента корреляции

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Линейный коэффициент корреляции характеризует степень тесноты не всякой, а только линейной зависимости. При нелинейной зависимости между явлениями линейный коэффициент корреляции теряет смысл и для измерения тесноты связи применяют так называемое корреляционное отношение, известное также под названием "индекс корреляции".

Линейная вероятностная зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать (или убывать) по линейному закону. Эта тенденция к линейной зависимости может быть более или менее ярко

* (Galton Francis) Голтон Фрэнсис (1822–1911) – английский психолог и антрополог. В математике Голтон разработал методы статистической обработки результатов исследований (в частности, метод исчисления корреляций между переменными); ввел коэффициент корреляции; создал так называемую биометрическую школу.

выраженной, т.е. более или менее приближаться к функциональной, если случайные величины X и Y связаны точной линейной функциональной зависимостью $y=ax+b$, то $r_{xy}=\pm 1$. В общем случае, когда величины X и Y связаны произвольной вероятностной зависимостью, линейный коэффициент корреляции принимает значение в пределах $-1 < r_{xy} < 1$, тогда качественная оценка тесноты связи величин X и Y может быть выявлена на основе шкалы Чеддока (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Теснота связи	Величина коэффициента корреляции при наличии:	
	прямой связи	обратной связи
Слабая	0,1 – 0,3	(-0,1) – (-0,3)
Умеренная	0,3 – 0,5	(-0,3) – (-0,5)
Заметная	0,5 – 0,7	(-0,5) – (-0,7)
Высокая	0,7 – 0,9	(-0,7) – (-0,9)
Весьма высокая	0,9 – 0,99	(-0,9) – (-0,99)

В теории разработаны и на практике применяются различные модификации формул расчета линейного коэффициента корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y}; \quad (3.1)$$

$$r_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] \cdot [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}}; \quad (3.2)$$

$$r_{xy} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2 \sigma_x \sigma_y}. \quad (3.3)$$

Приведенные формулы в определенных случаях имеют некоторые преимущества друг перед другом. Например, при небольших значениях n ($n < 30$) обычно употребляются формулы (3.2) и (3.3).

Для расчета коэффициента корреляции в MS Excel можно воспользоваться режимом работы "Корреляция" надстройки "Пакет анализа" или функцией КОРРЕЛ.

Пример. По данным, представленным на рабочем листе MS Excel (табл. 3.2), требуется проверить гипотезу о наличии взаимосвязи между уровнем образования и уровнем преступности в центральном регионе России (данные Госкомстата РФ).

Примечания:

1. Уровень образования рассчитывался как численность лиц с высшим и средним специальным образованием на 1000 жителей области.

2. Уровень преступности рассчитывался как число совершенных преступлений на 100 тыс. жителей области.

Таблица 3.2

	В	С	Д
4	Область	Уровень образования	Уровень преступности
5	Брянская	735	908
6	Владимирская	788	791
7	Ивановская	779	804
8	Калужская	795	701
9	Костромская	740	685
10	г. Москва	902	496
11	Московская	838	536
12	Нижегородская	763	936
13	Орловская	762	662
14	Рязанская	757	671
15	Смоленская	772	920
16	Тверская	764	1040
17	Тульская	764	809
18	Ярославская	755	882

Для решения задачи воспользуемся режимом "Корреляция" надстройки "Пакет анализа". Значения параметров, установленных в одноименных диалоговых окнах, представлены на рис. 3.1, а рассчитанные в данном режиме показатели – в табл. 3.3.

Как видно из табл. 3.3, связь "уровень образования" – "уровень преступности" является заметной и обратной ($r_{xy} = -0,66$), т.е. с повышением уровня образования уровень преступности уменьшается. Такой же результат мы получим, воспользовавшись функцией КОРРЕЛ, задав её следующим образом:

=КОРРЕЛ(С5:С18;D5:D18).

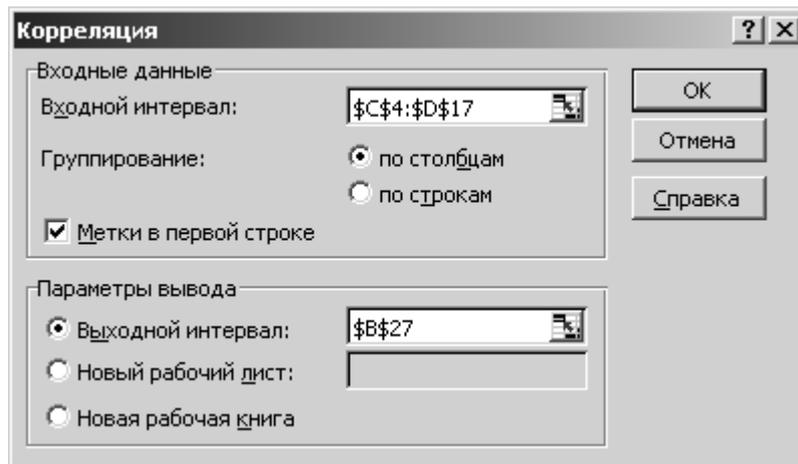


Рис. 3.1

Таблица 3.3

	В	С	Д
27		Уровень образования	Уровень преступности
28	Уровень образования	1	
29	Уровень преступности	-0,66	1

3.1.2. Регрессионные модели

В параграфе 3.1.1 были рассмотрены основные аспекты корреляционного анализа, который имеет своей задачей определение тесноты и направления связи между изучаемыми величинами. Наряду с корреляционным анализом обычно проводится и *регрессионный анализ*, который заключается в определении аналитического выражения связи зависимой случайной величины Y (называемой также *результативным признаком*) с независимыми случайными величинами X_1, X_2, \dots, X_m (называемыми также *факторами*).

Форма связи результативного признака Y с факторами X_1, X_2, \dots, X_m получила название *уравнения регрессии*. В зависимости от типа выбранного уравнения различают *линейную* и *нелинейную* регрессию (в последнем случае возможно дальнейшее уточнение: квадратичная, экспоненциальная, логарифмическая и т. д.).

В зависимости от числа взаимосвязанных признаков различают *парную* и *множественную* регрессию. Если исследуется связь между

двумя признаками (результативным и факторным), то регрессия называется *парной*, если между тремя и более признаками – *множественной* (многофакторной) регрессией. Например, Кейнсом было предложено уравнение парной линейной регрессии, выражающей зависимость частного потребления C от располагаемого дохода Y_d : $C = C_0 + bY_d$, где $C_0 > 0$ – величина автономного потребления, $0 < b < 1$ – предельная склонность к потреблению.

При изучении регрессии следует придерживаться определенной последовательности этапов:

1. Задание аналитической формы уравнения регрессии и определение параметров регрессии.

2. Определение в регрессии степени стохастической взаимосвязи результативного признака и факторов, проверка общего качества уравнения регрессии.

3. Проверка статистической значимости каждого коэффициента уравнения регрессии и определение их доверительных интервалов.

Основное содержание выделенных этапов рассмотрим на примере множественной линейной регрессии, реализованной в режиме "Регрессия" надстройки "Пакет анализа" Microsoft Excel.

Этап 1. Уравнение линейной множественной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m,$$

где \hat{y} – теоретические значения результативного признака, полученные в результате подстановки соответствующих значений факторных признаков в уравнение регрессии;

x_1, x_2, \dots, x_m – значения факторных признаков;

a_0, a_1, \dots, a_m – параметры уравнения (коэффициенты регрессии).

Параметры уравнения регрессии могут быть определены с помощью *метода наименьших квадратов* (именно этот метод и используется в MS Excel). Сущность данного метода заключается в нахождении параметров модели (a_i), при которых минимизируется сумма квадратов отклонений эмпирических (фактических) значений результативного признака от теоретических, полученных по выбранному уравнению регрессии, т. е.

$$\sigma_{\Phi}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n};$$

• *остаточную дисперсию* результативного признака Y , отображающую влияние только остаточных факторов:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - (m + 1)}.$$

При корреляционной связи результативного признака и факторов выполняется соотношение

$$\sigma_{\Phi}^2 < \sigma_y^2, \text{ при этом } \sigma_y^2 = \sigma_{\Phi}^2 + \sigma_0^2.$$

Для анализа общего качества уравнения линейной многофакторной регрессии используют обычно *множественный коэффициент детерминации* R^2 , называемый также *квадратом коэффициента множественной корреляции* R . Множественный коэффициент детерминации рассчитывается по формуле

$$R^2 = \frac{\sigma_{\Phi}^2}{\sigma_y^2}$$

и определяет долю вариации результативного признака, обусловленную изменением факторных признаков, входящих в многофакторную регрессионную модель.

Так как в большинстве случаев уравнение регрессии приходится строить на основе выборочных данных, то возникает вопрос об адекватности построенного уравнения генеральным данным. Для этого проводится проверка статистической значимости коэффициента детерминации R^2 на основе F -критерия Фишера

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m},$$

где n – число наблюдений;

m – число факторов в уравнении регрессии.

Примечание. Если в уравнении регрессии свободный член $a_0 = 0$, то числитель $n-m-1$ следует увеличить на 1, т.е. он будет равен $n-m$.

В математической статистике доказывается, что если гипотеза $H_0 : R^2 = 0$ выполняется, то величина F имеет F -распределение с $k = m$ и $l = n-m-1$ числом степеней свободы, т. е.

$$\frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-m-1}{m} = F(k = m, l = n-m-1).$$

Гипотеза $H_0 : R^2 = 0$ о незначимости коэффициента детерминации R^2 отвергается, если $F_p > F_{пр, \alpha}^{кр}$.

При значениях $R^2 > 0,7$ считается, что вариация результативного признака Y обусловлена в основном влиянием включенных в регрессионную модель факторов X .

Для оценки адекватности уравнения регрессии часто также используют показатель *средней ошибки аппроксимации*:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \cdot 100\%.$$

Этап 3. Возможна ситуация, когда часть вычисленных коэффициентов регрессии не обладает необходимой степенью значимости, т.е. значения данных коэффициентов будут меньше их стандартной ошибки. В этом случае такие коэффициенты должны быть исключены из уравнения регрессии. Поэтому проверка адекватности построенного уравнения регрессии наряду с проверкой значимости коэффициента детерминации R^2 включает в себя также и проверку значимости каждого коэффициента регрессии.

Значимость коэффициентов регрессии проверяется с помощью t -критерия Стьюдента:

$$t = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}},$$

где σ_{a_i} – стандартное значение ошибки для коэффициента регрессии a_i .

В математической статистике доказывается, что если гипотеза $H_0 : a_i = 0$ выполняется, то величина t имеет распределение Стьюдента с $k = n - m - 1$ числом степеней свободы, т.е.

$$\frac{a_i}{\sigma_{a_i}} = t(k = n - m - 1).$$

Гипотеза $H_0 : a_i = 0$ о незначимости коэффициента регрессии отвергается, если $|t_p| > |t_{кр}|$.

Кроме того, зная значение $t_{кр}$, можно найти границы доверительных интервалов для коэффициентов регрессии:

$$\begin{aligned} a_i^{\min} &= a_i - t_{кр} \sigma_{a_i}; \\ a_i^{\max} &= a_i + t_{кр} \sigma_{a_i}. \end{aligned}$$

При экономической интерпретации уравнения регрессии также широко используются *частные коэффициенты эластичности*, показывающие, на сколько процентов в среднем изменится значение результативного признака при изменении значения соответствующего факторного признака на 1 %, и определяемые по формуле

$$\mathcal{E}_{x_i} = a_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

где \bar{x}_i – среднее значение соответствующего факторного признака;

\bar{y} – среднее значение результативного признака;

a_i – коэффициент регрессии при соответствующем факторном признаке.

Для построения и анализа регрессионных моделей в MS Excel служит целый ряд инструментов: режим работы "Регрессия" надстройки "Пакет анализа", набор статистических функций (ЛИНЕЙН, НАКЛОН, ПРЕДСКАЗ и др.), "Мастер диаграмм". Рассмотрим основные из них.

Пример. Данные о прибыли предприятий Y , величине оборотных средств X_1 и стоимости основных фондов X_2 приведены в табл. 3.4, сформированной на рабочем листе MS Excel.

Таблица 3.4

	В	С	Д	Е
2	Номер предприятия	Прибыль Y , млн руб.	Величина оборотных средств X_1 , млн руб.	Стоимость основных фондов X_2 , млн руб.
3	1	188	129	510
4	2	78	64	190
5	3	93	69	240
6	4	152	87	470
7	5	55	47	110
8	6	161	102	420

По представленным данным необходимо определить параметры уравнения линейной регрессии и провести его анализ.

Для решения задачи используем режим работы "Регрессия". Значения параметров, установленных в одноименном диалоговом окне, представлены на рис. 3.2, а рассчитанные в данном режиме показатели – в табл. 3.5–3.7.

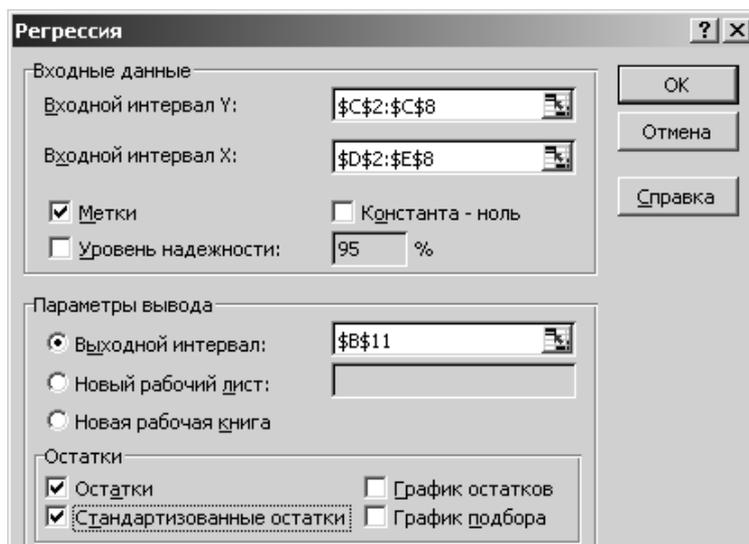


Рис. 3.2

В табл. 3.5 сгенерированы результаты по регрессионной статистике.

Таблица 3.5

	В	С
11	ВЫВОД ИТОГОВ	
12		
13	<i>Регрессионная статистика</i>	
14	Множественный R	0,997
15	R-квадрат	0,995
16	Нормированный R-квадрат	0,991
17	Стандартная ошибка	5,050
18	Наблюдения	6

В табл. 3.6 сгенерированы результаты дисперсионного анализа, которые используются для проверки значимости коэффициента детерминации R^2 .

Таблица 3.6

	В	С	Д	Е	Ф	Г
22	Дисперсионный анализ					
21		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
22	Регрессия	2	13962,33	6981,16	273,74	0,0004
23	Остаток	3	76,51	25,50		
24	Итого	5	14038,83			

В табл. 3.7 сгенерированы значения коэффициентов регрессии a_i и их статистические оценки.

Таблица 3.7

	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І	Ј
26		<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	<i>Нижние 95,0%</i>	<i>Верхние 95,0%</i>
27	У-пересечение	-1,94	7,63	-0,25	0,82	-26,21	22,32	-26,21	22,32
28	Величина оборотных средств X_1 , млн руб.	0,69	0,20	3,53	0,04	0,07	1,32	0,07	1,32

29	Стоимость основных фондов X_2 , млн руб.	0,20	0,04	5,75	0,01	0,09	0,31	0,09	0,31
----	--	------	------	------	------	------	------	------	------

Перейдем к анализу сгенерированных таблиц.

Рассчитанные в табл. 3.7 (ячейки C27:C29) коэффициенты регрессии a_i позволяют построить уравнение, выражающее зависимость прибыли предприятий Y от величины оборотных средств X_1 и стоимости основных фондов X_2 :

$$\hat{y} = -1,94 + 0,69x_1 + 0,20x_2.$$

Значение множественного коэффициента детерминации $R^2 = 0,995$ (ячейка C15 в табл. 3.5) показывает, что 99,5 % общей вариации результативного признака объясняется вариацией факторных признаков X_1 и X_2 . Значит, выбранные факторы существенно влияют на прибыль предприятий, что подтверждает правильность их включения в построенную модель.

Рассчитанный уровень значимости $\alpha_p = 0,0004 < 0,05$ (показатель *Значимость F* в табл. 3.6) подтверждает значимость R^2 .

Подводя итог предварительному анализу уравнения регрессии, можно сделать вывод, что его целесообразно пересчитать без свободного члена a_0 , который не является статистически значимым.

Для пересчета уравнения регрессии в диалоговом окне **Регрессия** необходимо задать те же самые параметры (см. рис. 3.2), за исключением лишь того, что следует активизировать флажок *Константа*. В случае, если незначимым является коэффициент при факторном признаке, следует пересмотреть набор признаков в уравнении регрессии.

Таким образом, получаем новое уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 0,66x_1 + 0,21x_2.$$

Проверка значимости коэффициента детерминации R^2 и коэффициентов a_1 и a_2 при факторных признаках подтверждают адекватность полученного уравнения.

Экономическая сущность коэффициентов a_1 и a_2 в полученном уравнении регрессии состоит в том, что они показывают степень влияния каждого из факторов на прибыль предприятий. Так, увеличе-

ние оборотных средств на 1 млн руб. ведет к росту прибыли на 0,66 млн руб., а увеличение основных фондов на 1 млн руб. ведет к росту прибыли на 0,21 млн руб.

Кроме того, дополнительно можно рассчитать и коэффициенты эластичности $\mathcal{E}_{X_1}=0,45$ и $\mathcal{E}_{X_2}=0,55$, которые показывают, что по абсолютному приросту наибольшее влияние на прибыль предприятий оказывает второй фактор: увеличение стоимости основных фондов X_2 на 1 % вызывает рост прибыли на 0,55 %, тогда как рост величины оборотных средств X_1 на 1 % способствует росту прибыли на 0,45 %.

В том случае, если не требуется проводить полный анализ уравнения регрессии, удобно использовать функцию ЛИНЕЙН. Эта функция рассчитывает массив показателей, описывающих уравнение линейной множественной (или парной) регрессии на основе метода наименьших квадратов. Для получения массива значений функцию ЛИНЕЙН необходимо вводить, используя комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

Для рассмотренной задачи функция ЛИНЕЙН будет иметь следующий вид:

$$\{=\text{ЛИНЕЙН}(C3:C8;D3:E8;0;1)\}.$$

Удобным инструментом построения парных регрессионных моделей является "Мастер диаграмм" MS Excel. Следующий пример демонстрирует возможность использования "Мастера диаграмм" для решения простых оптимизационных задач экономического анализа на основе построения уравнения парной регрессии.

Пример. Небольшое кондитерское предприятие занимается производством фирменного печенья. Постоянные издержки производства составляют 20000 р. в месяц, переменные издержки на один килограмм произведенной продукции – 12 р.

С целью маркетингового изучения рынка предприятие каждый месяц изменяло цену и анализировало, как на изменение цены реагирует спрос населения (объем проданной продукции). Сведения о цене и объеме продаж за первые шесть месяцев деятельности предприятия приведены в табл. 3.8, сформированной на рабочем листе MS Excel.

По имеющимся данным требуется определить, по какой цене и в каком объеме следует производить продукцию в июле, чтобы получить наибольшую ожидаемую прибыль.

Таблица 3.8

	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
4		январь	февраль	март	апрель	май	июнь
5	Цена, руб./кг	20,00	20,50	23,50	23,00	22,50	21,80
6	Продано, кг	6300	6400	4850	4950	5500	5700

Идея решения задачи состоит в нахождении аналитической зависимости между спросом населения и ценой на покупаемую продукцию, т. е. в нахождении вида функции $Спрос=f(Цена)$.

Решим рассматриваемую задачу с помощью "Мастера диаграмм".

На основе диапазона данных С5:Н6 построим точечную диаграмму и, используя средства форматирования, приведем её к удобному для восприятия виду. На построенной диаграмме выделим ряд значений и, вызвав контекстное меню (вызывается при нажатии правой клавиши мыши), выберем команду **Добавить линию тренда**. Будет вызвано диалоговое окно **Линия тренда**, содержащее вкладку **Тип** (рис. 3.3), где задается вид тренда (уравнения): линейный; логарифмический; полиномиальный (от 2-й до 6-й степени включительно); степенной; экспоненциальный, скользящее среднее (с указанием периода сглаживания от 2 до 15).

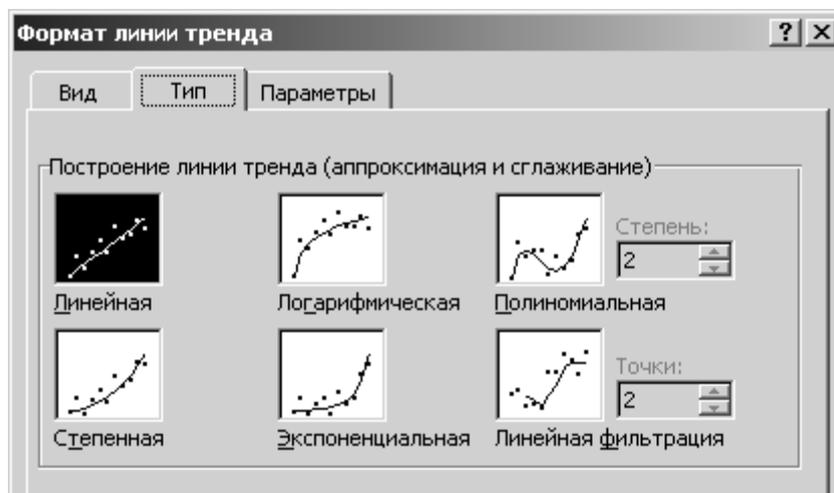


Рис. 3.3

Здесь сразу же следует заметить, что при выборе вида приближающего уравнения, прежде всего, должна приниматься во внимание экономическая (физическая, социальная и т.п.) сущность исследуемого явления или процесса, иначе в большинстве случаев будет получаться, что наилучшим приближающим уравнением является полином 6-й степени.

Для рассматриваемой задачи уравнения, которые отвечают её экономической сущности, имеют линейный или степенной вид. Для того, чтобы получить аналитическое выражение выбранного уравнения, необходимо на вкладке **Параметры** (рис. 3.4) активизировать флажок *Показывать уравнение на диаграмме*. Если активизировать флажок *Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2* , то в области построения будет выведено значение показателя R^2 , по которому можно судить, насколько хорошо выбранное уравнение аппроксимирует эмпирические данные. Чем ближе R^2 к единице, тем уравнение является более адекватным исследуемому явлению или процессу.

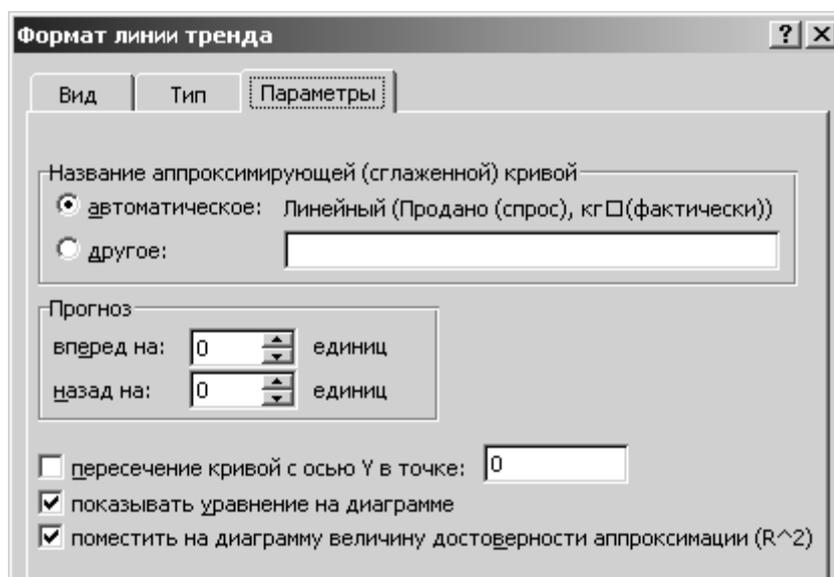


Рис. 3.4

На рис. 3.5 изображен график линейной зависимости спроса от цены с выводом в области построения аналитического выражения уравнения и значения показателя R^2 .

Таким образом, искомое уравнение парной линейной регрессии будет иметь вид:

$$\text{Спрос} = -456,65 \times \text{Цена} + 15610.$$

Полученное уравнение используется для расчета показателя "Продано, кг (по уравнению регрессии)" (см. табл. 3.9). Показатели "Общая выручка, руб. (по уравнению регрессии)", "Общие издержки, руб. (по уравнению регрессии)" и "Прибыль, руб. (по уравнению регрессии)".

рессии)" рассчитываются по следующим известным экономическим соотношениям:

Общая выручка = Объем × Цена,

*Общие издержки = Постоянные издержки + Переменные издержки =
= Постоянные издержки + Переменные издержки на один _
килограмм произведенной продукции × Объем,*

Прибыль = Общая выручка - Общие издержки.

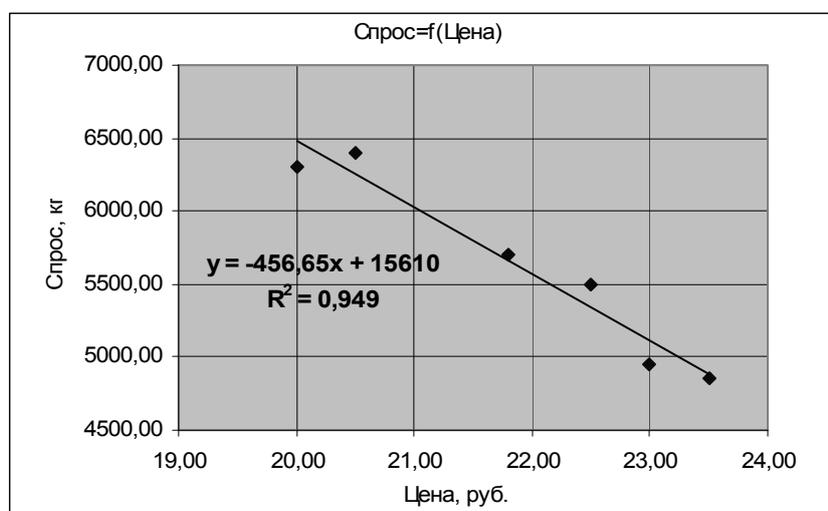


Рис. 3.5

Таблица 3.9

	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
4		январь	февраль	март	апрель	май	июнь
5	Цена, руб./кг	20,00	20,50	23,50	23,00	22,50	21,80
6	Продано, кг	6300	6400	4850	4950	5500	5700
7	Продано, кг (по уравнению регрессии)	6477,00	6248,68	4878,73	5107,05	5335,38	5655,03
8	Общая выручка, руб. (по уравнению регрессии)	129540,00	128097,84	114650,04	117462,15	120045,94	123279,65
9	Общие издержки, руб. (по уравнению регрессии)	97724,00	94984,10	78544,70	81284,60	84024,50	87860,36
10	Прибыль, руб. (по уравнению регрессии)	31816,00	33113,74	36105,34	36177,55	36021,44	35419,29

Для нахождения оптимальной цены достаточно построить функциональную зависимость $Прибыль = f(Цена)$. Так как данная зависимость строится на основе выше полученных аналитических соотношений, то можно ожидать, что качество уравнения регрессии будет наивысшим ($R^2 = 1$). Такое качество обеспечивается, если уравнением регрессии является парабола (полином 2-й степени), которая будет иметь вид

$$Прибыль = -456,65 \times Цена^2 + 21090 \times Цена - 207320.$$

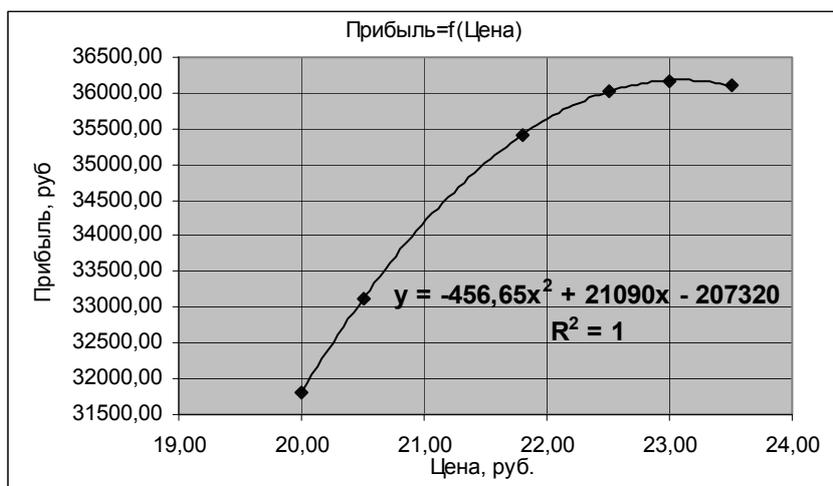


Рис. 3.6

На построенной диаграмме (рис. 3.6) можно увидеть, что наибольшая прибыль достигается при цене в районе 23 руб. Увеличение масштаба изображения позволяет несколько точнее определить оптимальную цену – $Цена^* \approx 23,10$ руб/кг (рис. 3.7).

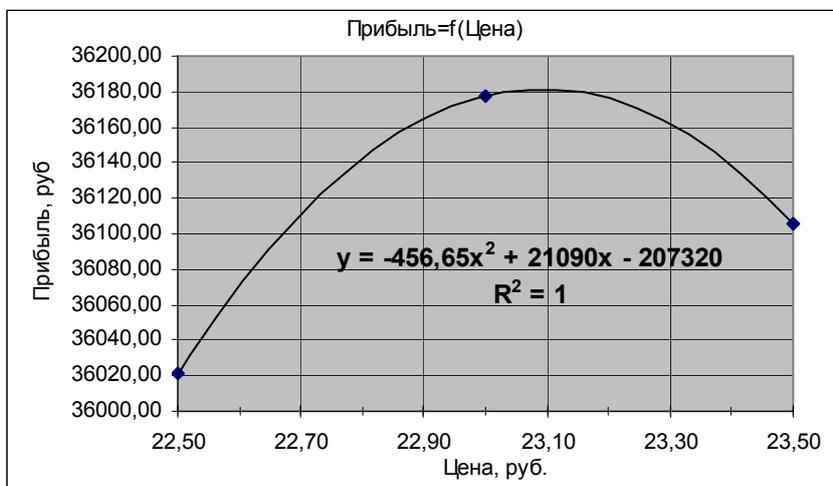


Рис. 3.7

Точное аналитическое решение может быть получено путем взятия производной выражения $-456,65 \times \text{Цена}^2 + 21090 \times \text{Цена} - 207320$ с последующим приравнением её к нулю, т. е.

$$2 \times (-456,65) \times \text{Цена} + 21090 = 0,$$

откуда $\text{Цена}^* = 23,09$ руб./кг.

По полученным выше соотношениям находятся точные значения оптимального объема и прибыли: $\text{Объем}^* = 5065,00$ кг; $\text{Прибыль}^* = 36186,02$ руб.

Следует заметить, что полученные уравнения отражают наиболее вероятную тенденцию развития исследуемого экономического процесса. Фактические данные (в нашей задаче это результаты продаж за июль) могут отличаться от прогнозных. Тем не менее, это наиболее рациональная линия поведения при условии, что выявленная тенденция сохранится, т. е. не возникнет каких-либо факторов, существенно влияющих на конъюнктуру рынка (например, демпинговые цены у какого-либо их конкурентов). По мере накопления статистических данных и установления на рынке равновесного состояния точность прогноза будет повышаться.

Может возникнуть вопрос, а почему нельзя было сразу построить зависимость $\text{Прибыль} = f(\text{Цена})$ на основе эмпирических данных? Для этого достаточно рассчитать прибыль по эмпирическим данным и построить соответствующую диаграмму (рис. 3.8).

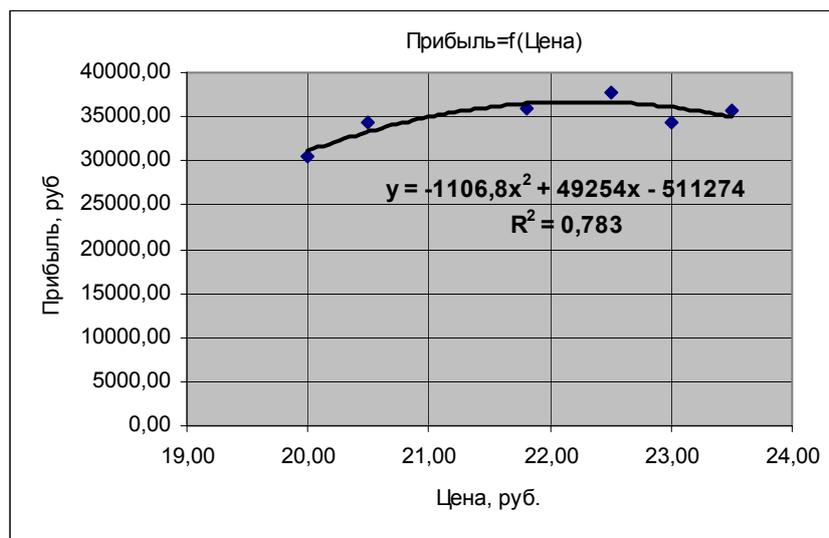


Рис. 3.8

Дело в том, что прогнозные расчеты целесообразно осуществлять на основе уравнения регрессии с высоким качеством. При этом желательно, чтобы это уравнение имело как можно более простой вид, чтобы исследуемый экономический процесс имел ясную экономическую интерпретацию. В противном случае всегда будет получаться, что наивысшее качество обеспечивает полином 6-й степени. Но в экономике функции такого вида не используются (максимум полином 3-й степени и то редко), так как с финансово-экономических позиций очень затруднительно объяснить сущность коэффициентов при переменных с высокими степенями.

В рассмотренной задаче качество уравнения регрессии $Спрос=f(Цена)$ существенно выше качества уравнения $Прибыль = f(Цена)$ ($R^2 = 0,95$ – для спроса; $R^2 = 0,78$ – для прибыли). Кроме того, уравнение регрессии для спроса является более простым (оно имеет линейный вид, а для прибыли – параболический), что также является преимущественным фактором. Исходя из изложенного, в рассмотренной задаче в качестве рабочей модели целесообразно выбрать уравнение регрессии $Спрос=f(Цена)$.

3.2. Компьютерные модели для исследования динамики социально-экономических процессов

3.2.1. Модели на основе скользящей средней и экспоненциального сглаживания

Экономические данные (со статистической точки зрения) обычно делятся на два вида: поперечные данные (cross-section data) и временные ряды (time series).

Поперечные данные – это данные по какому-либо экономическому показателю, полученные для разных однотипных объектов (предприятий, фирм, регионов и т.п.). При этом либо все данные относятся к одному и тому же моменту времени, либо их временная принадлежность несущественна. Анализ именно таких данных и проводился в п. 3.1.

Временной ряд представляет собой последовательность измерений в последовательные моменты времени. В отличие от анализа поперечных данных анализ временных рядов основывается на предположении, что последовательные значения в наборе данных наблю-

даются через равные промежутки времени (тогда как в других методах не важна и часто не интересна привязка наблюдений ко времени).

Анализ временных рядов включает широкий спектр разведочных процедур и исследовательских методов, которые ставят две основные цели: определение природы временного ряда и предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям (прогнозирование). Обе эти цели требуют, чтобы модель ряда была идентифицирована и более или менее формально описана.

Как и большинство других видов анализа, анализ временных рядов предполагает, что данные содержат систематическую составляющую (обычно включающую несколько компонент) и случайный шум (ошибку), который затрудняет обнаружение регулярных компонент. В зависимости от формы разложения временного ряда на систематическую d и случайную составляющие e различают *аддитивную* ($\hat{y} = d + e$) и *мультипликативную* модели ($\hat{y} = d \cdot e$) временного ряда. В свою очередь, в систематической компоненте временного ряда d обычно выделяют три составляющих: *тренд* (tr), *сезонную компоненту* (s) и *циклическую компоненту* (c). Таким образом, например, аддитивную модель временного ряда можно представить следующим образом:

$$\hat{y} = tr + s + c + e.$$

В зависимости от того, изменяются или не изменяются во времени вероятностные свойства (математическое ожидание, дисперсия) изучаемой случайной величины, различают *нестационарные* и *стационарные* временные ряды. Экономические процессы обычно не являются стационарными, так как содержат систематическую составляющую, но их можно преобразовать в стационарные путем исключения тренда, сезонной и циклической компонент.

Существует достаточно большое число методов сведения ряда к стационарности. Например, для выделения тренда широкое распространение получили *метод наименьших квадратов* и *метод простых разностных операторов*, для выделения сезонной компоненты – *метод сезонного выравнивания* и *метод сезонных разностных операторов*, для выделения тренда и циклической компоненты – *метод скользящей средней* и *метод экспоненциального сглаживания*.

Рассмотрим два последних метода более подробно.

Метод скользящей средней. Это один из самых старых и широко известных способов сглаживания временного ряда. Сглаживание

представляет собой некоторый способ локального усреднения данных, при котором несистематические компоненты взаимно погашают друг друга. Так, метод скользящей средней основан на переходе от начальных значений ряда к их средним значениям на интервале времени, длина которого выбрана заранее (данный интервал времени часто называют "окном"). При этом сам выбранный интервал скользит вдоль ряда.

Получаемый таким образом ряд скользящих средних ведет себя более гладко, чем исходный ряд, за счет усреднения отклонений исходного ряда. Таким образом, эта процедура дает представление об общей тенденции поведения ряда. Ее применение особенно полезно для рядов с сезонными колебаниями и неясным характером тренда. В частности, переход к ряду скользящих средних может быть использован для выявления сезонной компоненты (или сезонного индекса) временного ряда.

Применяя метод скользящей средней, вместо средней можно использовать медиану значений, попавших в окно. Основное преимущество *медианного сглаживания* в сравнении со сглаживанием скользящей средней состоит в том, что результаты становятся более устойчивыми к выбросам, имеющимся внутри окна. Основным недостатком медианного сглаживания в том, что при отсутствии явных выбросов, он приводит к более "зубчатым" кривым, чем сглаживание скользящей средней, и не позволяет использовать веса.

Дадим некоторое формальное определение методу скользящей средней для окна сглаживания, длина которого выражается нечетным числом $p = 2m + 1$.

Пусть имеются дискретные во времени наблюдения над некоторым изучаемым процессом:

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n,$$

где i – дискретный момент времени, равный порядковому номеру местоположения значения y_i в наборе данных;

n – объем выборки.

Тогда метод скользящей средней состоит в том, что исходный эмпирический временной ряд y_1, \dots, y_n преобразуется в ряд сглаженных значений (оценок) по формуле

$$\hat{y}_t = \frac{1}{p} \sum_{j=t-m}^{t+m} y_j,$$

где p – размер окна;

j – порядковый номер уровня в окне сглаживания;

m – величина, определяемая по формуле $m = (p-1)/2$.

Определение скользящей средней по четному числу членов ряда ($p = 2m$) несколько сложнее, поскольку вычисленное по аналогичной формуле усредненное значение нельзя сопоставить какому-либо определенному моменту времени t , так как средняя может быть отнесена только к середине между двумя датами, находящимися в середине окна сглаживания. Для определения сглаженных уровней при $p = 2m$ применяется так называемый *метод центрирования*, который заключается в нахождении средней из двух смежных скользящих средних для отнесения полученного уровня к определенной дате.

При применении метода скользящей средней выбор размера окна сглаживания p должен осуществляться исходя из содержательных соображений и привязанности к периоду сезонности для сезонных волн. Если процедура скользящей средней используется для сглаживания несезонного ряда, то чаще всего размер окна сглаживания выбирают равным трем, пяти и семи. Чем больше размер окна, тем более гладкий вид имеет график скользящих средних.

Рассмотренный метод простой скользящей средней вполне приемлем, если графическое изображение временного ряда напоминает прямую линию. В этом случае не искажается динамика исследуемого явления. Однако когда тренд выравниваемого ряда имеет явно нелинейный характер и к тому же желательно сохранить мелкие волны, использовать для сглаживания ряда этот метод нецелесообразно, так как простая скользящая средняя может привести к значительным искажениям исследуемого процесса. В таких случаях более надежным является использование или метода взвешенной скользящей средней, или метода экспоненциального сглаживания.

Метод экспоненциального сглаживания*. Этот метод, как и метод скользящей средней, представляет собой некоторый способ ус-

* Исторически метод экспоненциального сглаживания был независимо открыт Броуном и Холтом для решения задач прогнозирования спроса на запасные части вооружения и военной техники в интересах ВМС США.

реднения значений эмпирического временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$. В отличие от метода скользящей средней в определении экспоненциальной средней участвуют *все* наблюдения исходного временного ряда, но с разными весовыми коэффициентами (в методе простой скользящей средней все наблюдения временного ряда имеют вес, равный $1/p$). Экспоненциальная средняя обладает большей временной устойчивостью по сравнению со скользящей средней.

Для экспоненциального сглаживания момент времени, в который наблюдалось значение временного ряда, играет решающую роль. Здесь более старым наблюдениям приписываются экспоненциально убывающие веса, при этом, в отличие от скользящего среднего, учитываются *все* предшествующие наблюдения ряда, а не те, что попали в определенное окно. Формула метода простого экспоненциального сглаживания имеет следующий вид:

$$\hat{y}_t = (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1} + \alpha y_t,$$

где $0 < \alpha < 1$ – коэффициент экспоненциального сглаживания.

Когда эта формула применяется рекуррентно, то каждое новое теоретическое сглаженное значение вычисляется как взвешенное среднее текущего наблюдения и теоретического сглаженного значения предыдущего периода.

Очевидно, что результат сглаживания зависит от параметра α . Чем больше α , тем сильнее сказываются фактические наблюдаемые значения (при $\alpha = 1$ теоретические сглаженные значения предыдущего периода полностью игнорируются), чем меньше α , тем сильнее сказываются теоретические сглаженные значения (при $\alpha = 0$ полностью игнорируются фактические значения).

Пример. Данные о среднесуточной реализации (тыс. руб.) продуктов сельскохозяйственного производства магазинами потребительской кооперации города приведены в табл. 3.10, сформированной на рабочем листе MS Excel.

В указанном периоде (1994 – 1997 гг.) требуется выявить основную тенденцию развития данного экономического процесса и характер его сезонных колебаний.

Таблица 3.10

	А	В	С
2	Год	Квартал	Размер реализации, тыс. руб.
3	1994	I	175
4		II	263
5		III	326
6		IV	297
7	1995	I	247
8		II	298
9		III	366
10		IV	341
11	1996	I	420
12		II	441
13		III	453
14		IV	399
15	1997	I	426
16		II	449
17		III	482
18		IV	460

Для решения задачи воспользуемся режимом работы "Скользящее среднее" надстройки "Пакет анализа". Значения параметров, установленных в одноименном диалоговом окне, представлены на рис. 3.9, рассчитанные в данном режиме показатели – в табл. 3.11., а построенные графики – на рис. 3.10.

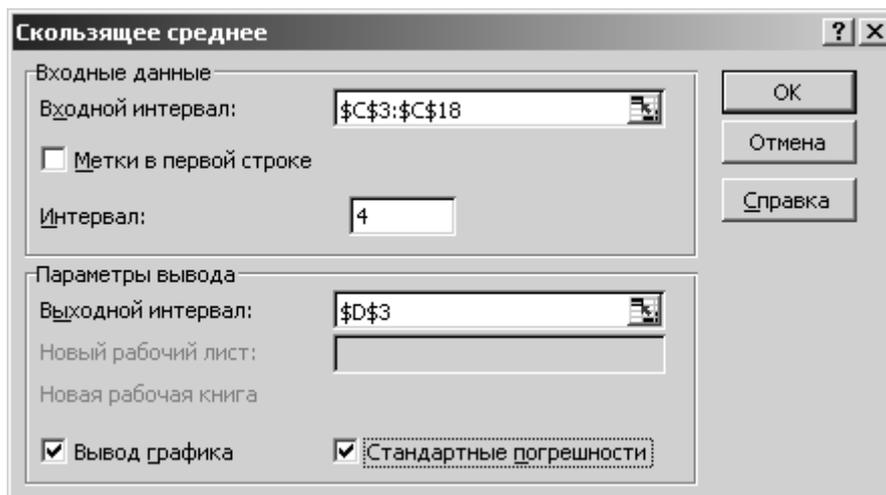


Рис. 3.9

Таблица 3.11

	А	В	С	Д	Е
2	Год	Квартал	Размер реализации, тыс. руб.	Сглаженные уровни	Стандартные погрешности
3	1994	I	175	#Н/Д	#Н/Д
4		II	263	#Н/Д	#Н/Д
5		III	326	#Н/Д	#Н/Д
6		IV	297	265,25	#Н/Д
7	1995	I	247	283,25	#Н/Д
8		II	298	292,00	#Н/Д
9		III	366	302,00	40,17
10		IV	341	313,00	39,47
11	1996	I	420	356,25	47,38
12		II	441	392,00	53,26
13		III	453	413,75	46,88
14		IV	399	428,25	47,07
15	1997	I	426	429,75	34,68
16		II	449	431,75	26,02
17		III	482	439,00	27,46
18		IV	460	454,25	23,42

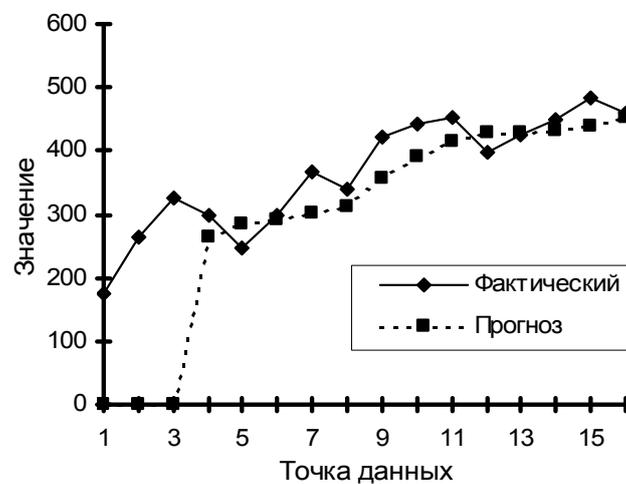


Рис. 3.10

В столбце D (см. табл. 3.11) вычислены значения сглаженных уровней.

Вместе с тем, как отмечалось выше, если размер окна сглаживания является четным числом ($p = 2m$), рассчитанное усредненное значение нельзя сопоставить какому-либо определенному моменту времени t , поэтому необходимо применять процедуру центрирования.

Для рассматриваемого примера $p = 4$, поэтому процедура центрирования необходима. Так, первый сглаженный уровень (265,25) записывается между II и III кв. 1994 г., второй (283,25) – между III и IV кв. 1994 г. и т. д. Применяя процедуру центрирования (для этого используем функцию СРЗНАЧ), получаем *сглаженные уровни с центрированием*. Для III кв. 1994 г. определяется срединное значение между первым и вторым сглаженными уровнями: $(265,25 + 283,25) / 2 = 274,25$; для IV кв. 1994 г. центрируются второй и третий сглаженные уровни: $(283,25 + 292,00) / 2 = 287,6$ и т. д. Полученные значения новых сглаженных уровней представлены в табл. 3.12, а скорректированный график скользящей средней – на рис. 3.11.

Таблица 3.12

	А	В	С	...	Н	І
2	Год	Квартал	Размер реализации, тыс. руб.	...	Сглаженные уровни с центрированием	$\frac{y_t}{\bar{y}_t}$
3	1994	I	175	...		
4		II	263	...		
5		III	326	...	274,25	1,189
6		IV	297	...	287,63	1,033
7	1995	I	247	...	297,00	0,832
8		II	298	...	307,50	0,969
9		III	366	...	334,63	1,094
10		IV	341	...	374,13	0,911
11	1996	I	420	...	402,88	1,043
12		II	441	...	421,00	1,048
13		III	453	...	429,00	1,056
14		IV	399	...	430,75	0,926
15	1997	I	426	...	435,38	0,978
16		II	449	...	446,63	1,005
17		III	482	...		
18		IV	460	...		

Рассчитанные сглаженные уровни не только дают представление об общей тенденции поведения изучаемого временного ряда, но могут быть также использованы и для вычисления индексов сезонности I_S , совокупность которых характеризует сезонную волну исследуемого экономического процесса. Средние индексы сезонности определяются по формуле

$$\bar{I}_s = \frac{1}{u} \sum \frac{y_t}{\hat{y}_t},$$

где y_t – исходные уровни ряда;

\hat{y}_t – сглаженные уровни ряда;

u – число одноименных периодов.

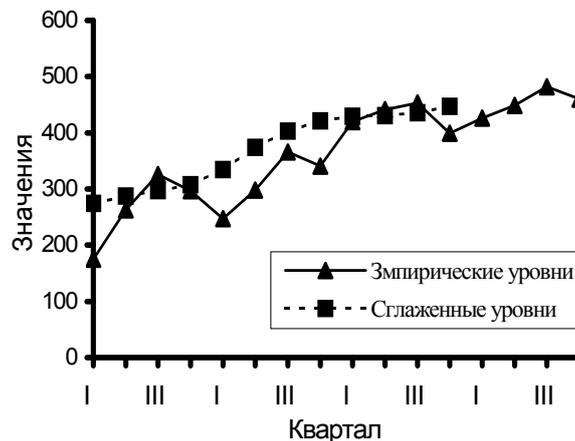


Рис. 3.11

В табл. 3.12 (столбец I) представлены значения y_t / \hat{y}_t . Для получения средних индексов сезонности \bar{I}_s производится осреднение численных значений y_t / \hat{y}_t по одноименным кварталам:

I кв. – $(0,832 + 1,043 + 0,978) / 3 = 0,951$, или 95,1 %;

II кв. – $(0,969 + 1,048 + 1,005) / 3 = 1,007$, или 100,7 %;

III кв. – $(1,189 + 1,094 + 1,056) / 3 = 1,113$, или 111,3 %;

IV кв. – $(1,033 + 0,911 + 0,926) / 3 = 0,957$, или 95,7 %.

Исчисленные показатели являются средними индексами сезонных колебаний продажи сельскохозяйственной продукции по кварталам. Сезонная волна товарооборота сельскохозяйственной продукции (прирост в процентах к среднему уровню) изображена в виде столбиковой диаграммы на рис. 3.12.

Рассмотренная задача может быть решена и с помощью метода простого экспоненциального сглаживания. Для этого необходимо использовать режим работы "Экспоненциальное сглаживание". Значения параметров, установленных в одноименном диалоговом окне, представлены на рис. 3.13, рассчитанные в данном режиме показатели – в табл. 3.13., а построенные графики – на рис. 3.14.

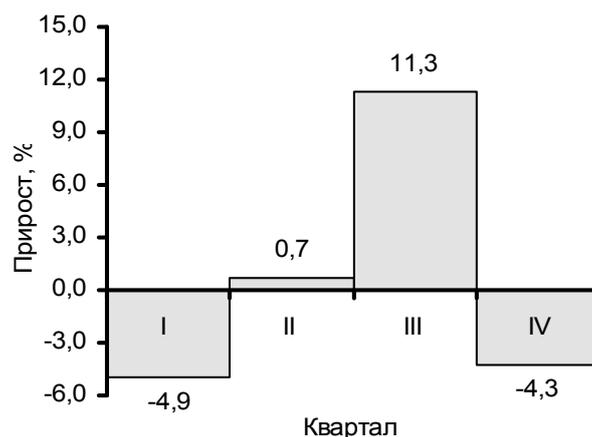


Рис. 3.12

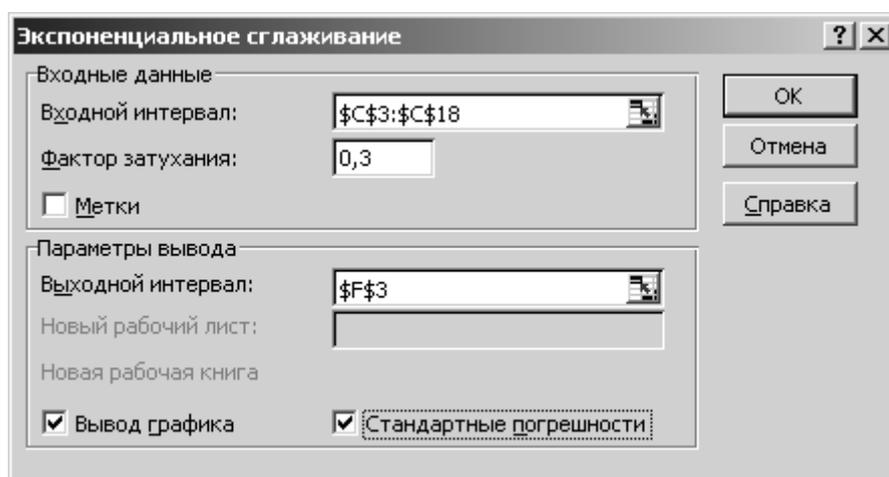


Рис. 3.13

Таблица 3.13

	A	B	C	...	F	G
2	Год	Квартал	Размер реализации, тыс. руб.	...	Сглаженные уровни	Стандартные погрешности
3	1994	I	175	...	#Н/Д	#Н/Д
4		II	263	...	175,00	#Н/Д
5		III	326	...	236,60	#Н/Д
6		IV	297	...	299,18	#Н/Д
7	1995	I	247	...	297,65	72,44
8		II	298	...	262,20	59,34
9		III	366	...	287,26	35,84
10		IV	341	...	342,38	57,87
11	1996	I	420	...	341,41	49,95
12		II	441	...	396,42	64,23
13		III	453	...	427,63	52,17
14		IV	399	...	445,39	54,18

15	1997	I	426	...	412,92	39,93
16		II	449	...	422,07	31,45
17		III	482	...	440,92	31,87
18		IV	460	...	469,68	29,35

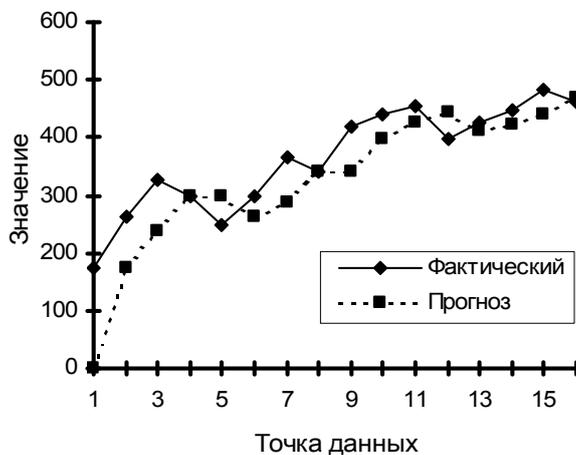


Рис. 3.14

В столбце F (см. табл. 3.13) вычисляются значения сглаженных уровней на основе рекуррентных соотношений.

Как легко заметить (сравните рис. 3.11 и 3.14) при использовании метода простого экспоненциального сглаживания в отличие от метода простой скользящей средней сохраняются мелкие волны.

3.2.2. Трендовые модели

Изложенные в п. 3.2.1 методы сглаживания временных рядов (метод скользящей средней и метод экспоненциального сглаживания) не дают теоретических рядов, в основе которых лежала бы определенная, математически выраженная закономерность изменения. Поэтому во многих случаях более результативным является применение *метода аналитического выравнивания*. Содержанием этого метода является то, что основная тенденция развития процесса (*тренд*) рассчитывается как функция времени

$$\hat{y}_t = f(t).$$

Теоретические уровни \hat{y}_t определяются с использованием так называемой адекватной математической функции, которая наилучшим

образом отображает основную тенденцию временного ряда. Подбор адекватной функции осуществляется методом наименьших квадратов (см. п. 3.1.2), при котором минимизируется сумма квадратов отклонений между эмпирическими y_t и теоретическими \hat{y}_t уровнями ряда:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_{t_i} - \hat{y}_{t_i})^2 \rightarrow \min.$$

Для оценки точности трендовой модели используют коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2},$$

где $\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n}$ – дисперсия теоретических данных, полученных по трендовой модели;

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \text{ – дисперсия эмпирических данных.}$$

Трендовая модель адекватна изучаемому процессу и отражает тенденцию его развития во времени при значениях R^2 , близких к 1.

Важнейшей проблемой, требующей своего решения при применении метода аналитического выравнивания, является подбор математической функции, по которой рассчитываются теоретические уровни ряда. Если выбранный тип математической функции адекватен основной тенденции развития изучаемого процесса, то синтезированная трендовая модель может иметь полезное применение при изучении сезонных колебаний, прогнозировании и др.

Для обоснованного применения метода аналитического выравнивания в анализе временных рядов важно понимание сущности развития социально-экономических явлений во времени, знание их отличительных признаков.

В практике статистического изучения временных рядов различают следующие основные типы развития явлений во времени:

1) *равномерное развитие* – развитие с постоянным абсолютным приростом уровней временного ряда. Основная тенденция развития описывается линейным типом тренда:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 t,$$

где a_0 – постоянная составляющая;

a_1 – коэффициент, характеризующий скорость (темп) развития изучаемого процесса и направление его развития (при $a_1 > 0$ уровни динамики равномерно возрастают, при $a_1 < 0$ – равномерно снижаются);

2) *равноускоренное (равнозамедленное) развитие* – развитие при постоянном увеличении (замедлении) темпа прироста уровней временного ряда. Основная тенденция развития описывается полиномом второй степени:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

где a_2 – коэффициент, характеризующий постоянное изменение скорости (темпа) развития (при $a_2 > 0$ происходит ускорение развития, при $a_2 < 0$ – замедление развития);

3) *развитие с переменным ускорением (замедлением)* – развитие при переменном увеличении (замедлении) темпа прироста уровней временного ряда. Основная тенденция описывается полиномом третьей степени:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

где a_3 – коэффициент, характеризующий изменение ускорения развития (при $a_3 > 0$ ускорение возрастает, при $a_3 < 0$ – замедляется);

4) *развитие с замедлением роста в конце периода* – развитие, при котором прирост в конечных уровнях временного ряда стремится к нулю. Основная тенденция описывается логарифмической функцией

$$\hat{y} = a_0 + a_1 \ln t;$$

5) *развитие по экспоненте* – развитие, характеризующееся стабильным темпом роста (снижения). Основная тенденция описывается показательной (в частном случае экспоненциальной) функцией

$$\hat{y} = a_0 a_1^t,$$

где a_1 – коэффициент, характеризующий интенсивность развития;

б) *развитие по степенной функции* – развитие с постоянным относительным приростом уровней временного ряда. Основная тенденция развития описывается степенной функцией

$$\hat{y} = a_0 t^{a_1}.$$

Пользоваться трендовыми моделями для краткосрочных и среднесрочных прогнозов следует только при выполнении следующих условий:

- период времени, за который изучается прогнозируемый процесс, должен быть достаточным для выявления закономерностей;
- трендовая модель в анализируемый период должна развиваться эволюционно;
- процесс, описываемый временным рядом, должен обладать определенной инерционностью, т. е. для наступления большого изменения в поведении процесса необходимо значительное время;
- автокорреляционная функция временного ряда и его остаточного ряда должна быть быстро затухающей, т. е. влияние более поздней информации должно сильнее отражаться на прогнозируемой оценке, чем влияние более ранней информации.

Пример. Требуется по данным о розничном товарообороте региона (табл. 3.14) построить трендовую модель товарооборота.

Таблица 3.14

	В	С	Д	Е
3	Год	Объем розничного товарооборота млрд. руб.	Темп роста по годам, %	Абсолютный прирост по годам, млрд. руб.
4	1985	16,4	-	-
5	1986	17,05	104,0	0,65
6	1987	17,24	101,1	0,19
7	1988	18,57	107,7	1,33
8	1989	19,08	102,7	0,51

Разнохарактерность изменений темпов роста ($104,0 > 101,1 < 107,7 > 102,7$) и значительная колеблемость цепных абсолютных при-

ростов (от 0,19 до 1,33) затрудняют определение типа динамики объема розничного товарооборота.

Для решения поставленной задачи, прежде всего в порядке первого приближения, намечаются типы функций, которые могут отобразить имеющиеся во временном ряду изменения. В помощь этому исходные данные, приведенные в табл. 3.14, изображаются графически с помощью "Мастера диаграмм" (рис. 3.15).

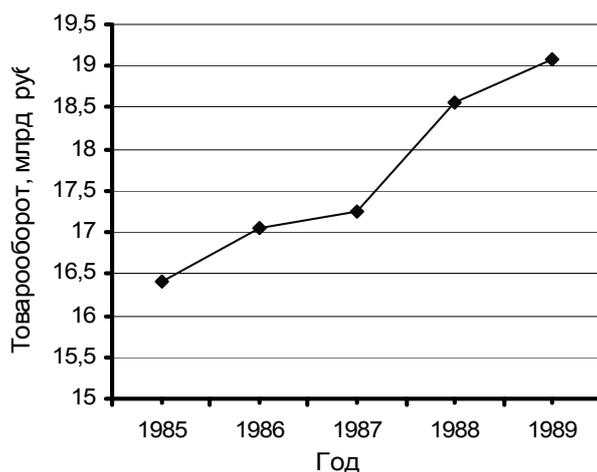


Рис. 3.15

По характеру размещения уровней анализируемого временного ряда можно сделать предположение о возможном аналитическом выравнивании изучаемого ряда типовой математической функцией. Это может быть и линейная функция, и показательная, и полином 2-го порядка, и ряд других функций. Разнохарактерность темпов роста и значительная колеблемость цепных абсолютных приростов наталкивают на мысль, что развитие изучаемого процесса происходит с переменным ускорением, т.е. его основная тенденция описывается полиномом 3-го порядка:

$$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3.$$

Однако данная гипотеза требует количественного подтверждения, для чего необходимо осуществить перебор решений по намеченным типам математических функций.

Для нахождения наиболее адекватного уравнения тренда используем инструмент "Подбор линии тренда" из "Мастера диаграмм" MS Excel. Результаты подбора уравнения приведены в табл. 3.15, а график наиболее подходящей линии тренда – на рис. 3.16.

Примечание. При подборе уравнения не рассматривались полиномы выше 3-го порядка.

Таблица 3.15

Вид уравнения	Уравнение	Коэффициент детерминации R^2
Линейное	$y = 0,688x + 15,604$	0,9504
Логарифмическое	$y = 1,6245\ln(x) + 16,113$	0,8561
Полином 2-го порядка	$y = 0,0614x^2 + 0,3194x + 16,034$	0,9610
Полином 3-го порядка	$y = -0,03x^3 + 0,3314x^2 - 0,3886x + 16,538$	0,9636
Степенное	$y = 16,152x^{0,0921}$	0,8671
Экспоненциальное	$y = 15,701e^{0,0388x}$	0,9538

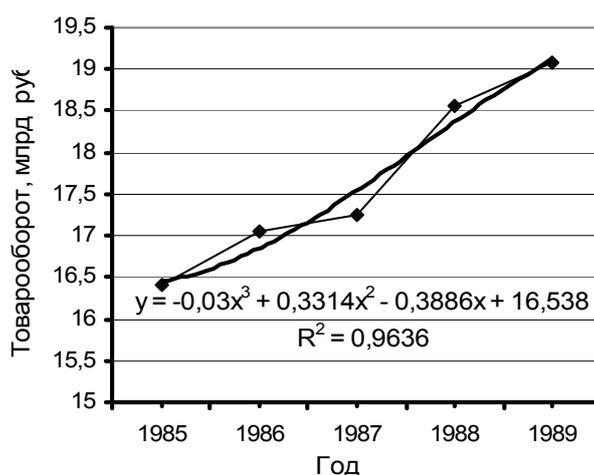


Рис. 3.16

Принимая во внимание физическую сущность изучаемого процесса и результаты проведенного аналитического выравнивания (см. табл. 3.15), в качестве математической модели тренда выбираем полином 3-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б.Я. Курицкий. – СПб.: ВНУ, 1997. – 384 с.
3. Макарова, Н.В. Статистика в Excel: учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов / Н.В. Макарова, В.Я. Трофимец. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
4. Таха, Х. Введение в исследование операций: в 2-х кн. Кн. 1. / Х. Таха; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 479 с.
5. Теория прогнозирования и принятия решений: учеб. пособие / под ред. С.А. Саркисяна. – М.: Высшая школа, 1977. – 351 с.
6. Трофимец, В.Я. Информационные технологии поддержки принятия военно-экономических решений / В.Я. Трофимец. – Ярославль: ЯВФЭИ, 2003. – 304 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Надстройка MS Excel "Поиск решения" как инструментальное средство построения и анализа оптимизационных моделей	6
1.1. Назначение надстройки "Поиск решения"	6
1.2. Установка надстройки "Поиск решения"	8
1.3. Диалоговое окно "Поиск решения"	10
1.4. Диалоговое окно "Параметры поиска решения"	13
1.5. Технология принятия экономических решений с использованием надстройки "Поиск решения"	16
1.6. Последовательность действий при решении оптимизационных экономических задач с использованием надстройки "Поиск решения"	19
Глава 2. Компьютерное моделирование оптимизационных задач экономического анализа	25
2.1. Компьютерные модели задач линейного программирования	25
2.1.1. Задача формирования оптимальной производственной программы предприятия	26
2.1.2. Транспортная задача	49
2.1.3. Задача о назначениях	65
2.2. Компьютерные модели задач нелинейного программирования	71
Глава 3. Компьютерное моделирование взаимосвязей и динамики социально-экономических процессов ..	85
3.1. Компьютерные модели для исследования взаимосвязей социально-экономических процессов	85
3.1.1. Корреляционные модели	85
3.1.2. Регрессионные модели	89
3.2. Компьютерные модели для исследования динамики социально-экономических процессов	104
3.2.1. Модели на основе скользящей средней и экспоненциального сглаживания	104
3.2.2. Трендовые модели	114
Литература	120

Учебное издание

**Трофимец Валерий Ярославович
Маматова Людмила Александровна**

Компьютерное моделирование экономических систем и процессов

Часть I Оптимизационные и статистические модели

Учебное пособие

Редактор, корректор А.А. Аладьева
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 22.11.2007. Формат 60x84/16. Бумага тип.
Усл. печ. л. 7.21. Уч.-изд. л. 5,6. Тираж 200 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.

