Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов,
В.А. Папорков, С.О. Ширяева

Метод размерностей

Задачник

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов направлений и специальностей
Физика, Радиофизика, Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, Радиофизика и электроника, Телекоммуникации

Ярославль 2007

УДК 534+537
ББК В 3я73–4
Г 83

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2007 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Жаров;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета.

Г 83 **Григорьев, А.И.** Метод размерностей: задачник / А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, В.А. Папорков, С.О. Ширяева; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 80 с.

На большом количестве подробно разобранных примеров показывается, как метод размерностей может быть использован для получения аналитических зависимостей между физическими величинами, описывающими физическое явление или процесс, и проведения численных оценок.

Задачник предназначен для студентов физического факультета (дисциплина «Решение физических задач методом размерностей», цикл ФТД), очной формы обучения.

УДК 534+537
ББК В 3я73–4

1. Размерность

Что такое размерность физической величины?

Все физические величины, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни, измеряются в некоторых единицах – эталонах. И, говоря об определенном численном значении физической величины, мы указываем, сколько раз соответствующая единица (эталон) в этой физической величине укладывается.

Измерить какую-либо физическую величину – значит найти опытным путем отношение данной величины к соответствующей единице измерения. Полученное отношение является мерой интересующей нас величины.

Так как понятия "больше – меньше" применимы лишь к однородным величинам, значит и сравнивать между собой можно лишь однородные величины. Например, говоря о температуре *293°K*, мы указываем, что температура в комнате равна 293 единицам ее измерения, т.е. *°K*. Говоря об интервале времени Δt в *10* сек, имеем в виду, что соответствующий интервал Δt может быть разбит на *10* элементарных единичных интервалов по *1* сек.

То обстоятельство, что физические величины характеризуются как численным значением, зависящим от выбора единицы измерения, так и размерностью, т.е. названием соответствующей единицы измерения, отличает физические величины от математических, которые безразмерны. Математическая единица есть по своей сути абстракция, которая существенна для математики как раздела науки в целом, и появилась она у разных народов в разное время на определенном этапе развития культуры, примерно одновременно с возникновением письменности у данного народа. Во многих еще существующих примитивных языках нет даже слов для обозначения числа без размерности. Так, у северных народов имеются отдельные слова для одного моржа, двух моржей и т.д., для одной собаки, двух собак и т.д., а просто чисел один, два и т.д. нет. Количество моржей и собак в этом языке дается сразу с указанием размерности. Иными словами размерность величины и объектов физического мира имеет смысл в разграничении различных объектов и физических величин.

Производя математические действия над физическими величинами, мы производим их не только над числами, но и над размерностями. Отсюда следует, что [1 – 3]:

1) сложение физических величин возможно, только если их размерности совпадают;

2) операции *log X* и *exp X* можно выполнять только для безразмерной величины *X*, поскольку основание *log* или *exp* есть величина безразмерная;

3) нельзя возводить в размерную степень или извлекать размерный корень: такие операции не имеют смысла, так как введены для абстрактных чисел без размерностей;

4) размерность произвольной физической величины может быть лишь произведением степеней размерности величин, принятых за основные;

5) размерности обеих частей равенства, отражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.

2. Системы единиц физических величин

В качестве единицы измерения одной физической величины можно выбирать различные эталоны. Например, длину можно измерять в локтях, футах, метрах, сантиметрах, верстах, километрах, парсеках, световых годах и т.п. В разных странах в разное время использовали разнообразные эталоны. Переход от одних эталонов к другим не всегда элементарен. Да и соотношение между используемыми большими и малыми единицами в одной стране не всегда очевидно. Так, 1 ярд ≡ 3 футам ≡ 36 дюймам установлен как расстояние от кончика носа до конца большого пальца вытянутой руки одного из английских королей. А косая, прямая, маховая сажени, которые использовались на Руси, вообще зависели от роста человека и размаха его рук.

В середине XIX века большинством стран была разработана и принята метрическая система единиц, отличительным свойством которой является то, что отношение друг к другу разных единиц одной и той же величины пропорционально целым степеням десяти.

Возможность использования различных численных эталонов единиц измерения (м, см), (кг, г), (Дж, эрг), (Н, Кг, дина) и связанные с этим удобства для отдельных разделов науки и естествознания, привели к созданию различных систем физических величин: СГС (см, г, с), СГСЕ (см, г, с, $\varepsilon_0 = 1$), СГСМ (см, г, с, $\mu_0 = 1$), МКС (м, кг, с), СИ (м, кг, с, А) и т.д.

В нижеследующем изложении будут в основном использоваться системы Гаусса (объединяющая СГСЕ и СГСМ) и СИ.

3. Основные и производные единицы

Разделение единиц измерения на основные и производные условно и связано с соображениями удобства [4].

В качестве основных, через которые выражаются размерности всех остальных физических величин, выбирают обычно единицы, связанные с фундаментальными свойствами материи: единица длины, единица времени, единица массы (в соответствии с законами сохранения импульса, момента импульса и энергии или со свойствами однородности и изотропности пространства и однородности времени) согласно теореме Нетер [5, с. 440]. Но такой выбор не является выделенным и единственным: *количество основных единиц произвольно,* но в зависимости от него будут изменяться и количество, и величины констант, входящих в физические законы.

Количество основных единиц связано с количеством универсальных постоянных. Чем больше мы выбираем основных единиц, тем больше универсальных постоянных появляется в математических формулировках физических законов (и наоборот).

Основные единицы считаются независимыми друг от друга.

После выбора основных единиц все остальные, необходимые для построения физического знания, определяются в качестве производных единиц на основе экспериментально установленных законов физики и физических определений.

Пример 3.1. Найдем единицы измерения скорости и ускорения на основе их определений, выделяя размерность некой физической величины квадратными скобками. Например, размерность времени запишется так: $[t] \equiv$ сек.

$$V = \frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow [V] = \frac{[l]}{[t]} \equiv \frac{м}{с} = м \cdot с^{-1}.$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow [a] = \frac{[V]}{[t]} \equiv \frac{м \cdot с^{-1}}{с} = м \cdot с^{-2}.$$

Этот пример иллюстрирует правила построения произвольных единиц на основе определения понятий скорости и ускорения.

Покажем, как определяются размерности производных величин на основе физических закономерностей.

Пример 3.2. Пусть требуется найти единицу измерения силы. Для реализации этой цели удобно воспользоваться вторым законом Ньютона: $\vec{a} = \vec{F} / m,$ переписав его в форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow [F] = [a] \cdot [m] \equiv \frac{м}{с^2} \cdot кг = кг \cdot м \cdot с^{-2}.$$

Эта единица силы называется "ньютон":

$$Н = кг \cdot м \cdot с^{-2}.$$

Пример 3.3. Найдем теперь размерность энергии W, отождествляя ее с работой силы $\vec{F}$ на пути $\vec{L}$, т.е.:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{L} \Rightarrow [W] = [F] \cdot [L] \equiv кг \cdot м \cdot с^{-2} \cdot м = кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}.$$

Эта единица называется "джоуль":

$$Дж = кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}.$$

Сформулируем окончательно правила построения произвольных единиц:

1. Выбираются величины, единицы которых принимаются за основные.

2. Устанавливается размер основных единиц. При этом размеры основных единиц выбираются независимо друг от друга.

3. Выбираются определяющие соотношения связывающие величины, измеряемые основными единицами, с величинами для которых устанавливаются производные единицы.

4. Приравниваются единице (или на основе данных экспериментальных измерений другому постоянному числу) коэффициенты пропорциональности, входящие в определяющие соотношения.

В итоге размер производной единицы связывается с размерами основных единиц соотношениями, выражающими физические законы, или определениями соответствующих величин.

4. Метод размерностей

Пусть имеется группа из N физических величин, между которыми по предположению имеется взаимозависимость. И пусть размерности этих N величин выражаются через K размерностей основных единиц размерности $(K < N)$. Будем составлять из имеющихся N величин безразмерные комбинации. Если $N - K = 1$, такая комбинация единственная, и она-то и дает решение – определяет искомую взаимосвязь.

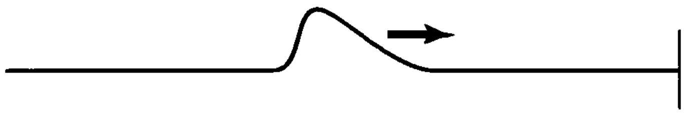

Рис. 1

Пример 4.1. Пусть имеется резиновый шнур, натянутый с силой F между двумя опорами, находящимися на расстоянии l. Масса шнура m. Требуется найти скорость v распространения волн по шнуру (рис. 1), т.е. нужно найти зависимость вида:

$$v = \varphi(F, l, m). \tag{1}$$

Будем искать эту зависимость в наиболее общем виде

$$v \cdot F^{\alpha} \cdot l^{\beta} \cdot m^{\gamma} = const, \tag{1a}$$

const, стоящая справа от знака равенства, считается безразмерной, т.е. содержит все основные единицы в нулевой степени.

Выпишем размерность входящих в (1) физических величин:

$$[v] = м \cdot с^{-1}; \qquad [l] = м; \qquad [m] = кг; \qquad [F] = кг \cdot м \cdot с^{-2}. \tag{2}$$

Из (2) видно, что $N = 4;\ K = 3;\ N - K = 1,$ т.е. комбинация вида (1) единственная. Подставим теперь размерности $v,\ F,\ l$ и m в искомую зависимость:

$$м \cdot с^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot кг^{\gamma} = const = м^{0} \cdot с^{0} \cdot кг^{0}$$

или

$$м^{1+\alpha+\beta} \cdot с^{-1-2\alpha} \cdot кг^{\alpha+\gamma} = м^{0} \cdot с^{0} \cdot кг^{0} = const. \tag{3}$$

Равенство (3) может выполниться, только если показатели степеней у *м, с* и *кг* с обеих сторон равенства одинаковы, т.е. если выполняются условия:

$$\left.\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0 \\ -1 - 2\alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}\right|, \text{ откуда: } \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Подставим найденные значения в (1a) и получим:

$$v = const\sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}. \qquad (4)$$

Это выражение и даст искомый вид аналитической зависимости, связывающей *v, F, l, m* в обсуждаемом явлении.

Значение константы в (4) нужно определять экспериментально, но, как правило, она ~ *1*.

Пример 4.2. Найти зависимость пути, проходимого материальной точкой, движущейся с ускорением *a*, от *a* и времени *t*.

Имеем:

$$[a] = м \cdot с^{-2}; \qquad [t] = с; \qquad [S] = м.$$

Ищем зависимость вида

$$S = \varphi(a, t) \text{ или } S \cdot a^{\alpha} \cdot t^{\beta} = const.$$

Имеем три физические величины *S, a, t,* размерности которых выражаются через две основные единицы *м* и *с*, следовательно, искомая закономерность единственна.

$$м \cdot м^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot с^{\beta} = const = м^{0} \cdot с^{0}$$

или

$$\begin{cases} 1 + \alpha = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{array} \right. .$$

Искомая зависимость имеет вид:

$$S = const \cdot a \cdot t^{2}.$$

Из эксперимента можно получить, что $const = \frac{1}{2}$.

Пример 4.3. Пусть тело с массой *m* перемещается прямолинейно под действием постоянной силы *F.* Найдем скорость тела *v* в конце пройденного отрезка длиной *S,* если начальная скорость тела равна нулю.

Нужно найти зависимость вида:

$$v = \varphi(F, S, m).$$

Предположим, что формула, определяющая скорость *v* как функцию *F, m* и *S,* имеет степенной вид, т.е. искомая зависимость имеет вид

$$v \cdot F^{\alpha} \cdot S^{\beta} \cdot m^{\gamma} = const,$$

Выпишем размерность входящих в задачу физических величин:

$$[v] = м \cdot с^{-1}; \qquad [S] = м; \qquad [m] = кг; \qquad [F] = кг \cdot м \cdot с^{-2}.$$

Отсюда получим

$$м \cdot с^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot кг^{\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot с^{0}$$

или

$$м^{1+\alpha+\beta} \cdot с^{-1-2\alpha} \cdot кг^{\alpha+\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot с^{0}.$$

Запишем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 1+\alpha+\beta=0 \\ -1-2\alpha=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{array}\right|, \text{ откуда: } \alpha=-\frac{1}{2}; \quad \beta=-\frac{1}{2}; \quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Получившуюся зависимость запишем в виде

$$v = const\left(\frac{F}{m}\right)^{1/2} \cdot S^{1/2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части этого соотношения, мы получим,

$$v^2 = const \cdot \frac{F}{m} \cdot S \text{ или } mv^2 = const \cdot F \cdot S.$$

В последнем выражении несложно увидеть закон сохранения энергии. Таким образом, положив *const = ½,* получим:

$$\frac{mv^2}{2} = F \cdot S.$$

Анализ размерностей применяется в физике еще со времен Ньютона. Именно Ньютон сформулировал тесно связанный с методом размерностей принцип подобия. Принцип подобия, сформулированный Ньютоном, заключается в том, что отношение v^2/S в рассмотренной задаче прямо пропорционально отношению F/m. Возьмем, например, два тела с разными массами m_1 и m_2; будем действовать на них разными силами F_1 и F_2, но такими, что отношения F_1/m_1 и F_2/m_2 будут одинаковыми. Под действием этих сил тела начнут двигаться. Если начальные скорости тел равны нулю, то скорости, приобретаемые телами на отрезке пути длины S, будут равны. Таким образом, мы пришли к закону подобия с помощью идеи о равенстве размерностей правой и левой частей формулы, описывающей степенную связь значения конечной скорости со значениями силы, массы и длины пути.

Пример 4.4. Найти выражение для периода колебания математического маятника.

Будем считать, что период колебаний T может зависеть от длины математического маятника l, массы маятника m и ускорения свободного падания g. Имеем четыре физические величины:

$$[T] = c; \qquad [l] = м; \qquad [m] = кг; \qquad [g] = м \cdot c^{-2},$$

выраженные через три основные единицы – *с, м, кг.* Ищем зависимость вида:

$$T = \varphi(l,m,g).$$

Поскольку мы имеем четыре физические величины, выраженные через три основные единицы и $N - K = 1$, следовательно искомая зависимость единственна.

Составляем комбинацию:

$$T \cdot l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot g^{\gamma} = const$$

или

$$c \cdot м^{\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot c^{-2\gamma} = const = c^0 \cdot м^0 \cdot кг^0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \gamma = 1/2 \\ \alpha = -1/2 \\ \beta = 0. \end{array} \right.$$

В итоге:

$$T = const\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Из эксперимента известно: *const* = 2π, т.е. имеем нетипичный случай, когда определяемая константа оказывается заметно больше единицы.

Пример 4.5. Пусть через центр земного шара насквозь проходит колодец, в который бросили камень массы m. Камень станет совершать колебания в окрестности центра Земли. Найти период T этих колебаний.

Имеем четыре величины T, m, g, R, характеризующие задачу (R – радиус Земли). Их размерности:

$$[T] = c; \qquad [m] = кг; \qquad [g] = м \cdot c^{-2}; \quad [R] = м$$

выражаются через три основные единицы. Ищем зависимость вида:

$$T = \varphi(R,m,g).$$

Составляем комбинацию:

$$T \cdot R^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot g^{\gamma} = const$$

или

$$c \cdot м^{\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot c^{-2\gamma} = const = c^0 \cdot м^0 \cdot кг^0.$$

И так же, как в предыдущем примере, находим:

$$T = const\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Пример 4.6. Найти выражение для второй космической скорости V через радиус земного шара R и ускорение свободного падения g на поверхности Земли.

Имеем три физические величины, размерности которых выражены через две основные единицы, следовательно, $N - K = 1$. Ищем зависимость вида:

$$V = \varphi(R, g).$$

$$[V] = м \cdot с^{-1}; \qquad [g] = м \cdot с^{-2}; \quad [R] = м.$$

Составляем комбинацию:

$$V \cdot R^{\alpha} \cdot g^{\beta} = const,$$

или

$$м \cdot с^{-1} \cdot м^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot с^{-2\beta} = const = м^{0} \cdot с^{0};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0 \\ -1 - 2\beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1/2 \\ \beta = -1/2 \end{array} \right. .$$

Так как три физические величины выражаются через $м$ и $с$, и искомая комбинация единственна,

$$V = const\sqrt{g \cdot R}\ .$$

Пример 4.7. Сильный точечный взрыв в атмосфере. Пусть при взрыве в течение весьма короткого времени выделилось столько энергии E, что на дальнейшее распространение образовавшейся ударной волны противодавление окружающего воздуха влияния не оказывает. Такой взрыв называется сильным точечным взрывом. Нужно найти закон движения ударной волны взрыва, т.е. зависимость ее радиуса R от времени t, энергии взрыва E и инерционных свойств атмосферы, характеризуемой плотностью ρ:

$$R = \varphi(t, E, \rho).$$

$$[E] = м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2}; \qquad [\rho] = кг \cdot м^{-3}; \qquad [t] = с; \quad [R] = м,$$

т.е. имеются четыре физические величины, выражающиеся через три основные единицы. Ищем комбинацию

$$R \cdot E^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot t^{\gamma} = const$$

или

$$м \cdot м^{2\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{-3\beta} \cdot с^{\gamma} = const = м^{0} \cdot кг^{0} \cdot с^{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1/5 \\ \beta = 1/5 \\ \gamma = -2/5 \end{array} \right. .$$

В итоге получаем:

$$R = const\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} \cdot t^{2/5} = const\sqrt[5]{\frac{E \cdot t^2}{\rho}}. \quad (5)$$

Отсюда можно найти и скорость ударной волны как функцию E, ρ и t:

$$V = \frac{\partial R}{\partial t} = const\,\frac{2}{5}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} \cdot t^{-3/5}. \quad (6)$$

Константа определяется экспериментально, причем эксперимент можно провести в лабораторных условиях. А после того как константа определена, выражения (5) и (6) становятся точными и могут служить для определения энергии взрыва по зависимостям $R = R(t)$ или $V = V(t)$.

В начале эры атомных взрывов Дж. Тейлор, обработав рекламный кинофильм об американских атомных испытаниях, т.е. сняв зависимость $R = R(t)$, точно нашел и опубликовал в научной литературе полученное значение для энергии взрыва $\approx 10^{14}$ Дж, (т.е. порядка мегатонны тринитротолуола), считавшееся секретным, чем вызвал переполох в американских правительственных кругах и обвинение в разглашении секретных сведений [6].

Пример 4.8. Поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает шар (рис. 2). Пусть скорость потока равна v, давление в жидкости вдали от шара равно нулю, а давление в передней лобовой точке шара равно p. Исследовать зависимость p от v.

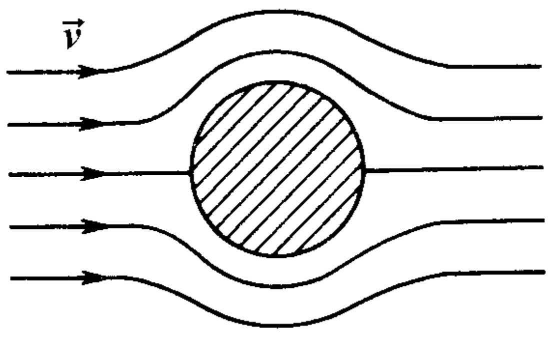

Рис. 2.

Так как жидкость является идеальной, т.е. невязкой, то течение будет ламинарным. Искомое давление, очевидно, зависит от плотности жидкости ρ, от скорости потока v и, может быть, от радиуса шара R:

$$p = \varphi(\rho, v, R).$$

$$[\rho] = кг \cdot м^{-3}; \qquad [v] = м \cdot с^{-1}; \qquad [R] = м; \qquad [p] = м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2},$$

$$p \cdot \rho^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot R^{\gamma} = const$$

или

$$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot м^{-3\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot с^{-\beta} \cdot м^{\gamma} = const = м^0 \cdot кг^0 \cdot с^0;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1-3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 1+\alpha=0 \\ -2-\beta=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \beta=-2 \\ \gamma=0 \end{array} \right. .$$

В итоге получаем:

$$p = const \cdot \rho \cdot v^2 . \qquad (7)$$

Равенство (7) показывает, что искомое давление пропорционально $\rho \cdot v^2$ и не зависит от радиуса шара R.

В приведенном решении учитывалось лишь динамическое давление жидкости; если же учесть и статическое давление, то равенство (7) примет вид

$$p = p_0 + const \cdot \rho \cdot v^2 ,$$

где p_0 – давление жидкости вдали от шара.

Пример 4.9. Найти силу F, с которой поток, обтекающий шар в предыдущей задаче, действует на шар.

Запишем искомую зависимость в виде:

$$F = \varphi\ (\rho, v, R).$$

$$F \cdot \rho^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot R^{\gamma} = const$$

$$[\rho] = кг \cdot м^{-3}; \qquad [v] = м \cdot c^{-1}; \qquad [R] = м; \qquad [F] = м \cdot кг \cdot c^{-2},$$

$$м \cdot кг \cdot c^{-2} \cdot м^{-3\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot c^{-\beta} \cdot м^{\gamma} = const = м^0 \cdot кг^0 \cdot c^0 .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 1+\alpha=0 \\ -2-\beta=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \beta=-2 \\ \gamma=-2 \end{array} \right. .$$

В итоге получаем:

$$F = const \cdot \rho \cdot v^2 \cdot R^2 . \qquad (8)$$

Соотношение (8) позволяет сделать интересный вывод. Так как это равенство верно при любых значениях v, то естественно предположить, что оно остается справедливым и в случае, когда v отрицательно (т.е. когда скорость направлена в противоположную сторону). Поэтому можно написать:

$$F(-v) = const \cdot \rho \cdot (-v)^2 \cdot R^2 = const \cdot \rho \cdot v^2 \cdot R^2 = F(v);$$

откуда

$$F(-v) = F(v). \qquad (9)$$

Однако, с другой стороны, ясно, что если изменить знак скорости, то должен измениться и знак F (ибо тогда сила F будет направлена в противоположную сторону). Поэтому должно выполняться также равенство

$$F(-v) = -F(v). \qquad (9a)$$

Сравнивая теперь (8) и (9а), получаем

$$F(v) = 0.$$

или, что то же самое, *const = 0.*

Таким образом, в модели идеальной жидкости сила, с которой поток действует на шар, равна нулю. Точный расчет подтверждает это теоретическое предположение (гидродинамический парадокс Даламбера-Эйлера).

Пример 4.10. Доказать, что в очень сильно сжатом веществе (например, в глубине нейтронных звезд или в атомных ядрах) скорости частиц обратно пропорциональны среднему расстоянию между ними.

В очень сильно сжатом веществе должны уже как-то сказываться квантовые эффекты. Это заведомо так, если среднее расстояние между частицами меньше боровского радиуса. Поэтому система параметров задачи есть: постоянная Планка $\hbar$, масса частицы m, скорость v и среднее расстояние между частицами a. Ищем зависимость вида:

$$v = \varphi(\hbar, m, a)$$

или

$$v \cdot \hbar^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot a^{\gamma} = const;$$

$$[v] = м \cdot с^{-1}; \qquad [\hbar] = м^2 \cdot кг \cdot с^{-1}; \qquad [m] = кг; \qquad [a] = м;$$

$N - K = 1$ и искомая зависимость единственна

$$м \cdot с^{-1} \cdot м^{2\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot с^{-\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} = const = м^0 \cdot кг^0 \cdot с^0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha + \gamma = 0 \\ -1 - \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array} \right. .$$

В итоге получаем:

$$v = const \frac{\hbar}{m \cdot a}.$$

Из полученного соотношения можно перейти к соотношению неопределенностей:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar.$$

Пример 4.11. В одной из пластин плоского конденсатора имеется маленькое круглое отверстие, затянутое мыльной пленкой. Радиус отверстия r, конденсатор заряжен до разности потенциалов U и отсоединен от батареи. Расстояние d между пластинами конденсатора мало по сравнению с линейными размерами пластин. Коэффициент поверхностного натяжения пленки σ. Оценить величину прогиба пленки внутрь конденсатора, считая его малым (слабое поле).

Силы поверхностного натяжения действуют по касательной к поверхности пленки. Их составляющая вдоль силовых линий электрического поля в конденсаторе (перпендикулярная пластинам) получается умножением на соотношение: h/r, где h – величина прогиба. По условию это отношение мало: $h/r << 1$. Проекция силы, обусловленной поверхностным натяжением, на направление силовых линий, есть, очевидно,

$$2\pi r\sigma \cdot \frac{h}{r} = 2\pi\sigma h.$$

Эта сила должна быть уравновешена силой притяжения пленки к другой пластине конденсатора. Последняя же равна "давлению" электрических сил (т.е. силе притяжения пластин друг к другу, деленной на площадь пластин), умноженному на площадь пленки, приблизительно равную πr^2. "Давление" электрических сил равно, в свою очередь, плотности энергии, заключенной в электростатическом поле конденсатора, поскольку они (давление и объемная плотность энергии) имеют одинаковые размерности:

$$\left(\frac{E^2}{8\pi}\right) = \left(\frac{U^2}{8\pi d^2}\right).$$

Написав равенство

$$2\pi\sigma h \approx \pi r^2 \left(\frac{U^2}{8\pi d^2}\right),$$

для величины прогиба h получаем:

$$h \approx \frac{U^2 r^2}{16\pi\sigma d^2}.$$

Пример 4.12. Найти критерий Тонкса-Френкеля неустойчивости заряженной поверхности жидкости [7,8]. Из экспериментов известно, что при достаточно большой величине напряженности электрического поля E, перпендикулярного к свободной поверхности проводящей жидкости, последняя становится неустойчивой, и на ней образуется система выступов, с вершин которых начинается сброс избыточного поверхностного заряда в виде высокодисперсных сильно заряженных капелек. Характерные физические величины задачи: напряженность электрического поля E, плотность жидкости ρ, ускорение поля силы тяжести g и коэффициент поверхностного натяжения σ, имеющие размерности в СГС (Приложения 4, 5):

$$[E] = см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot c^{-1}; \qquad [\rho] = г \cdot см^{-3}; \qquad [g] = см \cdot c^{-2}; \quad [\sigma] = г \cdot c^{-2}.$$

Ищем зависимость вида:

$$E = \varphi(\rho, g, \sigma)$$

или

$$E \cdot \rho^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \sigma^{\gamma} = const;$$

$$см^{-1/2} \cdot г^{1/2} \cdot c^{-1} \cdot г^{\alpha} \cdot см^{-3\alpha} \cdot см^{\beta} \cdot c^{-2\beta} \cdot г^{\gamma} \cdot c^{-2\gamma} = const = см^{0} \cdot г^{0} \cdot c^{0};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1/2 - 3\alpha + \beta = 0 \\ 1/2 + \alpha + \gamma = 0 \\ -1 - 2\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1/4 \\ \beta = -1/4 \\ \gamma = -1/4 \end{array} \right. .$$

В результате получим

$$E(\rho\, g\, \sigma)^{-1/4} = const \text{ или } \frac{E^2}{\sigma} a \equiv \frac{E^2}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{1/2} = const,$$

$$a = \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{1/2} \text{ – капиллярная постоянная.}$$

В строгой теории [8,9] находится значение константы, которая равна

$$const = 2\sqrt{\pi}.$$

При $\frac{E^2}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{1/2} \geq 2\sqrt{\pi}$ поверхность жидкости претерпевает неустойчивость.

Пример 4.13. "Докажем" с помощью метода размерностей теорему Пифагора [6]. Площадь прямоугольного треугольника S определяется величиной его гипотенузы c и, для определенности, меньшим из острых углов φ: $S = f(c,\varphi)$. Анализ размерностей дает $S = c^2\ \Phi(\varphi)$. Высота, перпендикулярная гипотенузе (рис. 3), разбивает основной треугольник на два подобных ему прямоугольных треугольника, гипотенузами которых являются

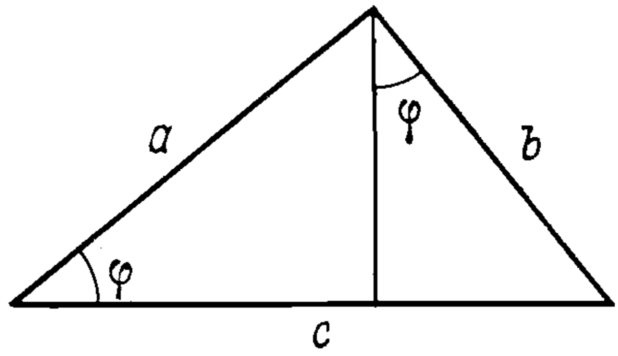

Рис. 3.

уже соответственно катеты a и b основного треугольника. Стало быть, их площади равны $S_1 = a^2\ \Phi(\varphi)$, $S_2 = b^2\ \Phi(\varphi)$, где $\Phi(\varphi)$ – то же, что и в случае основного треугольника. Сумма площадей S_1 и S_2 равна площади основного треугольника S:

$$S = S_1 + S_2,$$

откуда

$$c^2\ \Phi(\varphi) = a^2\ \Phi(\varphi) + b^2\ \Phi(\varphi),$$

так что

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

что и требовалось доказать.

5. Использование метода размерностей

5.1. Ситуация N – K = 2. Векторные единицы длины

В случае, когда $N - K > 1$, вышеприведенная процедура отыскания безразмерных комбинаций приводит к многозначным результатам.

Пример 5.1. Оценить длину свободного пробега молекулы в газе.

Пусть l – длина пробега, a – характерный линейный размер молекулы, концентрация молекул n

$$[l] = см; \qquad [a] = см; \qquad [n] = см^{-3}; \quad N - K = 2.$$

При отыскании безразмерных комбинаций из l, a, n мы получаем неоднозначный результат. С точки зрения размерности нас устроит любая из комбинаций:

$$l \sim a; \qquad l \sim n^{-1/3}; \qquad l \sim (n \cdot a^2)^{-1}; \qquad l \sim a^3 \cdot n^{2/3};$$

т.е. мы получаем множество ответов. Какой из них верный?

Учтем, что l и a имеют разный физический смысл: l – длина пробега, а a^2 – поперечное сечение молекулы – то, что мешает пробегу.

Поэтому введем различные единицы длины: вдоль направления пробега $см_0$, а поперек направления пробега $см_*$:

$$[l] = см_0; \qquad [a] = см_*; \qquad [n] = см_0^{-1} см_*^{-2}.$$

Тогда безразмерная комбинация принимает вид:

$$l \cdot a^{\alpha} \cdot n^{\beta} = const \qquad \Rightarrow \qquad см_0 \cdot см_*^{\alpha} \cdot см_0^{-\beta} \cdot см_*^{-2\beta} = const = см_0^0 \cdot см_*^0;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\beta=0 \\ \alpha-2\beta=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{array} \right. .$$

Искомое выражение записывается в форме:

$$l = a^{-2} \cdot n^{-1} = \frac{1}{n \cdot a^2} .$$

А добились мы этого с помощью одной маленькой хитрости.

Размерность всех параметров, связь между которыми мы пытаемся отыскать, есть сантиметр. Но если задуматься, то сантиметр сантиметру – рознь. Действительно: длину пробега какой-нибудь избранной молекулы, за которой мы следим, мы измеряем вдоль ее траектории, а площадь поперечного сечения других молекул, "мешающих" движению избранной, расположены "поперек" ее траектории. "Окрасим" разные сантиметры каким-нибудь индексом, например, длину пробега будем измерять $см_{\parallel}$, а радиус молекул в $см_{\perp}$. А как быть с концентрацией n? Какие сантиметры выбрать здесь? Так как куб имеет три ребра, одно из них можно направить вдоль траектории избранной молекулы и измерять в $см_{\parallel}$, тогда два других ребра окажутся перпендикулярными траектории, и их надо измерять $см_{\perp}$. Значит, размерность n приобретает вид $см_{\perp}^{-2} см_{\text{II}}^{-1}$, размерность длины свободного пробега l есть $см_{\parallel}$, а размерность радиуса молекулы a – $см_{\perp}$.

После всех этих ухищрений мы из множества выписанных выше "возможных" зависимостей l от n и a совершенно однозначно выбираем единственную формулу: $l \sim n^{-1}\ a^{-2}$. "Расслоив" сантиметры на "параллельные" и "перпендикулярные", мы увеличили тем самым число основных величин, их стало две, и теперь $N - K' = 1$. Этот же прием помогает и во многих других ситуациях. Введенные нами единицы длины носят название *направленных, или векторных, единиц длины.*

Приведем еще один пример. Бывает так, что две существенно различные физические величины имеют в какой-то системе единиц одинаковые размерности. В системе СГС, например, такими величинами являются момент силы $\vec{L}$ и работа A. Обе величины имеют размерности $дин \cdot см = г \cdot см^2 \cdot с^{-2}$. "Обычный" метод размерностей не может эти величины различить. Но если мы снова применим нашу "маленькую хитрость", введя единицы длины вдоль траектории движения и перпендикулярно к ней, $\vec{L}$ и A сразу станут различаться. Для вычисления работы мы всегда находим проекцию силы на направление движения. В определении же момента силы действует "перпендикулярные" единицы длины. Другими словами, момент есть векторное, а работа – скалярное произведение:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad A = \vec{F} \cdot \vec{r},$$

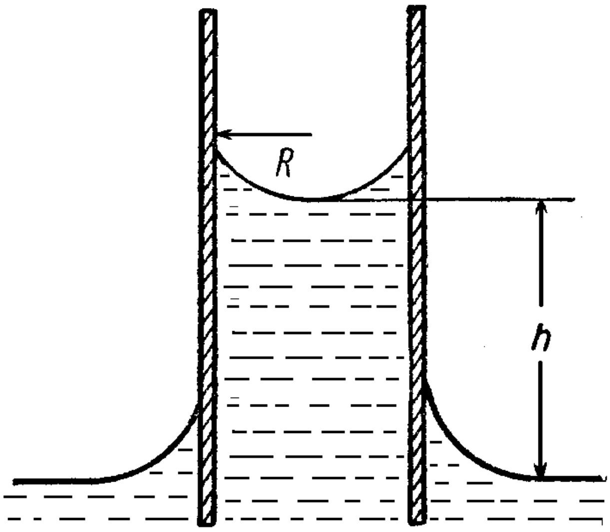

Рис. 4.

$\vec{F}$ – сила, $\vec{r}$ – радиус-вектор. Ясно еще, что в саму силу $\vec{F}$ в следствие 2-го закона Ньютона входят "параллельные" сантиметры. Итак, момент силы $\vec{L}$ имеет размерность $г \cdot см_{\|} \cdot см_{\perp}$, а работа A размерность – $г \cdot см_{\text{II}}^{2} c^{-2}$.

Пример 5.2. Оценить максимально возможную высоту деревьев над поверхностью Земли.

Известно, что питание (влага и минеральные вещества) листьям деревьев поставляется естественным образом за счет эффекта капиллярного поднятия жидкости. Значит, для отыскания ответа на поставленный вопрос, мы сначала должны вывести формулу для высоты h поднятия жидкости по капилляру (рис. 4). Установим взаимосвязь между высотой h, радиусом капилляра r, коэффициентом поверхностного натяжения σ, плотностью жидкости ρ, ускорением поля тяжести g:

$$h \cdot r^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot \sigma^{\gamma} \cdot g^{\delta} = const.$$

$[h] = см; \qquad [r] = см; \qquad [\rho] = г \cdot см^{-3}; \qquad [\sigma] = г \cdot c^{-2}; \qquad [g] = см \cdot c^{-2}.$

Учтем, что у h и r различный физический смысл, хотя они имеют одну размерность. Поэтому присвоим h размерность $см_0$, а r – $см_*$, тогда $[g] = см_0 \cdot c^{-2}$, а $[\rho] = г \cdot см_*^{-1} \cdot см_0^{-2}$.

Для того чтобы разделить $см_0$, и $см_*$ в $[\rho] = г \cdot см^{-3}$, вспомним закономерности поднятия жидкости в двугранном угле, составленном из двух плоских стекол.

Ясно, что высота поднятия h определяется в заданном месте только расстоянием между пластинами. Поэтому в единицу объема $см_0$ должен входить в квадрате, а $см_*$ – в первой степени:

$$см_0 \cdot см_*^{\alpha} \cdot г^{\beta} \cdot см_*^{-\beta} \cdot см_0^{-2\beta} \cdot г^{\gamma} \cdot c^{-2\gamma} \cdot см_0^{\delta} \cdot c^{-2\delta} = const = см_0^{0} \cdot см_*^{0} \cdot г^{0} \cdot c^{0}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2\beta+\delta=0 \\ \alpha-\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ -2\gamma-2\delta=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=1 \\ \gamma=-1 \\ \delta=1 \end{array} \right. \Rightarrow\ h\cdot r\cdot\rho\cdot\sigma^{-1}\cdot g=const;$$

$$h=const\frac{\sigma}{r\cdot\rho\cdot g}.$$

Точное значение константы $const=2\cdot\cos\theta\approx 1$.

Учтем теперь, что понятие сплошной среды (в смысле жидкости) применимо лишь в масштабах много бóльших молекулярных размеров. Поэтому естественно принять $r \geq 100$ нм = 10^{-5} см. Тогда при $\sigma = 70$ дин·см, ρ = 1 г/см^3; g = 10^3 см/сек^2 получим оценку максимально возможной высоты деревьев:

$$h\leq\frac{70}{10^{-5}\cdot 1\cdot 10^{3}}\approx 10^{4}\ см=100\ м.$$

Именно такой высоты достигают секвойи.

Пример 5.3. Тело брошено с башни высотой H в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Требуется найти дальность полета x_0.

Очевидно, что помимо H и v_0 дальность полета должна зависеть и от ускорения свободного падения g. Таким образом, необходимо найти зависимость вида:

$$x_0=\varphi(v_0,H,g).$$

Размерность используемых величин:

$$[x_0]=м;\qquad [v_0]=м\cdot c^{-1};\qquad [H]=м;\qquad [g]=м\cdot c^{-2}.$$

Таким образом, $N = 4,\ K = 2$ и $N - K = 2$.

Введем отдельные единицы для измерения расстояний по вертикали – $м_y$ и по горизонтали – $м_x$. Тогда размерности таковы:

$$x_0\cdot v_0^{\alpha}\cdot H^{\beta}\cdot g^{\gamma}=const$$

или

$$[x_0]=м_x;\qquad [v_0]=м_x\cdot c^{-1};\qquad [H]=м_y;\qquad [g]=м_y\cdot c^{-2}.$$

Теперь $K = 3$, а $N - K = 1$. Составляем комбинацию размерностей:

$$м_x\cdot м_x^{\alpha}\cdot c^{-\alpha}\cdot м_y^{\beta}\cdot м^{\gamma}\cdot c^{-2\gamma}=const=м_x^{0}\cdot м_y^{0}\cdot c^{0}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ -\alpha-2\gamma=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha=-1 \\ \beta=-1/2 \\ \gamma=1/2 . \end{matrix}$$

В итоге получим искомую зависимость:

$$x_0 = const\ v_0\sqrt{\frac{H}{g}} \ .$$

Пример 5.4. Хотя метод размерностей был по существу введен уже при построении основ классической механики, его эффективное применение для решения физических задач началось и конце XIX – в начале XX века. Большая заслуга в пропаганде этого метода и решении с его помощью ряда интересных и важных задач принадлежит выдающемуся физику Джону Вильяму Стрэтту (лорду Рэлею). В 1915 году Рэлей писал: «Я часто удивляюсь тому незначительному вниманию, которое уделяется великому принципу подобия даже со стороны весьма крупных ученых. Нередко случается, что результаты кропотливых исследований преподносятся как вновь открытые «законы», которые, тем не менее, можно было получить априорно в течение нескольких минут». Рассмотрим ниже одну из классических задач, часто называемых задачами Рэлея.

Задача Рэлея о колебаниях шарика на струне.

Пусть между точками *A* и *B* натянута струна. Сила натяжения струны *F*. На середине этой струны в точке *C* находится тяжелый шарик (рис. 5). Длина отрезка *AC (и* соответственно *CB)* равна *l*. Масса *M* шарика намного больше массы самой струны.

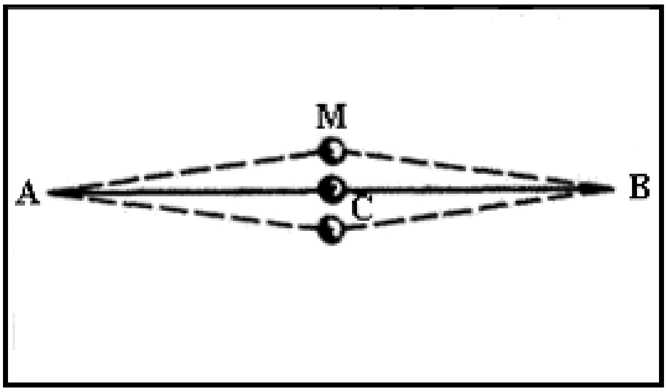

Рис. 5.

Струну оттягивают и отпускают. Очевидно, что шарик будет совершать колебания. Если амплитуда этих колебаний много меньше длины струны, то процесс будет гармоническим.

Рэлей показал, как найти зависимость частоты этих колебаний ω от натяжения струны *F* массы шарика *M* и длины струны *l*. Воспроизведем его рассуждения.

Предположим, что величины ω, F M и l связаны степенной зависимостью:

$$\omega \cdot F^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot l^{\gamma} = const$$

Выпишем размерности ω, F M и l:

$$[\omega] = c^{-1}; \qquad [l] = м; \qquad [M] = кг; \qquad [F] = кг \cdot м \cdot c^{-2}.$$

Отсюда получим

$$c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot c^{0}.$$

Запишем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -1 - 2\alpha = 0 \end{array}\right|, \text{ откуда: } \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно

$$\omega = const\left(\frac{F}{M}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{l^{1/2}}.$$

Точная формула для частоты отличается от найденной нами всего в $\sqrt{2}$ раз, таким образом получим

$$\omega^{2} = 2\,\frac{F}{M \cdot l}.$$

Пример 5.5. Существуют и другие способы использования метода размерностей, когда $N - K > 1$. Обычно в такой ситуации для отыскания ответа сформулированной задачи привлекаются дополнительные физические соображения. Например, будем искать частоту пульсаций небольшой сферической капли жидкости, падающей из круглого отверстия.

Задача Рэлея о колебаниях сферической капельки.

Пусть из круглого отверстия вытекает капля (рис. 6). Очевидно, что в равновесии капля должна иметь сферическую форму – поверхностная энергия при этом минимальна, а всякая система стремится попасть в состояние с минимальной энергией. Даже очень малые деформации капли приведут к тому, что силы поверхностного натяжения «заставят» ее пульсировать, форма капли будет периодически изменяться. Будем полагать, что колеба-

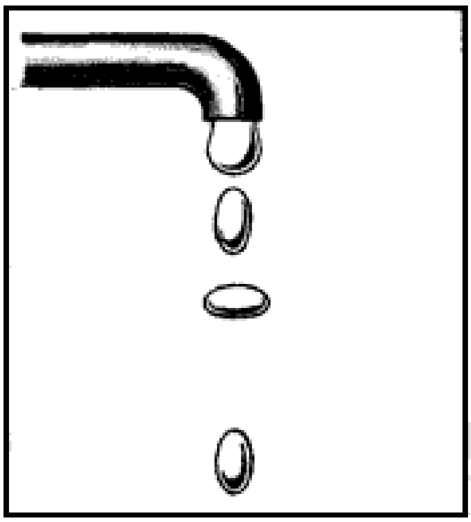

Рис. 6.

ния продолжаются достаточно долго и затухание их мало. Нас интересует вопрос о частоте (или периоде) процесса. Эта частота может зависеть, очевидно, от величины поверхностного натяжения жидкости σ, плотности жидкости ρ и радиуса капли *r*.

Итак, имеем четыре величины, характеризующие задачу: ω – частота, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ρ – плотность жидкости, r – радиус капли. Их размерности:

$$[\omega] = c^{-1}; \qquad [\sigma] = кг \cdot c^{-2}; \qquad [\rho] = кг \cdot м^{-3}; \qquad [r] = м.$$

Зависимость частоты ω от переменных σ, ρ, *r*, будем искать в виде:

$$\omega \cdot \sigma^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot r^{\gamma} = const;$$

$$c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{-3\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} = const = м^{0} \cdot кг^{0} \cdot c^{0};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - 2\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 3/2 \end{array} \right. ; \Rightarrow$$

$$\omega = const\sqrt{\frac{\sigma}{r^{3} \cdot \rho}}. \qquad (1)$$

Можно выразить удивление по поводу того, что вес капли не является фактором в данной задаче, и потребовать включения *g* в число переменных. Конечно, *g* является существенной для процесса величиной, но, так как капля мала, ускорением силы тяжести можно пренебречь.

Если записать искомую зависимость как

$$\omega = \varphi(\sigma, \rho, r, g) \text{ или } \omega \cdot \sigma^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot r^{\gamma} \cdot g^{\delta} = const;$$

(т.е. теперь $N - K = 2$), то результат получается многозначным:

$$c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{-3\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot м^{\delta} \cdot c^{-2\delta} = const = кг^{0} \cdot c^{0} \cdot м^{0};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - 2\alpha - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -3\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \gamma = -1/2 - 2\alpha \\ \delta = -1/2 - \alpha \end{array} \right. ; \Rightarrow$$

$$\omega = const\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \left(\frac{\rho \cdot r^{2} \cdot g}{\sigma}\right)^{\alpha}.$$

В этом выражении $\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot$ имеет размерность c^{-1}, а выражение стоящее в скобках безразмерно.

Из полученного отношения видно, что размерности обеих частей равенства совпадут при $\alpha = 0$, и при $\alpha = -1/2$. Таким образом, имеем два варианта ответа. Но при $\alpha = 0$ мы фактически исключаем из рассмотрения поверхностное натяжение жидкости. В этом случае объем жидкости может сохранить сферическую форму лишь под действием самогравитации. Другими словами,

$$\omega \sim \sqrt{\frac{g}{r}}$$

определяет частоту пульсаций гравитирующей сферы (нейтронной звезды). С другой стороны, по мере того как капля уменьшается в размерах, роль гравитационных эффектов g, которая пропорциональна r^3, уменьшается быстрее, чем влияние энергии поверхностного натяжения, которая пропорциональна r^2. Таким образом, для мелких капель влиянием g на ω можно пренебречь по сравнению с влиянием сил поверхностного натяжения σ и убрать как не влияющий на результат первый множитель в полученной форме в *const*. В итоге в приближенном решении g исключается из формулы, а если принять $\alpha = -½$, то размерность оставшегося множителя станет c^{-1}. В результате получаем тот же ответ, что и ранее.

Используя принцип подобия, можно рассмотреть зависимость периода колебания капли от ее радиуса. Перепишем формулу частоты (1) в следующем виде:

$$\omega^2 r^3 = const\left(\frac{\sigma}{\rho}\right).$$

Считая σ и ρ параметрами, характеризующими жидкость и потому одинаковыми для капель данной жидкости, имеющих разные размеры, мы приходим к заключению, что периоды $T_1 = 2\pi/\omega_1$ и $T_2 = 2\pi/\omega_2$ колебаний двух капель одной и той же жидкости и радиусы r_1, и r_2 этих капель связаны соотношением

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

– квадраты периодов колебаний двух капель относятся как кубы их размеров.

Пример 5.6. Определите частоту колебаний атомных ядер.

Нередко в ядерной физике применяется капельная модель ядра. В ней ядро рассматривается как капелька ядерного вещества –

«жидкости», состоящей из протонов и нейтронов. Ядро-капельку удерживают от распада силы поверхностного натяжения.

Нуклоны (протоны и нейтроны) находятся внутри ядра в связанном состоянии. Это значит, что для того, чтобы «разобрать» ядро на нуклоны, нужно затратить определенную энергию. В расчете на один нуклон эта энергия равна примерно $\varepsilon = 13\cdot10^{-13}$ Дж/нуклон. Радиус ядра $r \approx 10^{-14}$ *м*, масса протона $m_p \approx 1{,}7\cdot10^{-27}$ *кг*. Поскольку нас интересует сейчас только качественная зависимость частоты колебаний от параметров ядра и количественная оценка по порядку величины, мы можем не учитывать разницу масс протона и нейтрона и считать массу нуклона равной массе протона.

Для частоты колебаний капельки ядерного вещества можно воспользоваться той же формулой, что и для колебаний капель обычной жидкости. Однако нам неизвестны поверхностное натяжение и плотность «ядерной жидкости». Попытаемся их вычислить исходя из общефизических соображений.

Полная поверхностная энергия в капельной модели должна быть по порядку величины такой же, как и энергия связи всех частиц, находящихся внутри капли. Если число нуклонов в ядре равно A (это число называют «массовым числом»), то полная энергия связи всех нуклонов равна $A\cdot\varepsilon$ и поверхностная энергия ядра-капельки по порядку величины тоже равна $A\cdot\varepsilon$. Поделив ее на площадь поверхности капли $S = 4\pi r^2$, мы и получим оценку для поверхностного натяжения: $\sigma \sim A\varepsilon/4\pi r^2$. Масса ядра из A нуклонов порядка $A\cdot m_p$, объем ядра $4\pi r^3/3$, следовательно, плотность «ядерной жидкости» по порядку величины равна $\rho \sim 3Am_p/4\pi r^3$. Подставив полученные выражения для σ и ρ в формулу

$$\omega = const\sqrt{\frac{\sigma}{r^3\cdot\rho}}.$$

мы получим интересующий нас результат

$$\omega = const\frac{1}{\sqrt{3}\,r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m_p}} = const\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m_p}}.$$

Типичные «ядерные» частоты – порядка 10^{22}с^{-1}. Расчеты, проведенные по полученной нами формуле, дают следующий результат

$$\omega \sim \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m_p}} = \frac{1}{10^{-14}}\sqrt{\frac{13\cdot10^{-13}}{2.7\cdot10^{-27}}} \approx 2.8\cdot10^{21}.$$

Т.е. мы получили величину частоты, весьма близкую к теоретической.

Пример 5.7. Найти формулу для периода колебания T ареометра Никольсона (рис. 7) массы M, плавающего в жидкости (например, в воде), при небольшом смешении его вниз от положения равновесия. Поперечное сечение стержня прибора равно S, плотность жидкости ρ.

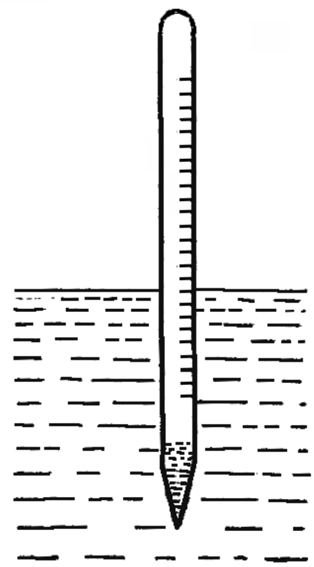

Рис. 7.

Прежде всего, следует решить вопрос, какие физические величины определяют период колебания ареометра. Очевидно, в дополнение к переменным, заданным в условии задачи, необходимо ввести ускорение силы тяжести g. В итоге запишем размерности учитываемых величин:

$$[T]=c; \qquad [M]=кг; \qquad [S]=м^2; \qquad [\rho]=кг\cdot м^{-3}; \qquad [g]=м\cdot c^{-2}.$$

$$\mathrm{N}-\mathrm{K}=2$$

Представим период T как произведение остальных величин, возведенных в ту или иную степень:

$$T\cdot M^{\alpha}\cdot S^{\beta}\cdot\rho^{\gamma}\cdot g^{\delta}=const.$$

Соответствующее уравнение размерности имеет вид:

$$c\cdot кг^{\alpha}\cdot м^{2\beta}\cdot м^{-3\gamma}\cdot кг^{\gamma}\cdot м^{\delta}\cdot c^{-2\delta}=const=м^0\cdot кг^0\cdot c^0;$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\beta-3\gamma+\delta=0\\ \alpha+\gamma=0\\ 1-2\delta=0\end{cases}\left|\begin{array}{l}\gamma=-\alpha\\ \delta=1/2\\ \beta=-3\alpha/2-1/4\end{array}\right.;\Rightarrow$$

$$T\cdot M^{\alpha}\cdot S^{-3\alpha/2-1/4}\cdot\rho^{-\alpha}\cdot g^{1/2}=const;$$

или получаем многозначный ответ

$$T=const\sqrt{\frac{S^{1/2}}{g}}\cdot\left(\frac{M}{\rho\cdot S^{3/2}}\right)^{-\alpha}.$$

Здесь $\sqrt{\dfrac{S^{1/2}}{g}}$ имеет размерность *c*, а выражение в скобках – безразмерно.

Значение *const* нельзя определить с помощью этого метода. Оно равно 2π. Обычный метод не позволяет определить значение показателя α. Воспользуемся векторными единицами длины, причем ось Oz будем считать вертикальной. Новые формулы размерности примут вид:

$$[T]=с; \qquad [M]=кг; \qquad [S]=м_x \cdot м_y;$$

$$[\rho]=кг \cdot м_x^{-1} \cdot м_y^{-1} \cdot м_z^{-1}; \qquad [g]=м_z \cdot с^{-2}.$$

И теперь $N-K=0$. Представим уравнение, содержащее эти переменные, в виде

$$T \cdot M^{\alpha} \cdot S^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \cdot g^{\delta}=const.$$

Уравнение размерности будет выглядеть следующим образом:

$$с \cdot кг^{\alpha} \cdot м_x^{\beta} \cdot м_y^{\beta} \cdot м_x^{-\gamma} \cdot м_y^{-\gamma} \cdot м_z^{-\gamma} \cdot кг^{\gamma} \cdot м_z^{\delta} \cdot с^{-2\delta}=const=с^0 \cdot кг^0 \cdot м_x^0 \cdot м_y^0 \cdot м_z^0.$$

Таким образом, у нас имеются четыре неизвестных показателя, определяемые системой из пяти уравнений. Однако эти уравнения зависят друг от друга; они сводятся к четырем ввиду симметрии системы относительно оси Oz, т.е.

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta-\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \\ -\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ 1-2\delta=0 \end{cases} \left| \begin{aligned} \alpha&=-1/2 \\ \beta&=1/2 \\ \gamma&=1/2 \\ \delta&=1/2 \end{aligned} \right. .$$

Следовательно,

$$T \cdot M^{-1/2} \cdot S^{1/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot g^{1/2}=const,$$

или

$$T=const\sqrt{\frac{M}{S \cdot \rho \cdot g}}.$$

Пример 5.8. В этом примере будет показано, что в случае, когда возникает сомнение относительно целесообразности учета какой-либо физической величины, разрешается ее включать в рассмотрение (в пробном порядке) и по виду конечной формулы судить затем о том, насколько необходима эта величина.

U-образная трубка однородного сечения заполнена ртутью на высоту h. Найти период собственных свободных колебаний столба ртути, выведенного из положения равновесия (рис. 8).

При начальном выявлении переменных физических величин, влияющих на период T, следует, во-первых, указать на ускорение силы тяжести g. Поскольку от g зависит инерция системы, требуется учитывать также h. Выбор остальных переменных является не столь ясным. Зависит ли период колебаний от массы m или плотности ртути ρ? Влияет ли на процесс начальное вертикальное смещение столба d или поперечное сечение трубки S? Ниже указаны размерности всех возможных переменных:

$$[T] = с; \quad [m] = кг; \quad [h] = м; \quad [d] = м; \quad [S] = м^2;$$

$$[\rho] = кг \cdot м^{-3}; \quad [g] = м \cdot с^{-2}.$$

Выясним вначале, влияет ли масса ртути на процесс колебаний. Запишем

$$T \cdot m^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma} = const,$$

откуда уравнение размерности

$$с \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} = const = с^0 \cdot кг^0 \cdot м^0.$$

Отсюда ясно, что α равно нулю. По той же причине следует исключить и плотность ρ, имеющую размерность $кг{\cdot}м^{-3}$. Следовательно, можно считать, что ни общая масса, ни плотность ртути не влияют на период колебаний.

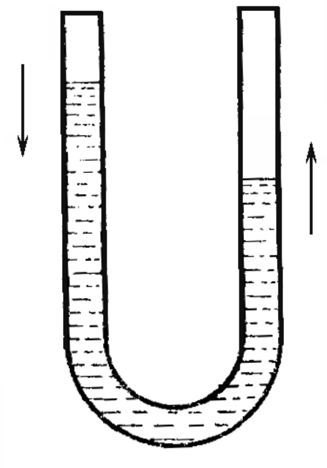

Рис. 8.

Не следует при этом забывать, что некоторые факторы, такие, как вязкость и трение, не учитываются ввиду приближенного характера решения.

С учетом возможности влияния величины d уравнение будет иметь вид

$$T \cdot d^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma} = const,$$

чему соответствует формула размерности

$$с \cdot м^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} = const = м^0 \cdot с^0.$$

$$\mathrm{N} - \mathrm{K} = 2.$$

Получаем:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 1 - 2\gamma = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \gamma = 1/2 \\ \beta = -1/2 - \alpha \end{array} \right.; \Rightarrow$$

$$T = const \left(\frac{d}{h}\right)^{-\alpha} \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Таким же образом, на основе уравнения

$$T \cdot S^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma} = const$$

получим

$$с \cdot м^{2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} = const = с^0 \cdot м^0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 1-2\gamma=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \gamma=1/2 \\ \beta=-1/2-2\alpha \end{array} \right.; \Rightarrow$$

$$T=const\left(\frac{S}{h^2}\right)^{-\alpha}\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Если не использовать усовершенствованные приемы, то методом размерностей невозможно определить показатель безразмерной постоянной в d/h или S/h^2. Однако можно поставить простой эксперимент и выяснится, что при малых d имеем

$$\alpha=0,\ const=\pi\sqrt{2}\ ,\Rightarrow\ T=\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}\ .$$

Метод размерностей в рассматриваемой ситуации указывает на вид эксперимента, который необходимо было провести.

Пример 5.9. Найти высоту поднятия жидкости в капиллярной трубке. Эту задачу мы решали в примере 2 этого раздела. Но разберем ее еще раз, используя иные соображения.

Можно полагать, что все физические величины, существенные в этой задаче, известны: высота столба жидкости h, плотность жидкости ρ, радиус трубки r, поверхностное натяжение жидкости σ, ускорение силы тяжести, краевой угол θ.

$$[h]=м;\qquad [\sigma]=кг\cdot c^{-2};\qquad [r]=м;$$

$$[\rho]=кг\cdot м^{-3};\qquad [g]=м\cdot c^{-2};\qquad [\theta]=0.$$

Считая h зависимой переменной, имеем

$$h\cdot\rho^{\alpha}\cdot r^{\beta}\cdot\sigma^{\gamma}\cdot g^{\delta}\cdot\theta^{\varepsilon}=const.$$

Уравнение размерности имеет вид

$$м\cdot м^{-3\alpha}\cdot кг^{\alpha}\cdot м^{\beta}\cdot кг^{\gamma}\cdot c^{-2\gamma}\cdot м^{\delta}\cdot c^{-2\delta}=const=м^0\cdot кг^0\cdot c^0.$$

Так как отсюда получаем систему трех уравнений с четырьмя неизвестными, можно выразить любые три неизвестных через четвертое. Таким образом, получаем

$$h=const\cdot r\cdot\left(\frac{r^2\rho g}{\sigma}\right)^{-\alpha}.$$

В скобках стоит безразмерная комбинация.

Чтобы найти значение α и правильный ответ, можно обойтись и без введения векторных единиц длины. Но придется привлекать дополнительные соображения, связанные с практикой, т.е. эту формулу можно использовать, дополнив ее каким-либо *экспери-*

ментальным фактом, например, тем, что h обратно пропорционально r, в этом случае $\alpha = 1$, и

$$h = const \frac{\sigma}{r \cdot \rho \cdot g}, \text{ где } const = 2\cos\theta.$$

Иногда предварительный анализ размерностей дает указание экспериментатору на тот тип эксперимента, который обеспечивает получение полезной информации. В данном случае очевидно, что полезным является определение зависимости h от r.

Решим теперь эту задачу с использованием векторных единиц длины. В этом примере с особой тщательностью должна быть составлена формула размерности для поверхностного натяжения σ, которая раньше имела вид $кг{\cdot}с^{-2}$. Эта формула недостаточно совершенна. Пусть вертикальное направление соответствует оси Oz в прямоугольной системе координат. Тогда эффективная составляющая поверхностного натяжения выражается как $\sigma_z = \sigma\cos\theta$, и, согласно определению поверхностного натяжения, размерность σ_z есть либо $м_z{\cdot}кг{\cdot}с^{-2}/м_x$, либо $м_z{\cdot}кг{\cdot}с^{-2}/м_y$. Но для сохранения условий симметрии относительно оси Oz выразим размерность так:

$$\sigma_z = \frac{м_z \cdot кг \cdot с^{-2}}{м_x^{1/2} \cdot м_y^{1/2}}.$$

По той же причине размерность радиуса трубки будет иметь вид $м_x^{1/2} \cdot м_y^{1/2}$. Тогда размерности учитываемых физических величин имеют вид:

$$[h] = м_z; \qquad [\rho] = кг \cdot м_x^{-1} \cdot м_y^{-1} \cdot м_z^{-1}; \qquad [r] = м_x^{1/2} \cdot м_y^{1/2};$$

$$[\sigma] = м_x^{-1/2} \cdot м_y^{-1/2} \cdot м_z \cdot кг \cdot с^{-2}; \qquad [g] = м_z \cdot с^{-2}.$$

Уравнение размерностей в этом случае имеет вид

$$м_z \cdot кг^{\alpha} \cdot м_x^{-\alpha} \cdot м_y^{-\alpha} \cdot м_z^{-\alpha} \cdot м_x^{\beta/2} \cdot м_y^{\beta/2} \cdot м_x^{-\gamma/2} \cdot м_y^{-\gamma/2} \cdot м_z^{\gamma} \cdot кг^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} \cdot м_z^{\delta} \cdot с^{-2\delta} =$$

$$= const = м_x^0 \cdot м_y^0 \cdot м_z^0 \cdot кг^0 \cdot с^0.$$

Отсюда мы получим пять уравнений, связывающих четыре показателя α, β, γ и δ, (т.е. $N - K = 0$), два из которых, в силу осевой симметрии, одинаковы, и получаем $N - K = 1$. В результате решения уравнений найдем следующие значения показателей:

$$\alpha = 1; \qquad \beta = 1; \qquad \gamma = 1; \qquad \delta = 1.$$

Отсюда

$$h = const \cdot \rho^{-1} \cdot r^{-1} \cdot \sigma_z \cdot g^{-1}.$$

Так как $const = 2\cos\theta$, окончательно получаем

$$h = 2\frac{\sigma \cdot cos\,\theta}{r \cdot \rho \cdot g},$$

Пример 5.10. Найти скорость капиллярных волн в тонком слое жидкости.

Выпишем размерности следующих определяющих физических величин: скорости волны v, коэффициента поверхностного натяжения σ, плотности жидкости ρ, длины волны λ, ускорения силы тяжести g.

$$[v] = м \cdot c^{-1}; \qquad [\sigma] = кг \cdot c^{-2}; \qquad [\rho] = м^{-3} \cdot кг;$$

$$[\lambda] = м; \qquad [g] = м \cdot c^{-2}.$$

Будем искать необходимую безразмерную комбинацию в виде:

$$v \cdot \sigma^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot \lambda^{\gamma} \cdot g^{\delta} = const.$$

$$N - K = 2.$$

Формула размерностей при этом имеет вид

$$м \cdot c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{-3\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot м^{\delta} \cdot c^{-2\delta} = const = м^{0} \cdot c^{0} \cdot кг^{0}.$$

Отсюда получаем

$$v = const\sqrt{\lambda g}\left(\frac{\sigma}{\rho\lambda^{2}g}\right)^{-\alpha}.$$

В скобках стоит безразмерная комбинация.

В таком виде ответ имеет небольшую ценность; однако, если учесть, что ввиду небольшой высоты волн можно пренебречь весом жидкости по сравнению с силами поверхностного натяжения, то g можно исключить при $\alpha = -1/2$. Таким образом,

$$v = const\sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot \lambda}}.$$

В противоположной ситуации длиной гравитационных волн, можно пренебречь влиянием сил поверхностного натяжения, что достигается при $\alpha = 0$. Тогда получим

$$v = const\sqrt{\lambda g}.$$

Пример 5.11. Почему небо голубого цвета?

Согласно гипотезе Рэлея, голубой цвет неба вызван рассеянием света на пылинках, капельках жидкости и твердых частицах молекулярных размеров, взвешенных в атмосфере. Современная теория утверждает, что рассеивание света вызвано флуктуациями плотности и концентрации молекул атмосферы. Теория этого вопроса достаточно сложна, однако Рэлей показал, что полезный результат можно получить с помощью метода размерностей в сочетании с некоторыми известными законами оптики.

Пусть частица с линейным размером l рассеивает свет с длиной волны λ и амплитудой A. Амплитуда рассеянной волны S уменьшается с увеличением расстояния r от частицы. Требуется определить зависимость S от остальных переменных величин.

Выпишем размерности физических :

$$[S] = м; \qquad [A] = м; \qquad [l] = м; \qquad [\lambda] = м; \qquad [r] = м.$$

На самом деле размерность S и A отличны от *м* (S и A измеряются в единицах интенсивности электромагнитного поля), однако, т.к. их размерности совпадают не будем заострять на этом внимание.

Выражая S как произведение остальных переменных, возведенных в ту или иную степень, получаем

$$S \cdot A^{\alpha} \cdot l^{\beta} \cdot r^{\gamma} \cdot \lambda^{\delta} = const.$$

Отсюда можно получить необычное безразмерное уравнение

$$м \cdot м^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{\gamma} \cdot м^{\delta} = const = м^{0}.$$

Следовательно,

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

На этом этапе решения анализ размерностей следует дополнить физическими законами. Во-первых, амплитуда рассеянного света пропорциональна амплитуде падающего света, поэтому $\alpha = -1$. Во-вторых, амплитуда волны рассеянного света обратно пропорциональна расстоянию от частицы. Отсюда $\gamma = 1$ и, следовательно, $1 + \beta + \delta = 0$. Таким образом,

$$S = const \cdot A \cdot l^{-\beta} \cdot r^{-1} \cdot \lambda^{1+\delta}$$

или

$$S = const \cdot \frac{A \cdot \lambda}{r} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{-\beta}.$$

Рэлей отмечал: "Судя по динамике явления, отношение амплитуд волны падающей и рассеянного света изменяется пропорционально объему рассеивающей частицы". Поэтому $\beta = -3$ и окончательно

$$S = const \cdot \frac{A \cdot l^{3}}{r \cdot \lambda^{2}}.$$

Поскольку интенсивность рассеянного света пропорциональна квадрату его амплитуды, то она обратно пропорциональна четвертой степени длины волны. Если принять, что длина волны красного света приблизительно в два раза превышает длину синего света, то интенсивность рассеянного синего света в 16 раз больше, чем красного.

Можно заметить, что в этом примере в большей мере использованы "физическая интуиция" и знание законов физики, чем анализ размерностей. С этим приходится согласиться, но верно также и то, что использование обоих источников привело простым и изящным образом к интересному результату.

Пример 5.12. Найти скорость распространения волны в глубоководном резервуаре.

Рассматривая вопрос о выборе физических величин, влияющих на скорость волн, мы сразу же видим, что этот случай отличается от предыдущей задачи о капиллярных волнах (Пример 5.7), так как сила тяжести здесь существенна. Поэтому влияние поверхностного натяжения и вязкости можно не учитывать. Плотность жидкости может быть уверенно включена в число переменных величин, а длина волны – лишь в предварительном порядке. Глубина воды предполагается достаточно большой для того, чтобы не оказывать влияния на скорость волны. Наш практический опыт показывает, что при небольших амплитудах этот фактор не влияет на результат. Таким образом, имеются четыре переменные величины:

$$[v] = м \cdot c^{-1}; \qquad [\rho] = м^{-3} \cdot кг; \qquad [\lambda] = м; \qquad [g] = м \cdot c^{2}.$$

Уравнение, связывающее эти переменные, имеет вид:

$$v \cdot \rho^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \lambda^{\gamma} = const,$$

откуда имеем уравнение размерностей

$$м \cdot c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{-3\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot c^{-2\beta} \cdot м^{\gamma} = const = кг^{0} \cdot м^{0} \cdot c^{0}.$$

Сразу же ясно, что $\alpha = 0$, и поэтому скорость распространения волны не зависит от плотности жидкости. Конечный результат, полученный обычным образом, имеет вид

$$v = const\sqrt{\lambda\, g}.$$

Предположим теперь, что глубина воды небольшая и ее влияние уже следует учитывать. Как глубина h влияет на скорость?

Представив выражение для скорости в виде

$$v \cdot h^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \lambda^{\gamma} = const,$$

получаем соответствующее уравнение размерностей:

$$м \cdot c^{-1} \cdot м^{\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot c^{-2\beta} \cdot м^{\gamma} = const = м^{0} \cdot c^{0}, \text{ и } N - K = 2.$$

Отсюда

$$v = const\sqrt{\lambda\, g}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Если нам известен тот факт, что скорость волны на мелководье не зависит от длины волны, то $\alpha = -1/2$, откуда

$$v = const\sqrt{g\, h}.$$

Таким образом, скорость волн на мелководье пропорциональна корню квадратному из глубины воды.

5.2. Ситуация N – K = 2. Двойственный характер понятия массы

В предыдущем разделе было выяснено, что использование метода векторных единиц длины позволяет расширить возможности метода размерностей. В настоящем разделе будет показано, что такое же расширение возможностей может быть реализовано при использовании понятий инерционной массы и гравитационной массы [2].

В начале этого пособия использовалось лишь одно обозначение для размерности массы: *[m],* и оно использовалось без каких-либо оговорок.

В физике масса обычно рассматривается с двух совершенно различных точек зрения: 1) как *мера количества вещества* в законе всемирного тяготения и 2) как *мера инерции* во втором законе Ньютона. Хотя между этими двумя величинами существует пропорциональность, выполняющаяся с точностью до 10^{-11}, они не идентичны. В действительности они совершенно разнородны по своей физической природе, и поэтому их размерности должны обозначаться различным образом. До сих пор мы рассматривали примеры с инерционной массой, однако в задачах, где фигурируют теплота и температура, следует рассматривать массу как количество вещества. Например, составляя формулу размерности теплоемкости, мы имеем дело с массой как количеством вещества, а не мерой инерционности.

Чтобы различать эти виды массы в формулах размерности, придадим им следующие обозначения: $[кг_\mu]$ – количество вещества или масса гравитационная; $[кг_i]$ – масса инерционная.

Пример 5.13. Определить массовый расход вязкой жидкости, протекающей через трубку круглого поперечного сечения. Эту задачу можно решить обычным методом. Выпишем размерности следующих физических величин, характеризующих процесс: массового расхода m (масса жидкости, протекающей через произвольное поперечное сечение трубки за единицу времени), перепада давлений на единицу длины трубы p, плотности жидкости ρ, коэффициента динамической вязкости η, радиуса трубы r:

$$[m] = кг \cdot с^{-1}; \qquad [p] = м^{-2} \cdot кг \cdot с^{-2};$$

$$[\rho] = кг \cdot м^{-3}; \qquad [\eta] = м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-1}; \qquad [r] = м.$$

Представим искомую безразмерную зависимость в виде

$$m \cdot p^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot \eta^{\gamma} \cdot r^{\delta} = const,$$

и составим уравнение баланса размерностей:

$$кг \cdot с^{-1} \cdot м^{-2\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot м^{-3\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot м^{-\gamma} \cdot кг^{\gamma} \cdot с^{-\gamma} \cdot м^{\delta} = const = кг^{0} \cdot с^{0} \cdot м^{0};$$

отсюда легко получить следующее значение показателей степеней:

$$\alpha = -1/2 + \gamma/2; \qquad \beta = -1/2 + \gamma/2; \qquad \delta = -5/2 + 3\gamma/2.$$

Следовательно,

$$m = const\sqrt{p\rho r^{5}}\left(\frac{\eta^{2}}{p\rho r^{3}}\right)^{-\gamma/2}.$$

Выражение, стоящее в скобках, безразмерно.

Здесь γ имеет неопределенное значение. Поэтому решение является сравнительно малоценным, и, на первый взгляд, необходимо обратиться к эксперименту. Однако это не так. Принимая во внимание дифференциацию массы, т.е. различая массу как количество вещества и массу как меру инерции, мы найдем, что эксперимент излишен и что между физическими величинами имеется определенная связь, отражаемая их формулами размерности, а также что решение может быть получено априорно.

Рассмотрим массы, входящие в размерности. В размерности массового расхода m и плотности жидкости входит масса, размерность которой мы обозначили выше как $кг_{\mu}$. Она являются мерой веса или количества вещества и определяется взаимодействием вещества с полем силы тяжести. Такую массу принято называть *гравитационной*. В размерности давления p и динамической вязкости η входит масса, размерность которой мы обозначили выше как $кг_{i}$. Величины p и η характеризуют силовое воздействие на жидкость, а как мы помним из курса динамики, масса и сила связаны вторым законом Ньютона

$$F = m\,a.$$

В этом случае масса является мерой инертности тела, и, соответственно, такую массу принято называть *инерционной.*

В соответствии с вышесказанным, размерности определяющих величин можно теперь записать в виде:

$$[m] = кг_{\mu} \cdot c^{-1}; \qquad [p] = м^{-2} \cdot кг_{i} \cdot c^{-2};$$

$$[\rho] = кг_{\mu} \cdot м^{-3}; \qquad [\eta] = м^{-1} \cdot кг_{i} \cdot c^{-1}; \qquad [r] = м.$$

Из выражения

$$m \cdot p^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot \eta^{\gamma} \cdot r^{\delta} = const,$$

получим

$$кг_{\mu} \cdot c^{-1} \cdot м^{-2\alpha} \cdot кг_{i}^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{-3\beta} \cdot кг_{\mu}^{\beta} \cdot м^{-\gamma} \cdot кг_{i}^{\gamma} \cdot c^{-\gamma} \cdot м^{\delta} = const = кг_{\mu}^{0} \cdot кг_{i}^{0} \cdot c^{0} \cdot м^{0}.$$

Мы полагаем теперь, что это уравнение однородно по размерностям $кг_{\mu}$ и $кг_{i}$, т.е. мы рассматриваем эти две физические величины как существенно различные и поэтому получаем два дополнительных уравнения:

из баланса по $кг_{\mu}$ $\beta = -1;$ из баланса по $кг_{i}$ $\alpha + \gamma = 0.$

Подставляя эти значения в наши прежние уравнения, получаем

$$\alpha = -1;\ \gamma = 1;\ \delta = -4.$$

В итоге

$$m = const\ p \frac{\rho r^{4}}{\eta}.$$

5.3. Ситуация N – K = 0.

В ситуации $N - K = 0$ для отыскания $N - 1$ мы будем иметь N уравнений. Весьма часто такая ситуация не имеет решения.

То, что реализуется ситуация $N - K = 0,$ как правило, означает, что выбранная система основных единиц не удобна, и можно ввести другую, в которой размерности других величин будут приняты за основные, для которых будет выполняться условие $N - K = 1$.

Так, некоторые задачи можно решить, уменьшив K, вводя новую основную единицу, являющуюся комбинацией двух прежних.

Пример 6.1. Определить избыточное давление газа в мыльном пузыре.

Здесь предполагается известным, что при данной температуре избыточное давление в мыльном пузыре зависит от его радиуса R и от величины коэффициента поверхностного натяжения мыльного раствора σ, имеющих размерности:

$$[R] = м; \qquad [\sigma] = кг \cdot с^{-2}; \qquad [p] = м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}.$$

В сформулированной задаче размерности трех физических величин R, σ, p выражаются через три основные единицы: *м, с, кг.* Искомая безразмерная комбинация составляется в виде:

$$p \cdot R^{\alpha} \cdot \sigma^{\beta} = const,$$

а уравнение баланса размерностей

$$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot м^{\alpha} \cdot кг^{\beta} \cdot с^{-2\beta} = const = м^{0} \cdot кг^{0} \cdot с^{0}. \qquad (1)$$

В этом случае $N - K = 0$, и для отыскания двух неизвестных коэффициентов α и β мы получаем систему трех неоднородных уравнений, одно из которых в общем случае не будет линейной комбинацией двух остальных.

Однако весьма часто удается свести решение подобных задач к задаче, имеющей единственное решение – исключение одной из основных единиц. Точнее говоря, удобно ввести основную единицу, составленную из неких произведений степеней основных единиц, заданных по условию задачи. И при такой замене количество основных единиц может уменьшиться. Так, в рассматриваемом примере удобно ввести новую единицу, равную $кг \cdot с^{-2}$. Обозначим ее буквой y: $y = кг \cdot с^{-2}$. При этом две основные единицы *кг* и *с* заменяются на одну – y. Теперь $N - K = 1$ и искомая безразмерная комбинация единственна. Тогда уравнение (1) перепишется в виде:

$$м^{-1} \cdot y \cdot м^{\alpha} \cdot y^{\beta} = const;$$

$$\begin{cases} -1 + \alpha = 0 \\ 1 + \beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \ p \cdot R \cdot \sigma^{-1} = const;$$

и решение задачи легко находится

$$p = const \frac{\sigma}{R}.$$

Пример 6.2. Найти скорость распространения волн сжатия (звуковых волн) в жидкости или газе.

На скорость звуковой волны оказывают влияние такие физические величины, как плотность жидкости ρ, объемный модуль упругости μ или, если идет речь о газе, давление p, имеющие размерности:

$$[v] = м \cdot c^{-1}; \qquad [\rho] = м^{-3} \cdot кг; \qquad [\mu] = [p] = м^{-1} \cdot кг \cdot c^{-2}.$$

т.е. размерности трех характерных физических величин выражены через три основные единицы: $N - K = 0$.

Уравнению $v \cdot \rho^{\alpha} \cdot \mu^{\beta} = const$ соответствует уравнение размерности

$$м \cdot c^{-1} \cdot кг^{\alpha} \cdot м^{-3\alpha} \cdot м^{-\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot c^{-2\beta} = const = м^{0} \cdot c^{0} \cdot кг^{0}. \qquad (2)$$

Введем две новые основные единицы вместо трех исходных:

$$y = м \cdot c^{-1} \text{ и } z = кг \cdot м^{-3}.$$

Теперь $N - K = 1$ и искомая безразмерная комбинация единственна, а уравнение (2) перепишется в виде:

$$y \cdot z^{\alpha} \cdot z^{\beta} \cdot y^{2\beta} = const = y^{0} \cdot z^{0}$$

Для нахождения неизвестных величин и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{array} \right. .$$

Следовательно,

$$v = const\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

По этой формуле Ньютон вычислил скорость звука в воздухе: 281 м/сек. Однако эта величина несколько занижена. Лаплас предположил, что причиной этого является неправильное значение, приписанное величине μ. Сжатие и разрежение чередуются в звуковых волнах весьма быстро, ввиду чего изменения давления и объема носят адиабатический характер. Уточнение, внесенное Лапласом, позволило получить для скорости звука в воздухе значение 332 м/сек.

Пример 6.3. Найти критерий Рэлея неустойчивости поверхностно заряженной жидкой капли.

Из экспериментов известно, что при достаточно большой величине Q, капля становится неустойчивой, деформируется в фигуру близкую к эллипсоиду вращения, а затем либо распадается на несколько капель сравнимых размеров, либо на вершинах эллипсоида образуются эмиссионные выступы, с вершин которых происходит сброс избыточного поверхностного заряда в виде высокодисперсных сильно заряженных капелек.

На заряженную каплю действуют две противоположно направленные силы: сила поверхностного натяжения и сила давления электрического поля на поверхность капли. Если давление электрического поля превышает Лапласовское давление (давление, обусловленное поверхностным натяжением), капля становится неустойчивой. Лапласовское давление зависит от коэффициента поверхностного натяжения σ и радиуса капли R. Давление электрического поля зависит от заряда капли Q и ее радиуса.

Таким образом, устойчивость капли характеризуется тремя величинами Q, σ и R. Установим взаимосвязь

$$Q = \varphi(\sigma, R) \text{ или } Q \cdot \sigma^{\alpha} \cdot R^{\beta} = const.$$

Размерности σ и R нам известны:

$$[R] = см; \qquad [\sigma] = г \cdot см^{-1}.$$

Размерность Q найдем, используя закон Кулона, который в системе Гаусса можно записать следующим образом

$$F = \frac{Q^2}{R^2} \Rightarrow [Q] = r \cdot \sqrt{F} = r\sqrt{m \cdot a} = см \cdot \sqrt{г \cdot см \cdot c^{-2}} = г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot c^{-1}.$$

Таким образом, $N - K = 0$.

Для решения задачи перейдем к другой системе единиц, в которой за основные единицы приняты $см$ и $y \equiv г \cdot c^{-2}$. Тогда $N - K = 1$:

$$[Q] = y^{1/2} \cdot см^{3/2}; \qquad [R] = см; \qquad [\sigma] = y;$$

$$y^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot y^{\alpha} \cdot см^{\beta} = const = y^0 \cdot см^0;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/2 + \alpha = 0 \\ 3/2 + \beta = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = -1/2 \\ \beta = -3/2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$Q \cdot \sigma^{-1/2} \cdot R^{-3/2} = const \text{ или } \frac{Q^2}{\sigma \cdot R^3} = const.$$

Критерий устойчивости $\frac{Q^2}{\sigma \cdot R^3}$ называется параметром Рэлея. Из точной теории известно, что капля становится неустойчивой, когда параметр Рэлея превышает 16π.

6. Оценки значений физических величин методом размерности

С помощью метода размерностей можно не только получать аналитические выражения, связывающие физические величины, входящие в определение задачи, но и получать численные оценки исследуемых величин, отталкиваясь от того обстоятельства, что коэффициенты пропорциональности в получаемых аналитических зависимостях имеют величину порядка единицы.

Пример 6.1. Какое максимальное статистическое давление можно получить в лаборатории?

Ясно, что искомое давление определяется прочностью материалов, используемых в установке. Для большинства твердых тел предел прочности примерно того же порядка, что и упругие модули, например, модуль Юнга G. Для металлов $G \approx 10^{12}$ *эрг/см*^{3} (в системе СГС). Если размерность модуля Юнга *эрг/см*^{3} записать как *дин·см/см*^{3} ≡ *дин/см*^{2}, то видно, что размерность упругого модуля совпадает с размерностью давления. А это означает, что получить в лаборатории давление больше G нельзя, так как $[G] = [p]$.

Закон Гука можно записать в следующем виде:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{G}\frac{F}{S} \;;$$

F – сила; S – площадь поперечного сечения образца, G – модуль Юнга; l – длина образца, Δl – абсолютная величина деформации. Поскольку $\Delta l << l$, то $F << G$.

А теперь вспомним сказанное выше о размерностях G и p:

$$[\,G\,] \equiv \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин}\cdot\text{см}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин}}{\text{см}^3} \equiv [\,p\,].$$

Это означает, что для оценки максимального давления можно воспользоваться G

$$G \approx 10^{12}\ \text{дин}/\text{см}^2 = 1\,\text{Мбар} = 10^6\,\text{атм} \approx p_{max}.$$

Следует, однако, помнить, что объемная плотность энергии и давление по своему физическому смыслу совершенно разные величины: G характеризует плотность энергии взаимодействия атомов, запасенную в кристаллической решетке. В реальности закон Гука выполняется лишь при $\Delta l << l$ или, что то же самое, $(F/S) << G$ (Приложение 1). Причем известно, что материал начинает "течь", при $(F/S) \sim 0.01\,G$, т.е. реально достижимые давления будут на два порядка ниже, чем *1 Мбар*.

Таким образом, $p \sim 10^4$ *атм*.

Пример 6.2. Оценить максимальную высоту гор на Земле.

Из вышеприведенных оценок ясно, что предел высоты гор определяется прочностью горных пород в основание горы.

Давление в основании горы:

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность вещества горы, h – ее высота.

Из предыдущего примера ясно, что должно выполняться соотношение:

$$p \le 0.01\ G \text{ или } \rho g h \le 0.01 G.$$

Полагая $\rho = 5\ г/см^3$, $g = 10^3\ см/с^2$, получим:

$$h \le \frac{0.01 G}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^6\ см \approx 20\ км\ .$$

Реальная высота гор на Земле ~ 8-9 *км* и в их основании горные породы еще не «текут», не деформируются под тяжестью горы. В чем причина несоответствия исходных посылок и полученного результата? Здесь следует учесть, что толщина Земной коры под горами ~ *10 км*, а ниже кромки Земной коры вещество уже точно «течет».

Пример 6.3. Оценить давление в центре Земли.

Давление по своему смыслу есть сила, действующая на единицу площади. Для Земли величина с размерностью силы есть $M_З g$, а с размерностью площади – $R_З^2$, где $M_З$ – масса Земли, $R_З$ – ее радиус, g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Поэтому

$$P_З \sim \frac{M_З g}{R_З^2} = \frac{M_З}{R_З^2} \cdot \gamma \cdot \frac{M_З}{R_З^2} = \gamma \cdot \frac{M_З^2}{R_З^4}\ .$$

Так как $M_З = 6 \cdot 10^{27}$ г; $R_З = 6.4 \cdot 10^8$ см; $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-8}$ см^{3}г$^{-1}$с$^{-2}$, то

$$P_З \approx 14 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2 = 14 \text{ Мбар}.$$

Точные геофизические расчеты приводят к $P_З \approx 4$ *Мбар*, т.е. мы получили результат, справедливый "по порядку величины".

Пример 6.4. Два шарика радиусом R, изготовленные из материала с плотностью ρ и модулем упругости E, двигаются навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры, с одинаковыми по величине скоростями V. Между шариками происходит абсолютно упругий удар. Найти максимальную величину деформации x во время удара.

Очевидно, что величина x может зависеть от всех параметров, характеризующих шарики в процессе удара, то есть от V, ρ, R и G:

$$x = \varphi(v, \rho, R, G).$$

Будем искать эту зависимость в виде

$$x \cdot V^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} \cdot R^{\gamma} \cdot G^{\delta} = const\,.$$

Выпишем размерности всех величин:

$$[x] = м; \qquad [V] = м \cdot c^{-1}; \qquad [\rho] = м^{-3} \cdot кг;$$

$$[R]=м; \qquad [G]=м^{-1}\cdot кг\cdot c^{-2}.$$

Откуда получим

$$м\cdot м^{\alpha}\cdot c^{-\alpha}\cdot кг^{\beta}\cdot м^{-3\beta}\cdot м^{\gamma}\cdot м^{-\delta}\cdot кг^{\delta}\cdot c^{-2\delta}=const=м^{0}\cdot кг^{0}\cdot c^{0},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha-3\beta+\gamma-\delta=0 \\ \beta+\delta=0 \\ -\alpha-2\delta=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \beta=\alpha/2 \\ \gamma=-1 \\ \delta=-\alpha/2 \end{array} \right. .$$

Учитывая решения, получим

$$x=const\left(\frac{\rho^{1/2}V}{G^{1/2}}\right)^{\alpha}R \text{ или } \frac{x}{R}=const\left(\frac{\rho V^{2}}{G}\right)^{\alpha/2}.$$

Полученное выражение определяет вид уравнения для относительной деформации x/R шариков. При этом α остается неопределенной. Это связано с тем, что $N-K=2$.

Из решения можно заметить, что рассмотрение размерностей величин позволило заменить соотношение между пятью размерными величинами $(x,\ V,\ \rho,\ R,\ G)$ соотношением между двумя безразмерными величинами:

$$\left[\frac{x}{R}\right]=1, \qquad \left[\frac{\rho V^{2}}{G}\right]=1.$$

Если бы мы искали зависимость $x=x(V,\rho,R,G)$ с помощью эксперимента, то использование метода размерностей позволило бы исследовать вместо влияния на x четырех размерных величин влияние только одной безразмерной величины $\frac{\rho V^{2}}{G}$ на $\frac{x}{R}$. Это дает большие удобства экспериментатору, так как позволяет намного уменьшить число необходимых опытов.

Следует обратить внимание на то, что *const* невозможно определить методом размерностей, поскольку он никак не связан с показателями степени в формулах размерностей величин. Показатель α связан формулами размерностей, поэтому в некоторых случаях его можно определить.

Предположим, что возникающая при ударе деформация зависит только от модуля упругости G и от кинетической энергии шара $K=mV^{2}/2$, m – масса шара. Здесь мы учитываем размер шара только в выражении для кинетической энергии:

$$K=\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^{3}\rho V^{2}.$$

(Это грубое допущение, потому что величина деформации зависит не только от кинетической энергии, но и от радиуса шара *R.)* Такое допущение позволяет приближенно записать:

$$x \cdot K^{\alpha} \cdot G^{\beta} = const\,.$$

Размерность кинетической энергии

$$[\,K\,] = м^{2} \cdot кг \cdot c^{-2}\,.$$

Если теперь составить систему уравнений и определить значения α и β (аналогично тому, как это было сделано выше), то получим

$$м \cdot м^{2\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{-\beta} \cdot кг^{\beta} \cdot c^{-2\beta} = const = м^{0} \cdot кг^{0} \cdot c^{0}\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Bigg| \quad \begin{matrix} \alpha = -1/3 \\ \beta = 1/3 \end{matrix}\,.$$

$$x = const\left(\frac{K}{G}\right)^{1/3} \text{ или } \frac{x}{R} = const\left(\frac{\rho V^{2}}{G}\right)^{1/3}.$$

Показатель степени 1/3 в последней формуле близок к показателю степени 2/5 полученному при строгом математическом решении задачи.

Пример 6.5. Найти деформацию, возникающую в шарах радиуса *R* при действии на них двух сжимающих сил *F*, направленных по линии, соединяющей центры шаров. Материал шаров одинаков, и его модуль упругости *G*.

Для решения задачи нам нужно найти зависимость величины деформации *x* от величин *F, R* и *G*. Будем искать эту зависимость в виде

$$x \cdot F^{\alpha} \cdot R^{\beta} \cdot G^{\gamma} = const\,,$$

или для размерностей

$$[\,x\,] = м; \qquad [\,F\,] = м \cdot кг \cdot c^{-2}; \qquad [\,R\,] = м; \qquad [\,G\,] = м^{-1} \cdot кг \cdot c^{-2}.$$

Отсюда получим

$$м \cdot м^{\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot c^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{-\gamma} \cdot кг^{\gamma} \cdot c^{-2\gamma} = const = м^{0} \cdot кг^{0} \cdot c^{0}\,.$$

Следовательно,

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases} \Bigg| \quad \begin{matrix} \beta = -1 - 2\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{matrix}$$

В итоге получаем:

$$x = const \cdot R\left(\frac{F}{G \cdot R^2}\right)^{-\alpha} \text{ или } \frac{x}{R} = const\left(\frac{F}{G \cdot R^2}\right)^{-\alpha}.$$

В общем случае внешнее воздействие на шары изменяет состояние материала шаров. Это изменение состояния материала характеризуют понятием «напряжение». Напряжением материала в сечении S под действием внешних сил F называется величина $\sigma = F/S$, где S – площадь сечения. Напряжение, возникающее под действием сил, направленных перпендикулярно к рассматриваемому сечению, называется нормальным напряжением или давлением. Напряжение характеризует удельную нагрузку на материал (нагрузку на единицу площади сечения тела). При увеличении удельных нагрузок материал сначала становится неупругим, а потом разрушается. Поэтому определение напряжения представляет практический интерес.

Пример 6.6. Найти напряжение σ в месте соприкосновения двух шаров радиуса R, возникающее под действием сжимающих сил F, если шары изготовлены из материала с модулем упругости G.

Очевидно, что σ зависит от F, G и R: $\sigma = \varphi(F,G,R)$.

Учитывая, что размерности имеют вид

$$[\sigma] = м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}; \qquad [F] = м \cdot кг \cdot с^{-2}; \qquad [R] = м; \qquad [G] = м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2},$$

получим

$$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot м^{\alpha} \cdot кг^{\alpha} \cdot с^{-2\alpha} \cdot м^{\beta} \cdot м^{-\gamma} \cdot кг^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} = const = м^0 \cdot кг^0 \cdot с^0.$$

Следовательно,

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 1 + \alpha + \gamma = 0 \\ -2 - 2\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases} \left| \quad \begin{matrix} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -1 - \alpha \end{matrix} \right. .$$

В итоге получаем:

$$\sigma = const \cdot G\left(\frac{F}{G \cdot R^2}\right)^{-\alpha} \text{ или } \frac{\sigma}{G} = const\left(\frac{F}{G \cdot R^2}\right)^{-\alpha}.$$

Заметим еще раз, что метод размерностей широко используют в тех задачах, где из-за большого числа переменных и сложности уравнений, описывающих явление, аналитическое решение невозможно. В этом случае для отыскания нужных зависимостей проводят эксперимент. Результаты эксперимента обрабатывают с помощью безразмерных комбинаций параметров задачи, которые позволяет выделить метод размерностей. Так, в задачах, рассмотренных здесь, метод размерностей позволяет утверждать, что относительные деформации и напряжения определяются не отдельными численными значениями параметров v, ρ, G, R или F, G, R, а численным значением безразмерных комбинаций параметров $\frac{\rho \cdot v^2}{G}$ и $\frac{F}{G \cdot R^2}$.

7. Обезразмеривание

Полезно отметить, что основные идеи метода размерностей чаще всего используются для обезразмеривания математических выражений, описывающих физические закономерности, перед переходом к численному анализу на компьютере. В размерном математическом выражении, записанном в некой системе физических единиц, выбираются несколько величин, условно принимаемых за основные, из размерностей которых строятся размерности всех остальных физических величин с единичными численными значениями. Численные же значения обезразмеренных величин измеряются теперь в полученных таким образом единицах обезразмеривания. Проиллюстрируем сказанное примером.

Предположим, что необходимо решить задачу об осесимметричных капиллярных колебаниях заряженной сферической капли вязкой идеально проводящей жидкости. Решение проведем в безразмерных переменных, положив радиус капли R, плотность ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ равным единице: $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. При этом в качестве единиц измерения расстояния, времени, заряда, давления, скорости и вязкости получим характерные величины:

$$r_* = R; \qquad t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}; \qquad Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2};$$

$$p_* = R^{-1}\sigma; \qquad u_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}; \qquad \nu_* = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}.$$

Отношение реальных расстояния, времени, заряда, давления, скорости и вязкости к приведенным "эталонам" даст уже безразмерные величины, с которыми можно работать без оглядки на размерность.

Выбор величин, принятых за основные (R, ρ и σ), произволен и основан на соображениях удобства и целей, сформулированных в постановке задачи. Так, например, вместо коэффициента поверхностного натяжения можно было бы взять коэффициент кинематической вязкости ν. Но в этом случае исследовать в численном анализе зависимости других физических величин от вязкости стало бы затруднительным.

Вообще говоря, выбор безразмерных величин – дело важное и тонкое. Как правило, не следует проводить обезразмеривание на одну из искомых величин или на величины, влияние которых на исследуемый процесс предполагается выяснить. Если исследуемая система уравнений допускает бифуркацию, то желательно так провести обезразмеривание, чтобы характеризующие процесс физические константы собрались в одном безразмерном параметре. Если это удается, то такой параметр играет роль бифуркационного, и вся задача сводится лишь к отысканию его критического значения.

В большинстве задач гидромеханики, динамики твердого тела и других разделов физики крайне редко оказывается возможным получить точные решения – причиной этого служат обычно различного рода нелинейности, неоднородности или сложные граничные условия. Поэтому инженеры, физики и специалисты по прикладной математике вынуждены обращаться к приближенным решениям, которые могут строиться либо численными методами, либо аналитическими, либо путем комбинации численных и аналитических подходов.

Ключом к решению той или иной задачи является, как известно, построение ее математической модели. В процессе создания такой модели мы стараемся принять во внимание одни особенности задачи, полностью пренебрегаем другими и лишь в определенной степени учитываем третьи. Для осуществления этих важных шагов нам прежде всего нужно определить порядок величин различных элементов системы (т. е. насколько они велики или малы), сравнивая их друг с другом и с заранее выбранными характерными элементами. Этот процесс называется приведением переменных к безразмерному виду. Прежде чем пытаться проделать какие-либо оценки, всегда нужно ввести безразмерные переменные. Например, если некоторый элемент системы имеет длину один сантиметр, то можно задаться вопросом: является ли этот элемент большим или малым? Ответить на такой вопрос можно, лишь обратившись к исходной постановке задачи. Ясно, что если мы, к примеру, исследуем движение спутника на околоземной орбите, то один сантиметр будет пренебрежимо малым расстоянием. С другой стороны, если в какой-либо предложенной нам задаче нужно учитывать расстояния между молекулами, то при этом один сантиметр оказывается уже большой величиной. Точно так же масса в один грамм представляет собой ничтожно малую величину по сравнению с массой спутника, но в то же время оказывается огромной по отношению к массе электрона. Итак, представление уравнений в безразмерной форме выявляет наличие важных безразмерных параметров, которые определяют поведение исследуемой системы.

Пример 7.1. Рассмотрим движение частицы массы *m,* закрепленной на линейной пружине с коэффициентом жесткости *k* и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен μ. Используя второй закон Ньютона, имеем

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+\mu\frac{du}{dt}+ku=0, \qquad (1)$$

где *u* – смещение частицы и *t* – время. Предположим далее, что частица начинает движение без начальной скорости из состояния покоя, описываемого координатой u_0; начальные условия при этом запишутся как

$$u\big|_{t=0}=u_0, \qquad \frac{du}{dt}\bigg|_{t=0}=0. \qquad (2)$$

Итак, в данном случае зависимой переменной является смещение *u,* а независимой – время *t.* Их необходимо привести к безразмерному виду, используя характерный размер и характерный масштаб времени системы. Смещение *u* можно сделать безразмерным, принимая в качестве характерной длины начальное смещение u_0, в качестве же характерного масштаба времени выберем величину обратную собственной частоте системы $\omega_0=\sqrt{k/m}$. Таким образом, положив

$$u^*=u/u_0, \qquad t^*=\omega_0 t,$$

где звездочкой обозначены безразмерные величины, получим

$$\frac{du}{dt}=\frac{d\left(u_0u^*\right)}{dt^*}\frac{dt^*}{dt}=\omega_0u_0\frac{du^*}{dt^*}, \quad \frac{d^2u}{dt^2}=\omega_0^2u_0\frac{d^2u^*}{dt^{*2}};$$

при этом (1.1) представится в виде

$$m\,\omega_0^2\,u_0\frac{d^2u^*}{dt^{*2}}+\mu\,\omega_0\,u_0\frac{du^*}{dt^*}+k\,u_0u^*=0;$$

или

$$\frac{d^2u^*}{dt^{*2}}+\mu^*\frac{du^*}{dt^*}+u^*=0, \tag{3}$$

где

$$\mu^*=\frac{\mu}{m\omega_0}. \tag{4}$$

Начальные условия (2) в безразмерных переменных записываются как

$$u^*(0)=1, \qquad \frac{du^*}{dt^*}=0. \tag{5}$$

Таким образом, решение данной задачи зависит от единственного параметра μ*, представляющего собой отношение силы сопротивления к силе инерции, или возвращающей силе пружины. Если это отношение мало, то при построении приближенного решения задачи безразмерную величину μ* можно рассматривать в качестве малого параметра. В этом случае мы говорим о системе со слабым затуханием. Следует отметить, что малость величины μ вовсе не означает, что данная система будет представлять собой систему с малым затуханием, для этого необходимо, чтобы было мало $\mu^*=\mu/m\omega_0=\mu/\sqrt{km}$.

Пример 7.2. Предположим теперь, что упругая сила пружины описывается нелинейной функцией вида

$$f_{упр}=ku+k_2u^2, \tag{6}$$

где k и k_2 суть постоянные. Тогда (1) переходит в уравнение

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+\mu\frac{du}{dt}+ku+k_2u^2=0. \tag{7}$$

Используя те же самые безразмерные переменные, что и в предыдущем примере, получаем

$$m\,\omega_0^2\,u_0\frac{d^2u^*}{dt^{*2}}+\mu\,\omega_0\,u_0\frac{du^*}{dt^*}+ku_0u^*+k_2u_0^2u^{*2}=0,$$

или

$$\frac{d^2u^*}{dt^{*2}}+\mu^*\frac{du^*}{dt^*}+u^*+\varepsilon u^*=0, \tag{8}$$

где

$$\mu^*=\frac{\mu}{m\omega_0} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon=\frac{k_2u_0}{k}. \tag{9}$$

При этом начальные условия вновь преобразуются к виду (5). Таким образом, данная задача будет зависеть уже от двух безразмерных параметров μ* и ε. Как и выше, μ* представляет собой отношение силы сопротивления к силе инерции, или линейной возвращающей силе. Параметр же ε представляет собой отношение нелинейной и линейной составляющих упругой силы пружины.

В тех случаях, когда мы говорим о слабо нелинейной системе, подразумевается, что величина k_2u_0/k мала. Вместе с тем, даже при малости постоянной k_2 по сравнению с k нелинейность может оказаться весьма значительной, если u_0 будет велико по сравнению с отношением k/k_2. Таким образом, степень нелинейности системы в целом характеризуется именно параметром е.

Пример 7.3. В качестве третьего примера рассмотрим задачу о движении космического корабля с массой m в гравитационном поле двух фиксированных притягивающих центров, массы которых m_1 и m_2 много больше массы m. В декартовой прямоугольной системе координат, показанной на рис. 9, уравнения движения имеют вид

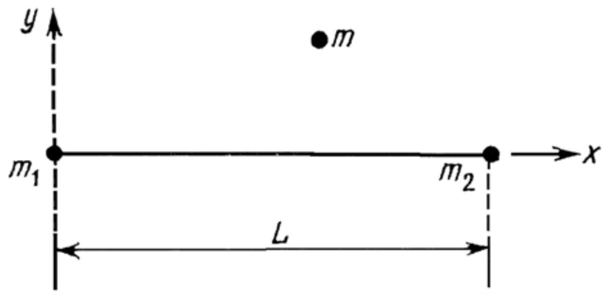

Рис. 9. Космический корабль в гравитационном поле двух фиксированных масс

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mm_1Gx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}-\frac{mm_2G(x-L)}{\left[(x-L)^2+y^2\right]^{3/2}}, \tag{10}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{mm_1Gy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}-\frac{mm_2Gy}{\left[(x-L)^2+y^2\right]^{3/2}}, \tag{11}$$

где t – время, G – гравитационная постоянная и L – расстояние между массами m_1 и m_2.

В данном случае зависимыми переменными являются координаты x и y, а независимой переменной – время t. Ясно, что в качестве характерной длины для этой задачи следует выбрать расстояние L между притягивающими центрами. Выбор же характерного масштаба времени далеко не так очевиден. Поскольку мы предполагаем, что перемещения масс m_1 и m_2 не зависят от характера движения космического корабля, то m_1 и m_2 будут двигаться по эллипсам вокруг общего центра масс. При этом период их обращения будет равен

$$T=\frac{2\pi L^{3/2}}{\sqrt{G(m_1+m_2)}},$$

так что частота обращения оказывается равной

$$\omega_0=L^{-3/2}\sqrt{G(m_1+m_2)},\tag{12}$$

Величину, обратную ω_0, мы и используем в качестве характерного масштаба времени задачи. Далее, вводя безразмерные переменные

$$x^*=\frac{x}{L},\qquad y^*=\frac{y}{L},\qquad t^*=\omega_0 t,\tag{13}$$

получаем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(x^*L)}{dt^*}\,\frac{dt^*}{dt}=L\,\omega_0\frac{dx^*}{dt^*},\ \ \frac{d^2x}{dt^2}=L\,\omega_0^2\frac{d^2x^*}{dt^{*2}},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d(y^*L)}{dt^*}\,\frac{dt^*}{dt}=L\,\omega_0\frac{dy^*}{dt^*},\ \ \frac{d^2y}{dt^2}=L\,\omega_0^2\frac{d^2y^*}{dt^{*2}}.$$

При этом (10) и (11) переписываются в виде

$$mL\,\omega_0^2\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=-\frac{mm_1GLx^*}{\left[L^2\left(x^{*2}+y^{*2}\right)\right]^{3/2}}-\frac{mm_2G(x^*-1)}{\left[L^2\left(x^*-1\right)^2+L^2y^{*2}\right]^{3/2}},$$

$$mL\,\omega_0^2\frac{d^2y^*}{dt^{*2}}=-\frac{mm_1GLy^*}{\left[L^2\left(x^{*2}+y^{*2}\right)\right]^{3/2}}-\frac{mm_2Gy^*}{\left[L^2\left(x^*-1\right)^2+L^2y^{*2}\right]^{3/2}},$$

или

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=-\frac{m_1G}{L^3\omega_0^2}\frac{x^*}{\left(x^{*2}+y^{*2}\right)^{3/2}}-\frac{m_2G}{L^3\omega_0^2}\frac{(x^*-1)}{\left[\left(x^*-1\right)^2+y^{*2}\right]^{3/2}},\tag{14}$$

$$\frac{d^2y^*}{dt^{*2}}=-\frac{m_1G}{L^3\omega_0^2}\frac{y^*}{\left(x^{*2}+y^{*2}\right)^{3/2}}-\frac{m_2G}{L^3\omega_0^2}\frac{y^*}{\left[\left(x^*-1\right)^2+y^{*2}\right]^{3/2}}.\tag{15}$$

Используя (12), находим

$$\frac{m_1G}{L^3\omega_0^2}=\frac{m_1}{m_1+m_2},\ \ \frac{m_2G}{L^3\omega_0^2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

Поэтому, если положить

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}=\varepsilon,\qquad\text{то}\ \frac{m_1}{m_1+m_2}=1-\varepsilon,\tag{16}$$

и уравнения (14) – (15) принимают вид

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{(1-\varepsilon)x^*}{\left(x^{*2}+y^{*2}\right)^{3/2}} - \frac{\varepsilon(x^*-1)}{\left[\left(x^*-1\right)^2+y^{*2}\right]^{3/2}}, \tag{17}$$

$$\frac{d^2y^*}{dt^{*2}} = -\frac{(1-\varepsilon)y^*}{\left(x^{*2}+y^{*2}\right)^{3/2}} - \frac{\varepsilon\, y^*}{\left[\left(x^*-1\right)^2+y^{*2}\right]^{3/2}}, \tag{18}$$

Таким образом, наша задача определяется только одним параметром ε, который обычно называют приведенной массой. Если m_1 представляет собой массу Земли, а m_2 – массу Луны, то

$$\varepsilon \approx \frac{\frac{1}{80}}{1+\frac{1}{80}} = \frac{1}{81},$$

т.е. действительно является малой величиной. Она и может рассматриваться в качестве параметра возмущения при построении приближенного решения задачи о движении космического корабля в гравитационном поле Земли и Луны.

8. Анализ размерностей. π-теорема

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда можно представить в виде:

$$a = f(a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_n), \tag{1}$$

где величины $a_1, \dots, a_n$ носят название определяющих параметров, причем аргументы $a_1, \dots, a_k$ имеют независимые размерности, а размерности аргументов $a_{k+1}, \dots, a_n$ выражаются через размерности определяющих параметров $a_1, \dots, a_k$:

$$[a_{k+1}] = [a_1]^{p_{k+1}} \dots [a_k]^{r_{k+1}},\ [a_n] = [a_1]^{p_n} \dots [a_k]^{r_n}. \tag{2}$$

В конце концов, любое исследование сводится к определению одной или нескольких зависимостей вида (1). Размерность определяемой величины a должна выражаться через размерности определяющих параметров $a_1, \dots a_k$:

$$[a] = [a_1]^p \dots [a_k]^r. \tag{3}$$

В самом деле, если бы это было не так, то размерности величин $a, a_1, \dots, a_k$ были бы независимыми и, согласно предыдущему, можно было бы, меняя систему единиц измерения внутри данного класса, произвольно менять величину a, оставляя неизменными величины $a_1 \ldots, a_k$ (а следовательно, и все определяющие параметры $a_1, \ldots, a_n$). Это означало бы, что величина a зависит не только от параметров $a_1, \ldots, a_n$, т. е. что список определяющих параметров в зависимости (1) заведомо неполон. Таким образом, существуют такие числа $p, \ldots, r$, что имеет место формула (3). Положим поэтому

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \ldots a_k^{r_{k+1}}}, \ \ldots \ , \ \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} \ldots a_k^{r_n}}; \ \Pi = \frac{a}{a_1^{P} \ldots a_k^{r}}. \qquad (4)$$

Величины $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}$, очевидно, безразмерны, и при переходе от одной системы единиц к другой внутри данного класса их численные значения остаются неизменными. Зависимость (1), используя величины (4), можно переписать в виде

$$\Pi = \frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{a_1^{p} \ldots a_k^{r}} = \frac{1}{a_1^{p} \ldots a_k^{r}} f\Big(a_1, \ldots, a_k \ ,$$

$$\Pi_1 a_1^{p_{k+1}} \ \ldots \ a_k^{r_{k+1}}, \ \ldots, \ \Pi_{n-k} a_1^{p_n} \ \ldots \ a_k^{r_n}\Big) = F(a_1, \ \ldots, \ a_k, \ \Pi_1, \ \ldots, \ \Pi_{n-k}). \qquad (5)$$

Как было показано, можно перейти к такой системе единиц измерения, что любой из параметров $a_1, \ldots, a_k$ например a_1, изменится в произвольное число раз, а остальные сохранятся неизменными. При таком переходе в зависимости (5) меняется, и притом произвольно, первый аргумент, а все остальные аргументы функции F остаются неизменными, так же как ее значение П. Отсюда следует, что $\partial F / \partial a_1 = 0$ и аналогично $\partial F / \partial a_2 = 0$, $\partial F / \partial a_k = 0$. Следовательно, зависимость представляется на самом деле через функцию $n - k$ аргументов:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}),$$

или, что то же самое, функция f имеет специальный вид

$$f(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = a_1^{p} \ \ldots \ a_k^{r} \ \Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \ldots a_k^{r_{k+1}}}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{a_1^{p_n} \ldots a_k^{r_n}} \right). \qquad (6)$$

Этот факт составляет содержание центрального (и, по существу, единственного содержательного) утверждения анализа размерностей, П-*теоремы,* явно сформулированной и доказанной, по-видимому, впервые Э. Бакингамом:

Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций

определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.

Следует отметить, что П-теорема интуитивно вполне очевидна, и ее неявное использование началось задолго до того, как она была явно сформулирована и формально доказана; в этой связи следует прежде всего назвать имена Галилея, Ньютона, Фурье, Максвелла, Рейнольдса и Релея. Здесь же заметим, что анализ размерностей с большой пользой применяется при предварительном анализе физических явлений и при обработке данных экспериментов. В самом деле, принято считать, что для выяснения зависимости той или иной величины от некоторого определяющего параметра надо измерить эту величину как минимум при десяти значениях данного аргумента. Таким образом, для экспериментального определения величины a в функции n определяющих параметров надо было бы произвести 10^n экспериментов. Согласно П-теореме, дело сводится к определению функции $n - k$ безразмерных аргументов $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$, для нахождения которой достаточно 10^{n-k} опытов, т. е. в 10^k раз меньше. Стало быть, ***трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров величин с независимыми размерностями.***

В 1909 – 1911 гг. Э. Бозе, Д. Рауэрт и М. Бозе опубликовали серию экспериментальных исследований (рис. 10). Ими измерялось время τ заполнения сосуда данного объема Q и перепад давления P на концах трубки при стационарном протекании через трубку различных жидкостей: воды, хлороформа, бромоформа, ртути, этилового спирта и др. Результаты опытов были, как полагается, представлены в виде серии зависимостей перепада давления от времени заполнения для разных жидкостей, подобных представленным на рис. 11. Эти работы были замечены Карманом, который подверг результаты обработке с точки зрения, если пользоваться современной терминологией, анализа размерностей.

Рассуждения Кармана можно представить следующим образом. Перепад давления P на концах трубки должен зависеть от времени заполнения сосуда τ, объема сосуда Q и свойств жидкости: коэффициента вязкости μ и плотности ρ:

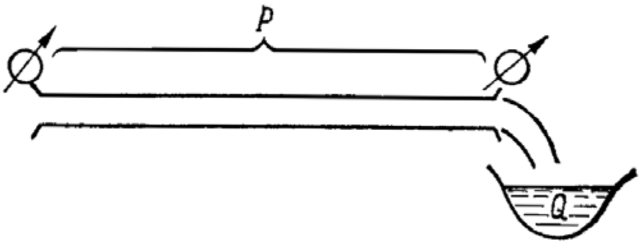

Рис. 10. Схема опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе

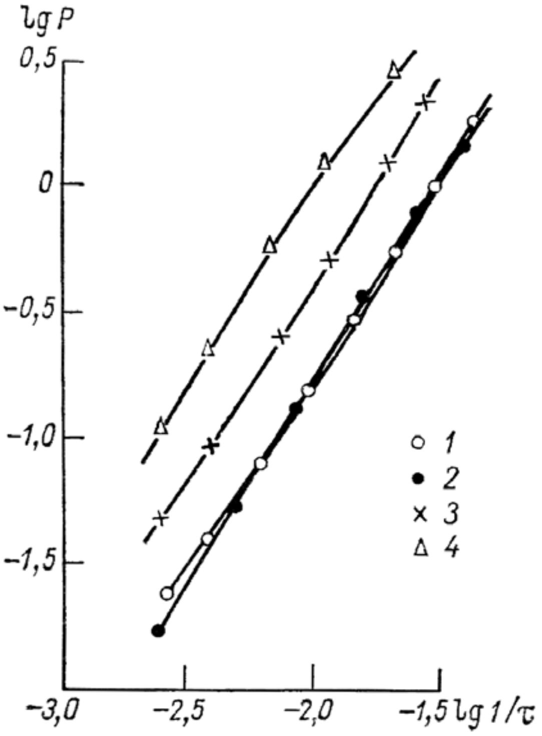

Рис. 11. Результаты опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе в исходном виде для различных жидкостей. 1 – вода, 2 – хлороформ, 3 – бромоформ, 4 – ртуть

$$P=f(\tau, Q, \mu, \rho). \qquad (7)$$

Как видно, в данном случае $n = 4$. Размерности параметров, для определенности, в классе *MLT,* выражаются следующими соотношениями:

$$[P]=\frac{M}{LT^2};\ [\tau]=T;\ [Q]=L^3;$$

$$[\mu]=\frac{M}{LT};\ [\rho]=\frac{M}{L^3}. \qquad (8)$$

Легко видеть, что первые три определяющих параметра τ, Q, μ имеют независимые размерности, размерность же четвертого определяющего параметра ρ выражается через размерности первых трех: $[\rho]=[\mu][\tau][Q]^{-2/3}$.

Таким образом, $k = 3$, так что $n - k = 1$, и анализ размерностей дает

$$\Pi=\Phi(\Pi_1), \qquad \Pi=\frac{P}{\mu\tau^{-1}},$$

$$\Pi_1=\frac{\rho}{\mu\,\tau\,Q^{-2/3}}. \qquad (9)$$

Следовательно, согласно (9), в координатах Π_1, Π все опытные точки должны лечь на единую кривую. Как показывает рис. 12, это подтвердилось. Ясно, что заранее проведенный анализ размерностей мог бы сократить объем экспериментальной работы физиков и химиков во много раз.

Интересен следующий пример. (Приводимое ниже рассуждение принадлежит Дж.И. Тейлору. Теоретическое исследование соответствующей задачи газодинамики дано в работах Л.И. Седова и Дж.И. Тейлора). При атомном взрыве в области, настолько малой, что ее можно считать точкой, быстро (можно считать мгновенно) выделяется значительная энергия *E*. От центра взрыва распространяется мощная ударная волна, давление за которой вначале составляет сотни тысяч атмосфер. Это давление много больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Таким образом, радиус фронта ударной волны r_j через промежуток времени t после взрыва зависит от E, t и начальной плотности воздуха ρ_0:

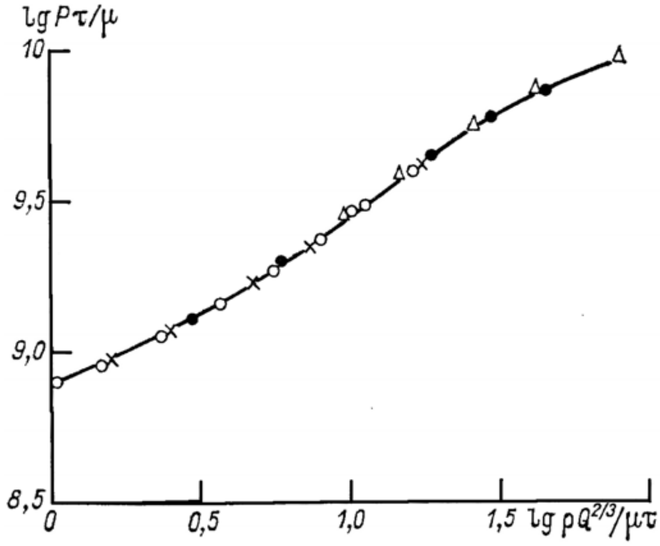

Рис. 12. Результаты опытов Э. Бозе, Д. Рауэрта и М. Бозе в интерпретации Кармана
Обозначения – см. рис. 11

$$r_f = r_f(E, t, \rho_0).$$

Таким образом, $n = 3$. Размерности определяющих параметров в классе MLT соответственно, $[E] = ML^2T^{-2}$; $[t] = T$; $[\rho_0] = ML^{-3}$. Легко видеть, что k тоже равно трем, т.е. $n - k = 0$, так что функция Ф в выражении (6) не зависит ни от одного аргумента, т.е. превращается в данном случае в константу: Ф = $const$. Далее, как нетрудно показать,

$$\Pi = r_f\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

откуда

$$r_f = const\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Эта формула показывает, что если измерять тем или иным способом радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах $\frac{5}{2}\,lg\, r_f$, $lg\, t$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2}\ \lg r_f = const\,\frac{5}{2}\ \lg E^{1/5}\ \rho_0^{-1/5}\ +\ \lg t,$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний Дж. Маком (рис. 13). Как показывает более детальный расчет, значение *const* близко к единице. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины, оказавшейся равной примерно 10^{21} эрг (10^{14} Дж), вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.

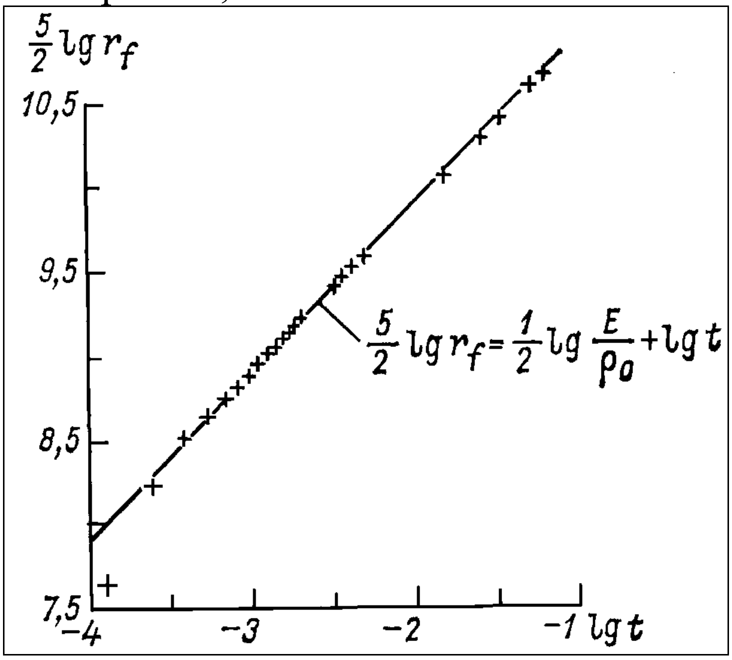

Рис. 13. Распространение ударной волны при ядерном взрыве. Опытные точки, определяемые по кинофильму Мака, в координатах (5/2) lg r_f, lg t на большом промежутке времени легли на линию с наклоном, равным единице.

Рассмотренные примеры показывают, что тривиальные, казалось бы, соображения анализа размерностей могут дать вполне содержательные результаты. Важнейшим элементом при этом является правильный выбор совокупности определяющих параметров.

9. Физические единицы

9.1. Системы единиц физических величин

Единицей физической величины называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же физический смысл, что и рассматриваемая. *Системой единиц* называется совокупность единиц физических величин, относящаяся к некоторой системе величин и образованная в соответствии с принятыми правилами. *Основными единицами* данной системы единиц называются единицы нескольких разнородных физических величин, произвольно выбранные при построении этой системы. Соответствующие физические величины называются *основными величинами* данной системы. Система единиц называется абсолютной, если ее основными физическими величинами являются длина, масса и время.

Производными величинами называются единицы, устанавливаемые через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь.

Размерностью физической величины называется выражение, характеризующее связь этой величины с основными величинами в данной системе единиц. Это выражение представляет собой одночлен в виде произведения символов основных физических величин в соответствующих степенях (целых или дробных, положительных или отрицательных). Физическая величина называется *безразмерной величиной,* если в выражение ее размерности все основные величины входят в нулевой степени. Численное значение безразмерной величины не зависит от выбора системы единиц.

В физике наиболее широкое применение находит система СГС или *CGS*, которая одно время носила название *абсолютной системы единиц*. Однако необходимо указать, что достаточных оснований для такого названия не имеется, так как основные единицы системы СГС – сантиметр, грамм, секунда – являются столь же условными, как и основные единицы других систем.

9.2. Построение систем единиц

Совокупность основных и производных единиц, относящаяся к некоторой системе величин и построенная в соответствии с принятыми принципами, образует систему единиц. Для построения системы единиц следует, выбрав несколько основных единиц, установить с помощью определяющих уравнений производные единицы всех остальных интересующих нас величин. Определяющие уравнения могут быть двух типов: одни представляют собой определение новой величины – таковым, например, является формула скорости

$$v = K\frac{\partial l}{\partial t} \text{ или формула работы } dA = K\,\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

(здесь K – коэффициент, зависящий от выбора единиц длины, времени и скорости, так как единица скорости может быть выбрана независимо от единиц длины и времени, например, скорость может измеряться в долях скорости света в вакууме c, тогда $K = \frac{1}{c}\frac{скор.света}{м/с}$), другие выражают обнаруженную экспериментальную зависимость или теоретическую связь между исследуемыми величинами. К закономерностям этого типа относятся: закон всемирного тяготения, закон Кулона о взаимодействии электрических зарядов и др. Такое деление уравнений на "определения" и "законы" не является абсолютным и зависит от подхода к данному конкретному вопросу. Это, однако, не играет существенной роли в определении новых единиц, поскольку в обоих случаях закономерности представляются в виде формул, связывающих данную величину с другими, для которых единицы установлены ранее.

В узком смысле "системы единиц" существовали с незапамятных времен. Единицы длины определяли производные единицы площади и объема. После введения метрической системы мер появилась производная единица удельного веса (плотности) – килограмм на кубический дециметр.

Следующим шагом можно считать введение в теорию теплопроводности Ж. Фурье (1820 г.) системы тепловых единиц. В этой системе в качестве основных единиц были приняты единицы длины, времени и температуры, а в качестве производных – объемная теплоемкость и внутренняя и внешняя теплопроводности.

Значительно более общая система единиц была создана К.Ф. Гауссом (1832 г.). Приняв в качестве основных единицы длины (миллиметр), массы (миллиграмм) и времени (секунда), Гаусс создал "абсолютную систему единиц", в которую наряду с единицами механических величин входили единицы всех электрических и магнитных величин, фигурировавшие в то время в физике. В настоящее время уже совсем не пользуются понятием "абсолютная система", тем более, что нет никакого критерия, который позволил бы, исходя из принципиальных соображений, отдать предпочтение какой-либо системе и присвоить ей столь обязывающее название.

Предложение Гаусса построить систему единиц, используя три основные единицы – длины, массы и времени, было принято в физике с той лишь разницей, что основной единицей длины вместо миллиметра был взят сантиметр, а вместо миллиграмма – грамм. На этих трех единицах была построена система, обозначаемая СГС.

Система СГС охватывала механические, электрические и магнитные измерения, причем произошло ее разбиение на электростатическую (СГСЭ) и электромагнитную (СГСМ) системы. В первой за основу принималось взаимодействие электрических зарядов, во второй – взаимодействие "магнитных масс". Впоследствии оказалось целесообразным принять такой вариант системы, в котором величины, относящиеся к электростатическим явлениям, и величины, связанные с прохождением тока (сила тока, сопротивление), измеряются электростатическими единицами, а относящиеся к электромагнитным явлениям – электромагнитными. Эта система получила название симметричной, или гауссовой, системы и обозначается СГС.

В настоящее время на практике широко применяются две системы единиц: Международная система единиц (СИ, или *SI*, – *Systeme International d'Unites)* и симметричная (гауссова) система (СГС).

Международная система единиц – это единственная в настоящее время система, которую мировая общественность приняла для практического применения именно благодаря ее достоинствам и преимуществам перед всеми остальными системами единиц (универсальность как по содержанию производных единиц практически всех областей измерений, так и по применению во всех областях народного хозяйства; возможность унификации единиц, так как для каждой величины устанавливается только одна единица, все остальные и большинство производных единиц имеют размеры, удобные для практики; упрощение расчетов и т.д.).

Формально в СГС входят только геометрические, механические, электрические и электромагнитные единицы, поскольку в ней присутствуют только три основные единицы – сантиметр, грамм и секунда. Однако во всех исследованиях, охватывающих тепловые явления, используется единица температуры – кельвин. Кроме того, в молекулярной физике и химии число частиц (по современной терминологии – количество вещества) имеет в качестве единицы моль. В светотехнике к единицам СГС добавляется единица светового потока – люмен. Образованная таким образом светотехническая система единиц ранее обозначалась СГСЛ.

Наряду с несомненными достоинствами, СГС обладает существенными недостатками. Подавляющее большинство ее единиц слабо связаны с практическими потребностями. В первую очередь это относится к единицам электричества и электромагнетизма, применяющимся в электротехнике. Весьма неудобны для пересчета соотношения между единицами СГС и практическими. Так, один вольт равен 1/300 СГС-единицы напряжения, а один ампер – $3 \cdot 10^9$ СГС-единицы силы тока. Но эти числа лишь приближенные. Так, например, ампер должен относиться к СГС-единице силы тока как одна десятая скорости света в вакууме, измеренной в сантиметрах в секунду. Существенное неудобство состоит в том, что все единицы СГС относящиеся к электростатике и электрическому току, не имеют названий. Это такие величины, как электрический заряд, напряженность поля, потенциал, сила тока и др. В электростатике отсутствуют приборы, которые измеряли бы эти величины в единицах СГС.

9.3. Измерения

Формулы размерностей остаются неизменными, если не изменяются основные величины системы, независимо от того, какие единицы мы выберем для измерения основных величин. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что остаются одинаковыми только формулы размерностей, но числовые значения физических величин всецело зависят от единиц, выбранных для измерения. Результатом каждого физического измерения является число, которое показывает (в пределах точности измерений), сколько раз выбранная единица измерения содержится в измеряемой величине. Обозначая измеряемую величину буквой *A*, единицу измерения a_1 и результат измерений n_1, можно, очевидно, написать:

$$A = n_1 a_1. \tag{1}$$

Если для измерения той же величины *A* взять другую единицу a_2, то получится иной числовой результат n_2 , причем по-прежнему можно написать:

$$A = n_2 a_2. \tag{2}$$

Из этих двух уравнений находим:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{a_1}{a_2} \text{ и } n_2 = n_1 \frac{a_1}{a_2}. \tag{3}$$

Из уравнений (3) мы видим, что числовые результаты измерений одной и той же величины различными единицами обратно пропорциональны величинам этих единиц.

9.4. Переход от одной системы единиц к другой

Системы СИ и СГС применяются во всех разделах физики, но иногда необходимо перейти из одной системы в другую, или приходится обращаться к другим системам или вводить другие единицы. При таком переходе от одной системы единиц к другой применяются особые правила, которые можно обосновать следующим образом.

Допустим, формулу размерности некоторой производной физической величины *A* можно записать в общем виде так:

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \tag{4}$$

где *L, M* и *T* (длина, масса и время) мы считаем основными единицами данной системы, а показатели α, β, γ являются некоторыми числами целыми или дробными, положительными или отрицательными.

Всякая другая величина A_1, однородная с *A*, имеет ту же размерность, т.е. одинаковые показатели α, β, γ в правой части выражения (4). Обозначая отношение A_1 к *A* буквой *n*, можно написать:

$$A_1 = n\,A = n\left(L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}\right).$$

В этом выражении мы можем считать величину A единицей для измерения величины A_1 , а n – числовым результатом такого измерения.

Допустим, что вместо прежних основных единиц L, M, T мы вводим новые основные единицы L_1, M_1 и T_1 ; их отношение к прежним основным единицам обозначим соответственно x, y, и z, т.е. положим

$$\frac{L_1}{L} = x, \qquad \frac{M_1}{M} = y, \qquad \frac{T_1}{T} = z. \tag{5}$$

При этом, очевидно, прежняя единица A измерения величины A_1 заменится новой единицей A' и прежний результат измерений n – новым результатом n'.

Так как новая единица A' служит для измерения той же величины A_1 и получается в результате перехода к новым единицам L_1, M_1 и T_1, то можно записать:

$$[A'] = L_1^{\alpha} M_1^{\beta} T_1^{\gamma}.$$

Отсюда на основе уравнений (3) и (4) находим:

$$[A'] = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \left(L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \right) = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \cdot A. \tag{6}$$

Итак, при переходе к новым основным единицам системы ***новая единица какой-либо производной величины равняется ее прежней единице, умноженной на формулу размерности данной величины, в которую вместо основных единиц системы следует поставить отношения новых основных единиц к прежним.***

Точно так же на основании уравнений (3) и (6) имеем

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{A'} = \frac{A}{A \cdot x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}} = \frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}},$$

откуда находим

$$n' = \frac{n}{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}, \tag{7}$$

т.е. при переходе к новым основным единицам системы результат измерения какой-либо величины новой единицей равен результату ее измерений прежней единицей, разделенному на формулу размерности данной величины, в которой вместо основных единиц системы следует поставить отношения новых основных единиц к прежним.

Пример 9.1. Найти отношение единиц силы в системе СИ (ньютон) и системе СГС (дина). Рассматриваем эту задачу как замену основных единиц системы (см, г, с) новыми единицами (м, кг, с), взятыми из системы СИ.

Вычисляем отношение основных единиц той и другой системы, т.е. находим значения *x, y,* и *z* в уравнениях (5), причем очевидно, что *z* равно единице, так как единица времени в обеих системах одинакова:

$$x = \frac{1\,м}{1\,см} = 10^2, \qquad y = \frac{1\,кг}{1\,г} = 10^3.$$

На основании уравнения (5), полагая в нем

$$A' = 1\,Н \quad \text{и} \quad A = 1\,дн,$$

применяя формулу размерности силы $[F] = LMT^{-2}$, находим

$$1\ Н = 10^2 \cdot 10^3 \cdot 1^{-2}\ дн, \text{ или } 1\ Н = 10^5\ дн.$$

Пример 9.2. Найти соотношение единиц работы в системе СИ (джоуль) и системе СГС (эрг). Так как единица времени в обоих системах одинакова, т.е. *z* равно единице, как и в предыдущем случае, находим значения *x* и *y*.

$$x = \frac{1\,м}{1\,см} = 10^2, \qquad y = \frac{1\,кг}{1\,г} = 10^3.$$

На основании уравнения (5) полагая в нем

$$A' = 1\,Дж \text{ и } A = 1\,эрг,$$

применяя формулу размерности силы $[A] = L^2MT^{-2}$, находим

$$1\ Дж = 10^4 \cdot 10^3 \cdot 1^{-2}\ дн, \qquad \text{или} \qquad 1\ Дж = 10^7\ эрг.$$

Приложения

Приложение 1

Механические свойства твердых тел

Традиционное изложение этого вопроса в рамках модели сплошной среды [11–14] уже не удовлетворяет современным требованиям и должно быть заменено его изложением в рамках молекулярно-кинетических представлений о строении твердого тела с более четким определением физического смысла модулей упругости. Первая (насколько нам известно) попытка такого рассмотрения проведена в [15]. Однако в [15] авторы ограничиваются выведением в рамках простой и ясной модели закона Гука и не рассматривают физического смысла модуля Юнга и традиционной для этой темы диаграммы «напряжение – деформация».

Уже простейшая грубая модель кристаллической решетки твердого тела из шариков, связанных пружинками, дает нам возможность убедиться в том, что под действием внешних растягивающих или сжимающих напряжений увеличиваются или уменьшаются и линейные размеры твердого тела в направлении действия напряжения. В реальном твердом теле роль шариков играют ионы или атомы, а роль пружинок – силы их взаимодействия. Пусть $U(r)$ – потенциальная энергия взаимодействия двух соседних атомов простой кубической кристаллической решетки, где r – расстояние между ними. При приложении к образцу внешнего напряжения расстояние между соседними атомами изменится на $\Delta r=r-r_0$, где r_0 – расстояние между атомами при отсутствии внешних напряжений. Разложим потенциальную энергию $U(r)$ в ряд Тейлора возле r_0 по степеням смещения Δr:

$$U(r)-U(r_0)=\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0}\cdot\Delta r+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}\Delta r^2+\ldots \qquad (1)$$

В положении равновесия при $r = r_0$ потенциальная энергия $U(r)$ имеет минимум $dU/dr|_{r=ro} = 0,$ и первый член правой части равенства обращается в нуль. Если внешние напряжения невелики, и смещения атомов из положения равновесия малы, в разложении (1) можно отбросить справа все члены, кроме первого, не обращающегося в нуль:

$$U(r)-U(r_0)=\frac{1}{2!}\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot\Delta r^2. \qquad (2)$$

Возьмем первую производную по r от левой и правой частей этого выражения и получим

$$\frac{dU(r)}{dr}=\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot dr. \qquad (3)$$

По определению $\frac{dU}{dr}=-f(r)$, следовательно, соотношение (3) определяет зависимость между силой, действующей на каждый из атомов кристаллической решетки, стремящейся вернуть атом в положение равновесия, и смещением атома из положения равновесия:

$$f(r)=-\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot\Delta r. \qquad (4)$$

Пусть испытуемый образец представляет собой куб со стороной l. Концентрация атомов (ионов) в нем $n_0=r_0^{-3}$. Для того, чтобы вызвать смещение из положения равновесия всех атомов в образце, необходимо приложить к одной из его граней нормальную силу

$$F=-f(r)\cdot\left(\frac{l}{r_0}\right)^2. \qquad (5)$$

Результирующая деформация образца будет

$$\Delta l=\frac{l}{r_0}\cdot\Delta r. \qquad (6)$$

Выражая из (5) и (6) $f(r)$ и Δr и подставляя их в (4), получим связь между приложенной к образцу силой и деформацией:

$$F=\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot\frac{l}{r_0}\cdot\Delta l. \qquad (7)$$

Разделив левую и правую части этого выражения на l^2 и введя напряжение $\sigma=F/l^2$ и относительную деформацию $\varepsilon=\Delta l/l$, перепишем (7) в виде

$$\sigma=\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot\frac{\varepsilon}{r_0}=\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot n_0 r_0^2\varepsilon, \qquad (8)$$

или

$$\sigma=E\cdot\varepsilon, \qquad (9)$$

где

$$E = \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} \cdot n_0 r_0^2 . \qquad (10)$$

Соотношения (8) и (9) представляют собой закон Гука, установленный им экспериментальным путем в 1660 г.: относительная деформация прямо пропорциональна приложенному напряжению. Коэффициент пропорциональности E называется модулем Юнга.

Физический смысл модуля Юнга ясен из выражения (2), (10). В самом деле, из (2), (10) следует, что

$$E = n_0 r_0^2 \cdot \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 2n_0\left[U(2r_0) - U(r_0)\right]. \qquad (11)$$

То есть модуль Юнга характеризует изменение потенциальной энергии взаимодействия всех атомов (ионов) в единице объема образца при увеличении расстояния между ними вдвое. Однако при столь значительном смещении атомов (ионов) из положений равновесия твердое тело перестает существовать и распадается на отдельные атомы. Отсюда видно, что модуль Юнга характеризует плотность энергии связи атомов твердого тела, т.е. полную энергию взаимодействия атомов (ионов) в единице объема.

Из формулы (11) следует, что модуль Юнга выражается в джоулях на кубический метр (Дж/м^3). Из закона же Гука может быть получена единица паскаль (Па). Это породило неверную, на наш взгляд, лишенную какого бы то ни было физического смысла, трактовку понятия модуля Юнга как напряжения, при котором относительная деформация образца равна единице.

Как несложно видеть из вышеизложенного, область применимости закона Гука ограничивается малыми деформациями, при которых в разложении потенциальной энергии по степеням Δr можно ограничиваться учетом первого, не обращающегося в нуль члена. Максимальное значение напряжения, при котором сохраняется пропорциональность напряжения и деформации, называют **пределом пропорциональности** $\sigma_П$. На графике зависимости относительной деформации от напряжения предел пропорциональности ограничивает прямолинейный ход зависимости $\varepsilon(\sigma)$.

При напряжениях, больших предела пропорциональности в разложении (1), уже необходимо учитывать члены с более высокими степенями Δr:

$$U(r)-U(r_0)=\frac{1}{2!}\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\Delta r^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3U}{dr^3}\bigg|_{r=r_0}\Delta r^3+\ldots \tag{2a}$$

В результате выражение для упругой силы примет вид:

$$f(r)=-\frac{d^2U}{dr^2}\bigg|_{r=r_0}\cdot\Delta r-\frac{1}{2!}\frac{d^3U}{dr^3}\bigg|_{r=r_0}\cdot\Delta r^2-\ldots \tag{4a}$$

То есть деформация уже не будет пропорциональна смещению. На графике $\varepsilon(\sigma)$ прямая перейдет в кривую: зависимость $\varepsilon(\sigma)$ станет более сильной.

При увеличении напряжения до некоторого предела, называемого **пределом упругости** $\sigma_у$, после снятия напряжения деформация полностью исчезает, и образец восстанавливает свои первоначальные размеры и форму. Однако при превышении предела упругости после снятия напряжения у образца остается остаточная деформация. Появление этой остаточной деформации связано с тем, что реальная кристаллическая решетка образца содержит дефекты дислокации, которые при достаточно больших внешних напряжениях (больших предела упругости) приходят в направленное движение в направлении приложенного напряжения и приводят к появлению пластических деформаций. Поэтому иногда предел упругости называют **пределом пластичности** $\sigma_{пл}$. Наличие двух названий у одного предела связано с тем, что он разделяет области упругих и пластических деформаций.

Если увеличивать напряжение еще больше, то можно достичь предела текучести σ_T (рис. 14), при котором увеличение деформаций осуществляется без увеличения напряжения, т.е. при постоянном напряжении на образце: образец ведет себя как вязкая жидкость – течет. На кривой $\varepsilon(\sigma)$ появляется плоский участок, почти параллельный оси деформации. Пластическое течение образца под действием напряжений $\sim\sigma_T$ связано с направленным движением дислокаций и их размножением под влиянием приложенных на-

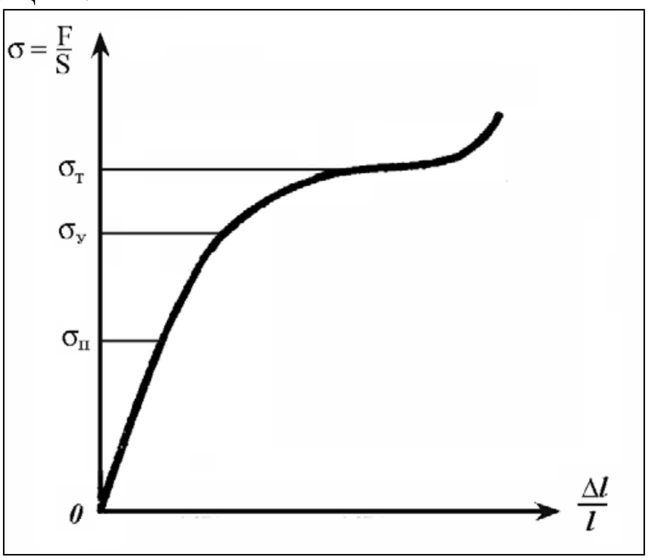

Рис. 14.

пряжений с соответствующим увеличением пластических свойств образца.

При дальнейшем увеличении напряжения можно достичь **предела прочности** $\sigma_{пр}$, при котором образец рвется. В рамках модели идеального бездефектного кристалла предел прочности легко подсчитать следующим образом. Из общих соображений ясно, что по мере увеличения расстояния между соседними атомами (ионами) сила их взаимодействия сначала увеличивается до некоторого максимума, а потом резко уменьшается, и атомы (ионы) перестают взаимодействовать. Приравнивая к нулю производную от силы (4а) по смещению, несложно найти максимальное смещение Δr_* и соответствующее значение напряжения $\sigma_{пр*}$. Однако вычисленное таким образом значение предела прочности $\sigma_{пр}$ оказывается на несколько порядков выше экспериментально измеренного. Это опять же связано с отличиями реального кристалла от идеального.

Как показывает опыт, предел прочности $\sigma_{пр}$ зависит от сложных взаимодействий дислокации друг с другом и другими дефектами структуры реального твердого тела. Этот вопрос подробно рассмотрен в [15].

Из (2) легко получить выражение для энергии упругой деформации единицы объема образца в пределах применимости закона Гука. Для этого умножим левую и правую части (2) на число атомов (ионов) в единице объема n_0 и преобразуем правую часть:

$$W_0 = n_0[U(r) - U(r_0)] = \frac{n_0}{2} \cdot \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} \cdot \Delta r^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} \times$$

$$\times \frac{\Delta r^2}{r_0^2}\ r_0^2 = \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} \cdot n_0 r_0^2\right\}\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2.$$

Принимая во внимание, что $\dfrac{\Delta r}{r_0} = \varepsilon$, и учитывая (10), получим

$$W_0 = \frac{1}{2}E \cdot \varepsilon^2.$$

Из тех же соображений из (1) несложно получить выражение для плотности энергии упругих деформаций в общем случае:

$$W = \frac{1}{2}E \cdot \varepsilon^2 + n_0 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left.\frac{d^kU}{dr^k}\right|_{r=r_0} \cdot r_0^k \varepsilon^k.$$

Приложение 2

Задачи

1. Попробуйте доказать правило единственности ответа при оценках из соображений размерности, если число параметров задачи N на единицу больше числа основных величин K: N – K = 1.

2. Докажите, что если N – K = 2, то из выписанных параметров можно построить только две независимые безразмерные комбинации.

Естественным кажется теперь предположение о том, что если N – K = 3, то можно построить только три независимые безразмерные комбинации. Так ли это?

3. Найти период осцилляций газового пузыря, образовавшегося в результате взрыва глубинной бомбы. Даны: полная энергия взрыва, плотность воды, статическое давление.

4. Представим себе, что пульсар с радиусом 10 км образовался путем сжатия звезды, параметры которой (масса и радиус) совпадают с параметрами Солнца. Радиотелескоп принимает пульсирующее радиоизлучение от пульсара с характерным периодом 0.005 с. Каков был период вращения вокруг собственной оси у несжавшейся звезды? Если предположить, что магнитное поле пульсара однородно, а напряженность его составляет 10^{12} гаусс, что можно сказать о величине магнитного поля в звезде до ее сжатия?

5. Если условно считать, что нейтронная звезда состоит только из нейтронов, то каково их число в этом гигантском атомном ядре? Массу нейтронной звезды считать равной массе нашего Солнца.

6. Вычислите, гравитационный радиус для Луны.

7. Вычислите для Земли минимальный период вращения вокруг оси.

8. Докажите, что в очень сильно сжатом веществе (например, в глубине нейтронных звезд или в атомных ядрах) скорости частиц обратно пропорциональны среднему расстоянию между ними.

9. Формула $\omega^2 \sim \frac{\gamma M}{R^3}$ определяет минимальную частоту собственных пульсаций гравитирующего шара и максимальную частоту вращения для того же шара. Можно ли отсюда сделать вывод, что

шар, вращающийся с частотой $\omega^2 \sim \frac{\gamma M}{R^3}$, обязательно должен при этом пульсировать?

10. Какие существуют принципиальные ограничения на минимально возможное время разряда батареи конденсаторов через соленоид? Связано ли это минимально возможное время со временем «диффузии» магнитного поля? Что в этом случае является характерным размером? Разберите вопрос об исчезновении магнитного поля внутри соленоида, по обмотке которого шел постоянный ток, если ток внезапно выключить.

11. Учитывая тот факт, что теплота плавления также есть, по существу, характерная энергия, необходимая для разрушения кристаллической решетки, оцените, какова должна быть температура в центре планеты, построенной целиком из ионного кристалла и не имеющей ядра.

12. Оцените численно максимальную и минимальную скорости звука вблизи центра той же планеты, если радиус и масса ее такая же, как у Земли.

13. Обратите внимание на то, что если задать какую-то характерную плотность вещества во Вселенной ρ, гравитационную постоянную γ и скорость света *c,* то можно из этих величин «сконструировать» величину с размерностью длины: $R = \left(c/\sqrt{\gamma\rho}\right)$. Эта формула напоминает нам формулу для средней скорости звука в звезде или планете с плотностью ρ и радиусом *r*: $v \sim \sqrt{\lambda\rho r^3}$. Возникает желание назвать величину *R* «радиусом Вселенной». Параметр *R* и в самом деле является некоторым характерным размером для Вселенной в целом. Заметьте, что то же самое значение для «радиуса Вселенной» получится, если в закон разбегания галактик $V = Hr$ (V – скорость убегающей галактики, *r* – расстояние до нее, а *H* – так называемая постоянная Хаббла) подставить вместо *V* – скорость света *c*.

14. Сравните плотность энергии максимально достижимых с помощью соленоидов магнитных полей, значения упругих модулей и теплоты плавления для какого-нибудь металла. Какие выводы из такого сравнения можно сделать?

Сравните также величины упругих модулей и теплот плавления и испарения для твердого тела. О чем говорит такое сравнение?

Можно ли с помощью соленоида со сверхпроводящей обмоткой создать большие магнитные поля, чем в таком же соленоиде с обмоткой из несверхпроводящего металла? Что можно сказать о максимальных полях, если мы имеем возможность вставить внутрь соленоида ферромагнитный сердечник?

15. Оцените давление, создаваемое острием обычной швейной иголки, поставленной вертикально на письменный стол, покрытый стеклом, если стукнуть по ней молотком. Та же задача – для небольшого гвоздя, забиваемого в стену. Оцените также силу сопротивления стены движению гвоздя.

16. Оцените, насколько межатомные расстояния в нижней части вертикально стоящей металлической колонны меньше, чем в верхней? Высота колонны 20 м.

17. Попытайтесь оценить, на какой высоте лопнет резиновый шарик, упущенный зазевавшимся ребенком. Шарик наполнен гелием.

18. Оцените время столкновения двух металлических шаров, выбрав все, характеризующие такой процесс, параметры. А каково будет время столкновения двух шаров, подобных нашей Земле?

19. Оцените численно период колебаний дождевой капли.

20. Оцените численно величину дрейфовой скорости электрона в металлическом стержне длиной 1 м, если к нему приложено напряжение 300 В, а длина свободного пробега электронов порядка 10^{-4} см.

21. Вычислите удельное сопротивление меди, считая длину свободного пробега величиной порядка 10^{-3} см. Сравните проводимости меди и пульсара.

22. В чем отличие волн на поверхности лужи от волн на поверхности глубокого озера?

23. Попробуйте (хотя бы совсем грубо) оценить, какой энергии хватит, чтобы целиком разрушить атом, «отодрав» от него все электроны.

24. Подумайте, в каком случае, измеряя интенсивность блеска цефеид (т.е. по существу количество излучаемой ими энергии, если мы учтем еще, что энергия испускается во все стороны изотропно и зададим расстояние до звезды), мы можем оценить максимальный и минимальный радиусы такой пульсирующей звезды?

25. Если считать, что астероиды (малые планеты) построены из ионной кристаллической решетки, то какие ограничения существуют на массы образующих астероиды элементов?

26. Получите непосредственно, из соображений размерности, формулы для характерных атомных частот и энергий. Сравните эти формулы с формулами водородоподобной модели атома.

27. Проанализируйте вопрос о сильном точечном взрыве внутри сплошного твердого тела (модель землетрясения). Оцените радиус разрушения при таком взрыве.

28. Найти период пульсаций газового пузыря, образовавшегося при глубинном подводном точечном взрыве. При взрыве выделилась энергия E, взрыв произошел на глубине H.

29. Мы рассмотрели в книге вопрос о максимально возможной высоте гор на планете. Существует ли максимально допустимая глубина шахты, которую можно выкопать в Земле? Если да, то оцените, какова ее глубина.

30. Задав интенсивность I звуковой волны, распространяющейся в кристаллическом стержне, попытайтесь оценить максимальное смещение атомов, вызванное звуковой волной.

31. Найдите размерности сопротивления и индуктивности электрической цепи из соображений размерности. Оцените время установления стационарного тока в цепи, индуктивность которой равна L.

32. Зная энергию связи на нуклон в атомном ядре (~ 8 МэВ) и размер ядра ($\sim 10^{-13}$ см), оцените плотность энергии ядра. Вспомните, что плотность энергии может рассматриваться как характерное давление. Найдите отношение плотности в ядре к модулю Юнга обычных кристаллов. Вычислите также отношение давлений в центре нейтронной звезды и в центре ядра Земли. Объясните, почему оба вычисленных вами отношения приблизительно одинаковы.

33. После решения предыдущей задачи вам уже известно характерное давление внутри атомного ядра. Используйте теперь формулу, связывающую поверхностное натяжение жидкой капли σ, ее радиус R и разность давлений внутри и снаружи капли Δp для оценки величины σ ядра. Сравните вычисленное вами значение с поверхностным натяжением воды (~ 70 дин/см).

34. Сравните кинетическую энергию нуклона в атомном ядре с кинетической энергией молекулы обычного газа при комнатной температуре (скорость нуклона в ядре оценивается в задаче 8).

35. Оцените объем разрушений внутри сплошной кристаллической среды, если источником разрушений будет полный развал одного атомного ядра. Если допустить, что такой развал возможен, можно ли рассматривать его как сильный точечный взрыв?

Приложение 3

Размерности и единицы измерения некоторых геометрических и механических величин в системах единиц СИ и СГС

Величина	Формула размерности в системах СИ и СГС	Единицы измерения в системе			
		СГС		СИ	
		наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение
Длина	L	сантиметр	*см*	метр	*м*
Масса	M	грамм	*г*	килограмм	*кг*
Время	T	секунда	*с*	секунда	*с*
Площадь	L^2	квадратный сантиметр	*см*^{2}	квадратный метр	*м*^{2}
Объем	L^3	кубический сантиметр	*см*^{3}	кубический метр	*м*^{3}
Частота	T^{-1}	герц	*гц* (*с*$^{-1}$)	герц	*гц* (*с*$^{-1}$)
Угловая скорость	T^{-1}	-	*рад/с* (*с*$^{-1}$)	-	*рад/с* (*с*$^{-1}$)
Угловое ускорение	T^{-2}	-	*рад/с*^{2} (*с*$^{-2}$)	-	*рад/с*^{2} (*с*$^{-2}$)
Скорость	LT^{-1}	-	*см/с*	-	*м/с*
Ускорение	LT^{-2}	-	*см/с*^{2}	-	*м/с*^{2}
Сила	LMT^{-2}	дина	*дин* (*г·см/с*^{2})	ньютон	*н* (*кг·м/с*^{2})
Количество движения, импульс	LMT^{-1}	-	*г·см/с*	-	*кг·м/с*
Импульс силы	LMT^{-1}	-	*дин/с* (*г·см/с*)	-	*н/с* (*кг·м/с*)
Плотность	$L^{-3}M$	-	*г/см*^{3}	-	*кг/м*^{3}
Удельный вес	$L^{-2}MT^{-2}$	-	*дин/см*^{3} (*г/см*^{2}*·с*^{2})	-	*н/м*^{3} (*кг/м*^{2}*·с*^{2})
Работа и энергия	L^2MT^{-2}	эрг	*эрг* (*г·см*^{2}*/с*^{2})	джоуль	*дж* (*кг·м*^{2}*/с*^{2})

Мощность	L^2MT^{-3}	-	*эрг/сек* *(г·см²/с³)*	ватт	*дж/сек* *(кг·м²/с³)*
Момент силы	L^2MT^{-2}	-	*дин·см* *(г·см²/с²)*	-	*н·м* *(кг·м²/с²)*
Момент инерции	L^2M	-	*г·см²*	-	*кг·м²*
Момент количества движения	L^2MT^{-1}	-	*г·см²/с*	-	*кг·м²/с*
Импульс момента силы	L^2MT^{-1}	-	*дин·см·с* *(г·см²/с)*	-	*н·м·с* *(кг·м²/с)*
Давление (напряжение)	$L^{-1}MT^{-2}$	-	*дин/см²* *(г/см·с²)*	-	*н/м²* *(кг/м·с²)*
Динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения)	$L^{-1}MT^{-1}$	пуаз	*пз* *(г/см·с)*	-	*н·с/м²* *(кг/м·с)*
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	стокс	*ст* *(см/с)*	-	*м²/с*
Модули линейного растяжения (Юнга), сдвига и всестороннего сжатия	$L^{-1}MT^{-1}$	-	*дин/см²* *(г/см·с)*	-	*н/м²* *(кг/м·с)*
Жесткость	MT^{-1}	-	*дин/см* *(г/с)*	-	*н/м* *(кг/с)*
Коэффициент поверхностного натяжения	MT^{-1}		*г/с²* *(дин/см; эрг/см²)*		*кг/с²* *(н/м; дж/м²)*

Единицы измерения тепловых величин

Величина	Формула размерности в системах СИ и СГС	Единицы измерения в системе	
		СИ	СГС
Коэффициент диффузии	L^2T^{-1}	*м^2/с*	*см^2/с*
Коэффициент внутреннего трения	$L^{-1}MT^{-1}$	*кг/м·с*	*г/см·с (пуаз)*
Коэффициент поверхностного натяжения	MT^{-1}	*кг/с^2 (н/м; дж/м^2)*	*г/с^2 (дин/см; эрг/см^2)*
Удельный объем	L^3M^{-1}	*м^3/кг*	*см^3/г*
Молекулярный вес	*М·моль$^{-1}$ (СГС) М·кмоль$^{-1}$ (СИ)*	*кг/кмоль*	*г/моль*
Количество теплоты, внутренняя энергия, энтальпия, изохорно-изотермический, изобарно-изотермический и химический потенциалы	L^2MT^{-2}	*дж (кг·м^2/с^2)*	*эрг (г·см^2/с^2)*
Теплоемкость, энтропия	*L^2MT^{-2}град$^{-1}$*	*дж/град (кг·м^2/с^2 град)*	*эрг/град (г·см^2/с^2 град)*
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	*L^2T^{-2}град$^{-1}$*	*дж/кг·град (м^2/с^2 град)*	*эрг/кг·град (см^2/с^2 град)*
Удельная теплота сгорания	L^2T^{-1}	*дж/кг (м^2/с)*	*эрг/г (см^2/с)*
Удельная теплота фазового перехода	L^2T^{-1}	*дж/кг (м^2/с)*	*эрг/г (см^2/с)*
Коэффициент теплопроводности	*LMT^{-3}град$^{-1}$*	*вт/м·град (кг·м/с^3 град)*	*эрг/см·с·град (г·см/с^3 град)*
Коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи	*MT^{-3}град$^{-1}$*	*вт/м^2·град (кг/с^3 град)*	*эрг/см^2·с·град (см/с^3 град)*
Коэффициент температуропроводности	L^2T^{-1}	*м^2/с*	*см^2/с*
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	*Ватт (кг·м^2/с^3)*	*эрг/с (г·см^2/с^3)*

Единицы измерения электрических величин

Величина	Размерность в системах		
	СИ	*СГСЭ и Гаусса*	*СГСМ*
Количество электричества (электрический заряд)	*Кулон (Кл)* *(А·с)*	$см^{3/2}г^{1/2}/с$	$см^{1/2}г^{1/2}$
Поток электрического смещения (индукции)	*Кл* *(А·с)*	$см^{3/2}г^{1/2}/с$	$см^{1/2}г^{1/2}$
Электрическое смещение (индукция)	$Кл/м^2$ $(А·с/м^2)$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$	$г^{1/2}/см^{3/2}$
Потенциал электрического поля, разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила	*Вольт (В)* $(м^2кг/А·с^3)$	$см^{1/2}г^{1/2}/с$	$см^{3/2}г^{1/2}/с^2$
Электроемкость	*Фарада (Ф)* $(А^2с^4/м^2кг)$	*см*	$с^2/см$
Электрический момент диполя	$Кл·м^2$ *(А·с·м)*	$см^{5/2}г^{1/2}/с$	$см^{3/2}г^{1/2}$
Вектор поляризации (поляризованность)	$А·с/м^2$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$	$Г^{1/2}/см^{3/2}$
Электрическая постоянная	*Ф/м* $(А^2с^4/м^3кг)$	-	$с^2/см^2$
Напряженность электрического поля	*В/м* $(м·кг/А\ с^3)$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$	$г^{1/2}/см^{1/2}/с^2$
Сила тока	*А*	$см^{3/2}г^{1/2}/с^2$	$см^{1/2}г^{1/2}/с$
Плотность тока	$А/м^2$	$г^{1/2}/с^2·см^{1/2}$	$г^{1/2}/с^2·см^{3/2}$
Электрическое сопротивление	*Ом* $(м^2кг/А^2с^3)$	*с/см*	*см/с*
Удельное электрическое сопротивление	*Ом·м* $(м^3кг/А^2·с^3)$	*с*	$см^2/с$
Электрическая проводимость	*Сименс (См)* $(А^2·с^3/м^2\ кг)$	*см/с*	*с/см*
Удельная электрическая проводимость	*См/м* $(А^2·с^3/м^3\ кг)$	*1/с*	$с/см^2$
Подвижность зарядов	$А·с^2/кг$	$см^{3/2}/г^{1/2}$	$см^{1/2}с/г^{1/2}$

Единицы измерения магнитных величин

Величина	Размерность в системах		
	СИ	СГСЭ	СГСМ и Гаусса
Магнитный поток	*Вебер (Вб)* $м^2кг/А\cdot с^2$	$см^{1/2}г^{1/2}$	$см^{3/2}г^{1/2}/с$
Магнитная индукция	*Тесла (Тл)* $кг/А\cdot с^2$	$г^{1/2}/см^{3/2}$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$
Магнитный момент	$А\cdot м^2$	$см^{3/2}г^{1/2}$	$см^{5/2}г^{1/2}/с$
Вектор интенсивности намагниченности (намагниченность)	$А/м$	$г^{1/2}/см^{3/2}$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$
Индуктивность и взаимная индуктивность	*Генри (Гн)* $(м^2кг/А^2с^2)$	$с^2/см$	$см$
Магнитная постоянная	$Гн/м$ $м\cdot кг/А^2с^2$	$с/см^2$	-
Напряженность магнитного поля	$А/м$	$см^{1/2}г^{1/2}/с^2$	$г^{1/2}/см^{1/2}с$
Магнитодвижущая сила	$А$	$см^{3/2}г^{1/2}/с^2$	$см^{1/2}г^{1/2}/с$
Магнитное сопротивление	$А/Вб$ $А^2с^2/м^2кг$	$См/с$	$1/см$

Литература

1. Коган, Ю.Б. Размерность физических величин / Ю.Б. Коган. – М.: Наука, 1968. – 72 с.

2. Хантли, Г. Анализ размерностей / Г. Хантли. – М.: Мир, 1970. 175 с.

3. Брук, Ю.М. Как физики делают оценки – метод размерностей и порядки физических величин / Ю.М. Брук, А.Л. Стасенко // О современной физике учителю. – М.: Знание, 1975. – С.36–53.

4. Сена, Л.А. Единицы физических величин и их размерности / Л.А. Сена. – М.: Наука, 1977. – 432 с.

5. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 447 с.

6. Баренблатт, Г.И. Подобие, автономность и промежуточная асимптотика / Г.И. Баренблатт. – М.: Наука, 1982. – 225 с.

7. Tonks, L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field / L. Tonks // Phys. Rev. 1935. – V. 48. – P. 562–568.

8. Френкель, Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме / Я.И. Френкель // ЖЭТФ. – 1936. – Т. 6. – № 4. – С. 348–350.

9. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

10. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 536 с.

11. Краткий физико-технический справочник / под ред. К.П. Яковлева. – М: Физматгиз. – Т. 2. – 417 с.

12. Савельев, И.В. Курс общей физики.– Т. 1. / И.В. Савельев. – М., 1970. – 512 с.

13. Архангельский, М.М. Курс физики: механика / М.М. Архангельский. – М., 1961. – 408 с.

14. Фриш, С.Э. Курс физики. Т. 1. / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. – М., 1962. – 468 с.

15. Зисман, Г.А. Курс общей физики. – Т. 1. / Г.А. Зисман, О. Тодес. – М., 1974. – 340 с.

Оглавление

Учебное издание

Григорьев Александр Иванович, **Коромыслов** Вячеслав Александрович,
Папорков Владимир Аркадьевич, **Ширяева** Светлана Олеговна

Метод размерностей

Задачник

Редактор, корректор И.Н. Бунакова
Компьютерная верстка Е.Л. Шелеховой

Подписано в печать 07.09.2007. Формат 60x84/16. Бумага тип.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,04. Тираж 200 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ
Отпечатано на ризографе
Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

**А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов,
В.А. Папорков, С.О. Ширяева**

Метод размерностей