Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра компьютерных сетей

Уравнения математической физики

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

Ярославль 2007

УДК 517.958:52/59
ББК В 161.68я73
У 68

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2007 года

Рецензент
кафедра компьютерных сетей ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Составитель М.В. Краснов

У 68 **Уравнения математической физики**: метод. указания / сост. М.В. Краснов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 44 с.

Методические указания содержат основные понятия, формулы на основе которых рассматриваются конкретные примеры решения некоторых задач математической физики. Цель указаний – помочь студентам специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» в изучении данного раздела математики. Могут быть использованы при выполнении домашних заданий и при подготовке к зачету.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (дисциплина «Уравнения математической физики», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 517.958:52/59
ББК В 161.68я73

Уравнения математической физики

Определение. Уравнением в частных производных 2-го порядка называется соотношение, которое связывает неизвестную функцию с двумя независимыми переменными (x,y) и ее частные производные до 2-го порядка включительно[1]

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=0.$$

Определение. Решением уравнения в частных производных называется всякая функция, которая после подстановки вместо неизвестной функции обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Определение. Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0. \qquad (1)$$

1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

Рассмотрим линейное относительно старших производных уравнение в некоторой области Ω переменных (x,y).

Определение. Выражение $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ назовем дискриминантом уравнения и будем говорить, что уравнение в области Ω принадлежит:

- гиперболическому типу, если $D>0$;
- параболическому типу, если $D=0$;
- эллиптическому типу, если $D<0$.

Введем вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ,η). С помощью преобразования переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, допускающего обратное преобразование, получим уравнение эквивалентное исходному. Достаточным условием независимости

---

[1] Введем обозначения $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

$\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$ является отличие определителя $\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$ от нуля.

Производные в новых переменных (ξ, η) вычисляются по формулам:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.$$

Определение. Уравнение $a_{11} dy^2 - 2a_{12} dxdy + a_{22} dx^2 = 0$ называется характеристическим.

Характеристическое уравнение распадается на два уравнения:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (2)$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (3)$$

Положим $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y),$ где $\varphi(x, y) = const$ и $\psi(x, y) = const$ есть общие интегралы характеристического уравнения. Поиск функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ осуществляется с учетом типа уравнения (1).

Разберем поиск функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ для каждого типа подробно:

1. Гиперболический тип. Правые части уравнений (2) и (3) действительны и различны. Пусть $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (2), а $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (3). В результате получаем каноническую форму для гиперболического уравнения $u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$. Полагая $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, приводим уравнение к виду $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = f$.

Параболический тип. Уравнения (2) и (3) совпадают, получаем один общий интеграл $\varphi(x,y)=const$. Пусть в этом случае $\xi=\varphi(x,y)$, а $\eta=\psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ любая функция, независимая от $\varphi(x,y)$. В результате получаем каноническую форму для параболического уравнения $u_{\eta\eta}=F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$.

Эллиптический тип. Правые части уравнений (2) и (3) комплексны и различны. Пусть $\xi=\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)=const$ есть общий интеграл уравнения (2); тогда $\eta=\varphi^*(x,y)$, где $\varphi^*(x,y)$, функция сопряженная к $\varphi(x,y)$, и представляющая собой общий интеграл уравнения (3). Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные $\alpha=\dfrac{\varphi+\varphi^*}{2}$ и $\beta=\dfrac{\varphi-\varphi^*}{2i}$, так что $\xi=\alpha+i\beta$, $\eta=\alpha-i\beta$. В результате получаем каноническую форму для эллиптического уравнения $u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=F(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$.

Пример. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$.

Решение

$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=1+3=4>0$. Гиперболический тип.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm 2}{1}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y=-x+C \\ y=3x+C \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} \xi=y+x \\ \eta=y-3x \end{cases}$$

$u_x=u_\xi-3u_\eta \qquad u_y=u_\xi+u_\eta$

$u_{xx}=u_{\xi\xi}-6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta} \qquad u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta}$

Подставим производные в исходное уравнение и в результате получим $-16u_{\xi\eta}+8u_\xi=0$. Ответ $u_{\xi\eta}=\dfrac{1}{2}u_\xi$.

2) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$.

Решение

$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4-5=-1<0$. Эллиптический тип.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pm i}{1} \Rightarrow \begin{cases} y=(2+i)x+C \\ y=(2-i)x+C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi=y-2x \\ \eta=-x \end{cases}$$

$u_x=-2u_\xi-u_\eta$ $\qquad$ $u_y=u_\xi$

$u_{xx}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$ $\qquad$ $u_{yy}=u_{\xi\xi}$

$u_{xy}=-2u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}$

Подставим производные в исходное уравнение и в результате получим $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\eta=0$. Ответ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\eta=0$.

3) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0.$

Решение

$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=1-1=0.$ Параболический тип.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1} \Rightarrow \xi=y-x$. В качестве второй функции возьмем $\eta=x$, действительно $\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0.$

$u_{xx}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$ $\qquad$ $u_{yy}=u_{\xi\xi}$

$u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}$

Подставим производные в исходное уравнение, в результате получим $u_{\eta\eta}=0$.

Ответ $u_{\eta\eta}=0$.

2. Уравнение колебания струны

Рассмотрим натянутую струну, то есть тонкую гибкую упругую нить длины l, расположенную в плоскости Oxu, которая в результате известного возмущения выведена из положения равновесия Ox. Изучим малые плоские поперечные колебания струны, полагая, что при таком колебании струны все ее точки движутся перпендикулярно оси Ox. Обозначим через $u(x,t)$ смещение точки струны с абсциссой x в момент времени t относительно оси Ox. При отсутствии внешней силы $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где T - сила натяжения, а ρ – линейная плотность струны. Предположим, что T и ρ постоянные переменные, тогда, считая $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, получим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

Определение. Уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ называется уравнением свободных колебаний струны.

Уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ имеет много решений, поэтому для однозначной характеристики $u(x,t)$ необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия. Например, задать начальное положение точек $u(x,0) = \varphi(x)$ и начальную скорость $u_t(x,0) = \psi(x)$.

Если струна ограничена, то необходимо задать условия на ее концах (граничные условия).

Приведем простейшие примеры граничных условий:

- Оба конца струны закреплены неподвижно $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
- Один конец струны закреплен неподвижно, а другой движется по некоторому закону $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = \mu(t)$.
- Оба конца свободны $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.
- Один конец струны закреплен неподвижно, а другой свободен $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

Могут быть и другие граничные условия.

Таким образом, примером задачи для уравнения свободных колебаний струны на ограниченном отрезке $[0,l]$ может служить следующая система:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0. \end{cases}$$

2.1. Метод Фурье (метод разделения переменных)

Рассмотрим этот метод на примере задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах (в точках $x=0$ и $x=l$).

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (4) \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x) & (5) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0 & \end{cases}$$

(6)

Нас интересует нетривиальные решения этой краевой задачи. Решение $u(x,t)$ будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{7}$$

где $X(x)$ – функция, которая зависит только от x, а $T(t)$ – только от t.

Подставим предполагаемую форму решения в уравнение (4), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \tag{8}$$

или после деления на $a^2 X(x)T(t)$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{9}$$

Равенство (9) должно удовлетворяться тождественно, то есть при всех значениях независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (9) является функцией только переменной x, а левая – только t. Легко заметить, что для тождественного выполнения равенства обе его части должны быть равны некоторой константе.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{10}$$

где λ – постоянная, которую для удобства берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (10) получаем два дифференциальных уравнения:

1) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$;

2) $T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$;

Граничные условия (6) дают $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ и $u(l,t) = X(l)T(t) = 0$.

Найдем те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

а также найдем эти решения. Сформулированная таким образом задача называется задачей Штурма-Лиувилли.

В зависимости от λ возможны различные решения этой системы. Рассмотрим каждый из случаев подробно

• Пусть $\lambda < 0$, тогда $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Найдем значения C_1 и C_2.

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,\ X(l) = C_1(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0.$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = 0$, другими словами, $X(x) \equiv 0$. Не подходит, нужны нетривиальные решения.

• Пусть $\lambda = 0$, тогда $X(x) = C_1 x + C_2$. Найдем значения C_1 и C_2.

$$X(0) = C_2 = 0,\ X(l) = C_1 l = 0.$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = 0$ другими словами $X(x) \equiv 0$. Но мы ищем нетривиальные решения.

• Пусть $\lambda > 0$, тогда $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Найдем значения C_1 и C_2.

$$X(0) = C_1 = 0,\ X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Поскольку ищем решение не равное тождественно нулю, то $C_2 \neq 0$, поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ или $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, где n любое целое число. Следовательно, $X(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

Решим дифференциальное уравнение $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$, учитывая, что $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, тогда получим $T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + B_n \sin\frac{\pi n a}{l}t$.

Следовательно, частными решениями задачи являются функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n \cos\frac{\pi na}{l}t + B_n \sin\frac{\pi na}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Заметим, что $u(x,t) = \sum u_n(x,t)$, а начальные условия (5) позволяют определить A_n и B_n.

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum u_n(x,0) = \sum A_n \sin\frac{\pi n}{l}x\,. \tag{11}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}. = \sum \frac{a\pi n}{l}B_n \sin\frac{\pi}{l} \tag{12}$$

.

Из формул (11) и (12) видно, что коэффициенты A_n и $B_n \dfrac{a\pi n}{l}$ являются коэффициентами разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$ и, следовательно, для них справедливы формулы

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \qquad B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Пример. Найти функцию $u(x,t)$, для которой выполняются следующие условия $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = \sin^3 x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Решение.

Будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$, тогда $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{4T(t)} = -\lambda.$

Следовательно, надо решить задачу *Штурма-Лиувилли*:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что в случае $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$, благодаря граничным условиям, существует единственное решение рассматриваемого дифференциального уравнения $X(x) \equiv 0$, которое нас не интересует. В случае $\lambda > 0$ решением уравнения является функция $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$, используя граничные условия, находим, что $\sqrt{\lambda} = n$, $A = 0$. Следовательно, $X_n = \sin nx$.

Для каждого λ находим решение $T_n(t)$ уравнения $T''(t) + 4n^2T(t) = 0$. Оно имеет вид: $T_n(t) = A_n\cos 2nt + B_n\sin 2nt$. Решением задачи будет функция $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos 2nt + B_n\sin 2nt)\sin nx.$

Коэффициенты A_n, B_n находим из начальных условий:

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin nx = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad n = 1, A_1 = 1$$

$$u_t(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nB_n \sin nx = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \qquad \Rightarrow \qquad n = 1, B_1 = \frac{3}{8},$$

$$n = 3, B_3 = -\frac{1}{24}.$$

Ответ: $u(x,t) = (\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t)\sin x - \frac{1}{24}\sin 6t\sin 3x$.

2.2. Вынужденная сила

Рассмотрим задачу (4)-(6), только к струне приложена внешняя сила. Другими словами, исследуем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t) & (13) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) & (14) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0 & (15) \end{cases}$$

Определение. Уравнение вида $u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t)$ называется неоднородным.

Задачу (13)-(15) можно разбить на две подзадачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(x,0) = \varphi(x)\, v_t(x,0) = \psi(x) \\ v(0,t) = 0 \qquad v(l,t) = 0 \end{cases}$$

(16)

(17)

(18)

Однородная задача с ненулевыми начальными условиями.

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t) \\ w(x,0) = 0, \qquad\qquad w_t(x,0) = \\ w(0,t) = 0, \qquad\qquad w(l,t) = \end{cases}$$

(19)

(20)

(21)

Неоднородная задача с нулевыми начальными условиями.

Решением задачи (13)-(15) является сумма решения однородной задачи с ненулевыми начальными условиями и решения неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями. Другими словами $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$.

Как найти решение однородной задачи мы уже исследовали, смотри (4)-(6).

Исследуем неоднородную задачу с нулевыми начальными условиями. Решение будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{22}$$

Подставим предполагаемое решение в (19),(20). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n''(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = -\sum \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 w_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + f(x,t) \tag{23}$$

$$w(0) = 0, \qquad\qquad w'(0) = 0.$$

Разложим функцию $f(x,t)$ на интервале $[0,l]$ в ряд Фурье по аргументу x, считая t постоянной. Разложение будем проводить по $\sin\frac{\pi n}{l}x$, то есть

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где } f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x dx.$$

Подставим $f(x,t)$ в (23)

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n''(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 w_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(w_n''(t)+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)w_n(t)-f_n(t)\right)\sin\frac{\pi n}{l}x=0.$$

Следовательно, для того чтобы найти $w(t)$, надо решить дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} w_n''(t)+\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 w_n(t)=f_n(t) \\ w_n(0)=0 \\ w_n'(0)=0. \end{cases}$$

Пример. Найти функцию $u(x,t)$, для которой выполняются следующие условия $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}+8\sin x\cos t \\ u(x,0)=\sin x, \\ u_t(x,0)=\sin^3 x, \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0. \end{cases}$

Решение.

Будем искать $u(x,t)$ в виде $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$.

$$\begin{cases} v_{tt}=4v_{xx} \\ v(x,0)=\sin x \qquad v_t(x,0)=\sin^3 x \\ v(0,t)=0, \qquad v(\pi,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt}=4w_{xx}+8\sin x\cos t \\ w(x,0)=0, \qquad w_t(x,0)=0 \\ w(0,t)=0, \qquad w(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Решение однородной задачи с ненулевыми начальными условиями, было найдено раньше

$$v(x,t) = (\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t)\sin x - \frac{1}{24}\sin 6t \sin 3x .$$

Решение неоднородной задачи будем искать в виде $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin nx.$ Подставим его в неоднородное уравнение $\left(w_1''(t) + 4w_1(t) - 8\cos t\right)\sin x = 0.$ Следовательно, надо решить обычное дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} w_1''(t) + 4w(t) = 8\cos t \\ w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что

$$w(t) = -\frac{8}{3}\cos 2t + \frac{8}{3}\cos t \text{ или } w(x,t) = (-\frac{8}{3}\cos 2t + \frac{8}{3}\cos t)\sin x.$$

Ответ:

$$u(x,t) = (\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t)\sin x - \frac{1}{24}\sin 6t \sin 3x + \frac{8}{3}\sin x(\cos t - \cos 2t).$$

2.3. Уравнение свободных колебаний струны с ненулевыми граничными условиями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = \mu_1(t), & t > 0 \\ u(l,t) = \mu_2(t), & t > 0 \end{cases}$$

Решение будем искать в виде: $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$ где $v(x,t)$ – вспомогательная функция, а $w(x,t)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + \bar{f}(x,t), \ \bar{f}(x,t) = f(x,t) - (v_{tt} - a^2 v_{xx}) \\ w(x,0) = \overline{\varphi}(x), \qquad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - v(x,0) \\ w_t(x,0) = \overline{\psi}(x), \qquad \overline{\psi}(x) - \psi(x) - v_t(x,0) \\ w(0,t) = \overline{\mu}_1(t), \qquad \overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - v(0,t) \\ w(l,t) = \overline{\mu}_2(t), \qquad \overline{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - v(l,t) \end{cases}$$

Функция $v(x,t)$ подбирается таким образом, чтобы $\overline{\mu}_1(t) = \overline{\mu}_2(t) = 0$. Для рассматриваемой задачи этого можно достигнуть предположив, что $v(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$.

Замечание. Если граничные условия задаются в виде $u_x(0,t) = \mu_1(t)$, $u_x(l,t) = \mu_2(t)$, то эти неоднородные условия сводятся к однородным заменой $v(x,t) = \mu_1(t)x + (\mu_2(t) - \mu_1(t))\frac{x^2}{2l}$.

2.4. Краевые задачи со стационарными неоднородностями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = \mu_1, & \mu_1 = const \\ u(l,t) = \mu_2, & \mu_2 = const \end{cases}$$

Решение будем искать в виде: $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$, где $v(x)$ – решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} a^2 v''(x) + f(x) = 0 \\ v(0) = \mu_1 \\ v(l) = \mu_2, \end{cases}$$

а $w(x,t)$ – решение следующей однородной задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x) \\ w_t(x,0) = \psi(x) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что функция $v(x)$ равна

$$v(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\tau \int_0^\tau \frac{f(s)}{a^2}ds - \int_0^x d\tau \int_0^\tau \frac{f(s)}{a^2}ds.$$

В частности, если f является константой, то $v(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{l} + \frac{f}{2a^2}(lx - x^2)$.

Пример. Найти функцию $u(x,t)$, для которой выполняются следующие условия: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + x \\ u(x,0) = \sin x + \frac{5x}{\pi} + \frac{\pi^2 x}{24} - \frac{x^3}{24} \\ u_t(x,0) = \sin^3 x \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 5 \end{cases}$

Решение будем искать в виде $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$.

Найдем функцию $v(x)$, решая следующую задачу $\begin{cases} 4v_{xx} + x = 0 \\ v(0) = 0 \\ v(\pi) = 5 \end{cases}$

Легко заметить, что решением данной задачи является функция $v(x) = 5\frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi d\tau \int_0^\tau \frac{s}{4}ds - \int_0^x d\tau \int_0^\tau \frac{s}{4}ds \;\Rightarrow\; v(x) = \frac{5x}{\pi} + \frac{\pi^2 x}{24} - \frac{x^3}{24}.$

Следовательно, осталось решить только задачу

$$\begin{cases} w_{tt} = 4w_{xx} \\ w(x,0) = \sin x \\ w_t(x,0) = \sin^3 x \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,t) = (\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t)\sin x - \frac{1}{24}\sin 6t \sin 3x + \frac{5x}{\pi} + \frac{\pi^2 x}{24} - \frac{x^3}{24}.$$

3. Уравнение теплопроводности

Если температура тела неравномерна, то происходит процесс передачи тепла от более теплых участков к более холодным.

Рассмотрим однородный стержень длины l, направленный вдоль оси Ox для которого выполняются условия:

1. Стержень теплоизолирован с боков.
2. Стержень является достаточно тонким, что позволяет считать температуру во всех точках поперечного сечения одинаковой.

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Процесс может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей температуру сечения x в момент времени t. Функция $u(x,t)$ должна удовлетворять уравнению $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$, где $c-$удельная теплоемкость, $\rho-$ плотность тела, $k-$ коэффициент теплопроводимости. Если стержень однороден, то c, k, ρ можно считать постоянными, а уравнение записывать в виде $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$.

Если источники тепла отсутствуют, то $F(x,t) = 0$ и значит, получим однородное уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, теряемого стержнем, рассчитанное на единицу длины и времени, равно $F_0 = h(u(x,t) - \theta(x,t))$, где $\theta(x,t)$ – температура окружающей среды, а h – коэффициент теплообмена.

Для выявления единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению теплопроводности присоединить начальное и граничные условия.

Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит лишь в задании функции $u(x,t)$ в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны. Рассмотрим некоторые из них.

• На конце стержня температура меняется по определенному закону $u(0,t)=\mu(t)$.

• На конце стержня задано значение производной. К этому условию приходим, если задана величина теплового потока, протекающего через торцевое сечение стержня $u_x(l,t)=\mu(t)$.

3.1. Решение неоднородной задачи (метод Фурье)

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (24) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (25) \\ u(0,t)=0 \qquad u(l,t)=0 & (26) \end{cases}$$

Так же, как и в гиперболическом случае, решение данной задачи можно представить как $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$, где $w(x,t)$ – решение однородной задачи с ненулевыми начальными условиями, а $v(x,t)$ – решение неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями. Другими словами, надо решить две задачи

$$1.\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(x,0)=\varphi(x) \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) \\ v(x,0)=0 \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее решение каждой задачи.

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & (27) \\ w(x,0)=\varphi(x) & (28) \\ w(0,t)=w(l,t)=0 & (29) \end{cases}$$

Решение ищем в виде

$$w(x,t)=X(x)T(t). \qquad (30)$$

Подставим предполагаемую форму решения (30) в уравнение (27) и произведем деление обеих частей равенства на $a^2X(x)T(t)$, получим

$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, где λ является константой.

Следовательно, получили два дифференциальных уравнения:

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0 \tag{31}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{32}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в граничные условия и учитывая, что ищем нетривиальное решение, получаем

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{33}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (32) с условиями (33)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Решение такого дифференциального уравнения было нами уже рассмотрено (2.1. Метод Фурье), в результате получили $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а $X = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (31), учитывая найденное λ.

$T'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T(t) = 0$ является дифференциальным уравнением первого порядка. Решением такого уравнения является функция $T_n = C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}$.

Значит, $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x.$

Для того, чтобы найти коэффициенты C_n, воспользуемся условием (28)

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x),$$

то есть C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $[0,l]$:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Перейдем теперь к рассмотрению неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями.

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t \\ v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{cases} \begin{matrix} (34) \\ (35) \\ \\ (36) \end{matrix}$$

Решение данной задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилли, то есть по функциям $\sin\frac{\pi n}{l}x.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (37)$$

Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ где } f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Подставим предполагаемую форму решения (37) в исходное уравнение (34). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 v_n(t) - f_n(t)\right)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0.$$

Учитывая начальное условие (35), имеем обыкновенные дифференциальные неоднородные уравнения первого порядка с начальными условиями

$$\begin{cases} v_n'(t) = -a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 v_n(t) + f_n(t) \\ v_n(0) = 0 \end{cases}$$

3.2. Задача теплопроводности с ненулевыми граничными условиями

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Перед тем как решать задачу, необходимо сделать граничные условия нулевыми. Для этого будем искать решение задачи в виде $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = \bar{f}(x,t), & \bar{f}(x,t) = f(x,t) - v_t + a^2 v_{xx} \\ w(x,0) = \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - v(x,0) \\ w(0,t) = \bar{\mu}_1\ (t) = 0 \\ w(l,t) = \bar{\mu}_2(t) = 0 \end{cases}$$

Функция $v(x,t)$ выбирается таким образом, чтобы $v(0,t) = \mu_1(t)$, $v(l,t) = \mu_2(t)$, для этого достаточно взять $v(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$.

Пример. Найти функцию $u(x,t)$, для которой выполняются условия

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4e^t \cos x \\ u(x,0) = 2\cos x + 3\cos 2x \\ u_x(0,t) = 0 \qquad u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Будем искать решение в виде $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, где $w(x,t)$ – решение однородной задачи с ненулевыми начальными условиями, а $v(x,t)$ – решение неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями.

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w(x,0) = 2\cos x + 3\cos \\ w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t = v_{xx} + 4e^t \cos \\ v(x,0) = 0 \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) \end{cases}$$

Рассмотрим ход решения однородной задачи более подробно. Будем считать, что $w(x,t) = X(x)T(t)$, тогда $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$ Получили два дифференциальных уравнения, которые надо решить, учитывая граничные условия.

Решаем задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Возможны три случая:

1) $\lambda < 0$. С учетом граничных условий существует единственное решение рассматриваемого дифференциального уравнения $X(x) \equiv 0$, которое нас не интересует.

2) $\lambda = 0$. Решением уравнения является функция $X(x) = Ax + B$, используя граничные условия находим $A = 0$. Следовательно, $X_0 = B$.

3) $\lambda > 0$. Решением уравнения является функция $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$, используя граничные условия находим $\sqrt{\lambda} = n, B = 0$. Следовательно, $X_n = \cos nx$.

Для каждого допустимого λ находим решение $T(t)$ уравнения $T'(t) + \lambda T(t) = 0$. Возможны два случая:

1) $\lambda = 0$. Решением уравнения является функция $T(t) = A$, где $A - const$.

2) $\lambda = n$. Решением уравнения является функция $T(t) = C_n e^{-n^2 t}$, где $C_n - const$.

Решением однородной задачи будет функция $w(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} \cos nx.$

Коэффициенты C_n находим из начальных условий:

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos nx = 2\cos x + 3\cos 2x \qquad n = 1, C_1 = 2, \qquad n = 2, C_2 = 3.$$

Следовательно, $w(x,t) = 2e^{-t}\cos x + 3e^{-4t}\cos 2x.$

Исследуем неоднородную задачу с нулевыми начальными условиями. Решение будем искать в виде $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos nx$. Подставим его в неоднородное уравнение $\left(v_1'(t)+v_1(t)-4e^t\right)\cos x=0$. Значит, надо решить $\begin{cases} v_1'(t)+v(t)=4e^t \\ v(0)=0 \end{cases}$. Легко заметить, что $v(t)=2e^t-2e^{-t}$, следовательно $v(x,t)=\left(2e^t-2e^{-t}\right)\cos x$.

Ответ: $u(x,t)=2e^{-t}\cos x+3e^{-4t}\cos 2x+(2e^t-2e^{-t})\cos x$.

4. Уравнение Лапласа

Будем рассматривать конечную область G, ограниченную замкнутым контуром Γ.

Определение.

Уравнение вида $\Delta u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ *называется уравнением Лапласа, а оператор* Δ *называется оператором Лапласа.*

Определение. *Функция называется гармонической в данной области, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.*

К уравнению Лапласа приводят многие задачи, особенно при изучении стационарных процессов, например задача о стационарном распределении температур в теле при отсутствии в нем источников и поглотителей тепла.

Определение. *Неоднородное уравнение Лапласа* $\Delta u(x,t)=-f(x,t)$ *часто называют уравнением Пуассона.*

Для однозначной характеристики $u(x,t)$ необходимо к уравнению Лапласа присоединить некоторые дополнительные условия, которым должна удовлетворять гармоническая функция. В качестве примера приведем задачу Дирихле. Задача Дирихле состоит в нахождении функции $u(x,t)$, которая внутри области G удовлетворяет уравнению Лапласа, непрерывна в замкнутой области, включая границу Γ и принимает заданные значения φ на границе.

Задача Дирихле может быть аналитически решена только для сравнительно простых областей G.

4.1. Несколько задач для уравнения Лапласа (метод Фурье)

Задача Дирихле для круга. Рассмотрим случай, когда областью G является круг радиуса a с центром в начале координат.

Внутренняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{внутри круга} \\ u = f & \textit{на границе круга} \end{cases}$$

Внешняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{вне круга} \\ u = f & \textit{на границе круга} \end{cases}$$

Перейдем к полярной системе координат (ρ, φ), положив $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$. В полярной системе координат уравнение Лапласа будет иметь вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \qquad (38)$$

Будем решать задачу методом разделения переменных. Для этого положим $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставив предполагаемую форму решения в уравнение (38), получим

$$\frac{\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{du}{d\rho}\right)}{\dfrac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где λ константа. Отсюда получаем два уравнения

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \qquad (39)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0 \qquad (40)$$

Первое из этих уравнений дает $\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$ Заметим, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению, то есть она является периодической по переменной φ: $u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$. Отсюда следует, что $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$, то есть $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π. Это возможно, только если $\sqrt{\lambda}=n$, где n целое число, и $\Phi(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi$.

Решение второго уравнения будем искать в виде $R(\rho)=\rho^m$. Подставляя $R(\rho)$в уравнение (40) и сокращая на ρ^m, получим $m^2=n^2$ или $m=\pm n$ $(n>0)$. Следовательно, $R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}$, где C_n, D_n постоянные. Для решения внутренней задачи надо положить $R(\rho)=C\rho^n$, так как в противном случае функция $u(\rho,\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho=0$ и не является гармонической внутри круга. Для решения внешней задачи надо брать $R(\rho)=D\rho^{-n}$, так как решение внешней задачи должно быть ограничено на бесконечности.

Итак, решение задач определяются формулами:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\right. \qquad \text{внутренняя задача;}$$

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin\right. \qquad \text{внешняя задача.}$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из граничного условия:

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi)$$

или

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)=f(\varphi).$$

Для выполнения последних равенств необходимо, чтобы функция $f(\varphi)$ разлагалась в ряд Фурье

$$f(\varphi)=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\varphi+k_n\sin n\varphi),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos n\tau d\tau \qquad \text{(n=1,2,…..)},$$

$$k_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau d\tau \qquad \text{(n=1,2,…..)}.$$

Следовательно, можно выписать коэффициенты:

внутренняя задача $A_0 = \frac{b_0}{2},\ A_n = \frac{b_n}{a^n},\ B_n = \frac{k_n}{a^n};$

внешняя задача $A_0 = \frac{b_0}{2},\ A_n = b_n a^n,\ B_n = k_n a^n.$

Пример. Найти функцию $u(\rho,\varphi)$ в полярной системе координат, для которой выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{\rho=1} = 2 + 3\cos 2\varphi \\ u_{\rho=2} = 5 + 5\sin 2\varphi \end{cases}$$

Решение.

Запишем уравнение Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

Будем искать нетривиальное решение в виде $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставим предполагаемый вид в уравнение, в результате получим

$$\frac{\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

Рассмотрим два дифференциальных уравнения

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \text{ и } \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0$$

Решим первое уравнение при различных значениях λ:

1. $\lambda<0$ Решение уравнения имеет вид $\Phi(\varphi)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$. Учитывая, что для функции должно выполняться условие периодичности, легко сделать вывод $C_1=C_2=0$.

2. $\lambda=0$ Решение уравнения имеет вид $\Phi(\varphi)=C_1\varphi+C_2$. Учитывая, что для функции должно выполняться условие периодичности, легко сделать вывод $\Phi(\varphi)=C_2$.

3. $\lambda>0$ Решение уравнения имеет вид $\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$ Вспомнив об условии периодичности, заметим $\Phi(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi.$

Решим второе уравнение при допустимых значениях λ:

1) $\lambda=0$ $\qquad \rho\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \rho\dfrac{dR}{d\rho}=C_1 \quad\Rightarrow$

$\dfrac{dR}{d\rho}=\dfrac{C_1}{\rho} \quad\Rightarrow R=C_1\ln\rho+C_3;$

2) $\lambda>0$ Решение уравнения будем искать в виде $R(\rho)=\rho^m$. Подставим предполагаемое решение в уравнение и в результате получим $m^2=n^2$. Следовательно, $R(\rho)=C\rho^{-n}+D\rho^n$.

Легко заметить, что

$$u(\rho,\varphi)=C\ln\rho+E+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+$$
$$+\rho^{-n}(K_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi).$$

Для завершения решения задачи осталось найти значение коэффициентов. Воспользуемся дополнительными условиями.

$$u(1,\varphi)=E+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+(K_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi)=$$
$$=2+3\cos 2\varphi.$$

$$u(2,\varphi)=C\ln 2+E+\sum_{n=1}^{\infty}2^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+$$
$$+2^{-n}(K_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi)==5+5\sin 2\varphi.$$

Следовательно, выполняются следующие системы

$$\begin{cases} E=2 \\ C\ln 2+E=5 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2+K_2=3 \\ 4A_2+\frac{1}{4}K_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_2+D_2=0 \\ 4B_2+\frac{1}{4}D_2=5 \end{cases}$$

Ответ:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{3}{\ln 2}\ln\rho+2+(-\frac{1}{5}\cos 2\varphi+\frac{4}{3}\sin 2\varphi)\rho^2+\rho^{-2}(\frac{16}{5}\cos 2\varphi-\frac{4}{3}\sin 2\varphi).$$

4.2. Решение уравнения Гельмгольца

Рассмотрим задачу: найти функцию $v(\rho,\varphi)$ в полярной системе координат, для которой выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta v+\lambda v=0 \qquad \text{в круге} \qquad 0\le\rho\le\rho_0 \\ v(\rho_0,\varphi)=0 \end{cases}$$

Решение

$$\Delta v+\lambda v=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0.$$

Функцию будем искать в виде $v(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставив предполагаемую форму решения в уравнение, получим

$$\frac{\rho(\rho R')'+\lambda\rho^2 R}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu, \text{ где } \mu=const.$$

Отсюда получаем два дифференциальных уравнения

$$\Phi''+\mu\Phi=0,$$

$$\frac{1}{\rho}(\rho R')'+\left(\lambda-\frac{\mu}{\rho^2}\right)R=0, \quad R(\rho_0)=0.$$

Первое из этих уравнений дает $\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\mu}\varphi+B\sin\sqrt{\mu}\varphi.$ В силу однозначности решения $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической функцией, отсюда $\mu=n^2$, где n - целое число.

Для функции $R(\rho)$ получаем дифференциальное уравнение $\frac{1}{\rho}(\rho R')'+\left(\lambda-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R=0$ или $\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-n^2)R=0$.

Сделаем замену переменных $x = \sqrt{\lambda}\rho \quad \Rightarrow \rho = \dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}$,

$R' = \dfrac{dR}{d\rho} = \dfrac{dR}{dx}\dfrac{dx}{d\rho} = \sqrt{\lambda}\dfrac{dR}{dx}$, $R'' = \lambda \dfrac{d^2 R}{dx^2}$.

Следовательно, функция R удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{\lambda}\lambda\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{x}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0,$$

то есть $x^2 \dfrac{d^2R}{dx^2} + x\dfrac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0$.

Получили уравнение Бесселя n-го порядка:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Оно имеет общее решение $R = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$.

Здесь $J_n(x)$ функция Бесселя первого рода, порядка n, а $Y_n(x)$ функция Бесселя второго рода, порядка n, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, $R_n(\rho) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}\rho) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)$.

Так как $Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)$ не ограничена в окрестности начала координат, то $C_2 = 0$ и $R(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda}\rho)$.

Искомая функция

$$v(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2}J_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)J_n(\sqrt{\lambda}\rho),$$

где коэффициенты A_0, A_n, B_n определяются по стандартным формулам нахождения коэффициентов ряда Фурье.

Задачи

Привести уравнение к каноническому виду:

1) $\left(1 + x^2\right)u_{xx} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;

2) $4y^2 u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2 u_x = 0$;

3) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$;

4) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$;

5) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$.

Найти u(x,t), удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t\cos 3x \\ u(x,0) = \cos 5x + 1 \\ u_t(x,0) = 2\cos 6x \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x \\ u(x,0) = 5 + x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u \\ u(x,0) = e^{-x}\sin 3x\cos x \\ u_t(x,0) = e^{-x}\sin x\cos 3x \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu \\ u(x,0) = \cos^2 x \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = 2e^{-2x}\sin x\cos 3x \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + x \\ u(x,0) = \sin^3 5x \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Для эллиптического типа рассмотрим следующие задачи:

1) для круга радиуса > 4 с центром в начале координат и при краевом условии $u|_{\rho=4} = 5 + \cos 2\varphi + \sin\varphi$ найти функцию $u(\rho,\varphi)$, для которой $\Delta u = 1$;

2) для круга радиуса < 1 с центром в начале координат и при краевом условии $\frac{du}{dr}|_{r=1} = 5x + 5y + C$ найти функцию $u(\rho,\varphi)$, для которой $\Delta u = 4$.

Приложение

Дифференциальные уравнения

Определение. *Уравнение*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (П.1)$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные (или дифференциалы) до n-го порядка включительно, называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение. *Всякая функция $y = y(x)$, которая при ее подстановке в дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ обращает его в тождество, называется решением этого уравнения.*

Уравнения с разделяющимися переменными и линейные уравнения первого порядка

Определение. *Дифференциальные уравнения первого порядка, которые можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или в виде $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ называются уравнениями с разделяющими переменными.*

Утверждение. *Для решения уравнения с разделяющими переменными надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую только y, затем проинтегрировать обе части. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.*

Пример. Решить $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Решение.

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \;\; x \neq 0 \;\; \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} + C \;\; \Rightarrow \ln x - \sqrt{y^2+1} = C \;\; .$$

Ответ: все решения данного уравнения имеют вид $\ln x - \sqrt{y^2+1} = C, \quad x = 0.$

Утверждение. *Уравнения вида* $y' = f(ax+by+c)$ *приводятся к уравнению с разделяющими переменными заменой* $z = ax+by+c.$

Пример. Решить $y' = \cos(y-x).$

Решение.

Пусть $z = y - x,$ тогда $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx} - 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} + 1 \Rightarrow$ $\dfrac{dz}{dx} + 1 = \cos z \Rightarrow \dfrac{dz}{\cos z - 1} = dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx \Rightarrow x - \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = C \Rightarrow$ $x - \operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = C.$

Ответ: $x - \operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = C$ и потерянные решения $z = 2\pi k.$

Определение. *Дифференциальное уравнение, которое можно записать в виде* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *называется однородным, где* $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ *однородные функции одной и той же степени.*[2]

Утверждение. *Замена* $y = zx$ *приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющими переменными. Аналогичный результат достигается в полярной системе координат* $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$

Пример. Решить $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0.$

Решение.

Функции $M(x,y) = xye^{x/y} + y^2$ и $N(x,y) = -x^2 e^{x/y}$ однородные одной степени, следовательно, делаем замену $x = zy,$ $dx = ydz + zdy,$ получим

[2] Функция $F(x,y)$ *называется однородной степени* $k,$ *если для всех* $\lambda > 0$ *выполняется равенство* $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x,y).$

$$y^3(ze^z+1)dz+y^2z(ze^z+1)dy-z^2y^2e^zdy=0 \;\Rightarrow$$

$$y(ze^z+1)dz+zdy=0 \;\Rightarrow\; \frac{(ze^z+1)dz}{z}=-\frac{dy}{y} \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{(ze^z+1)dz}{z}=-\int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; e^z+\ln|z|=-\ln y+C \;\Rightarrow\; e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C.$$

Ответ: $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C.$

Утверждение. *Уравнение вида* $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ *приводится к однородному уравнению заменой* $x=x_0+t,\; y=y_0+z,$ *где* x_0, y_0*-координаты точки пересечения прямых* $ax+by+c=0$ *и* $a_1x+b_1y+c_1=0.$ *Если же прямые не пересекаются, то в этом случае* $a_1x+b_1y=k(ax+by)$ *и приводится к уравнению с разделяющими переменными заменой* $z=ax+by+c.$

Определение. *Уравнение вида*

$$y'+a(x)y=f(x) \qquad (П.2)$$

называется линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка в канонической форме. Если $f(x)\equiv 0$*, то уравнение называется однородным, в противном случае, уравнение неоднородное.*

Утверждение. *Чтобы решить уравнение* $y'+a(x)y=f(x),$ *решим сначала уравнение* $y'+a(x)y=0.$ *После этого в общем решении уравнения* $y'+a(x)y=0$ *заменим произвольную постоянную* C *на неизвестную функцию* $C(x)$ *и подставим полученное выражение для* y *в уравнение* $y'+a(x)y=f(x),$ *найдем функцию* $C(x).$

Пример. Решить $(2x+1)y'=4x+2y.$

Решение.

Рассмотрим уравнение $(2x+1)y'=2y.$ Следовательно $(2x+1)dy=2ydx \;\Rightarrow$

$\dfrac{dy}{2y}=\dfrac{dx}{2x+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\ln y}{2}=\dfrac{\ln(2x+1)}{2}+C \;\Rightarrow\; y=C(2x+1).$ Для решения $(2x+1)y'=4x+2y$ воспользуемся методом вариации произвольной постоянной, то есть подставим $y=C(x)(2x+1)$ в искомое уравнение $(2x+1)\big((2x+1)C'(x)+2C(x)\big)=4x+2C(x)(2x+1)\Rightarrow$ $(2x+1)^2C'(x)=4x\Rightarrow\ C(x)=\int\frac{4x}{(2x+1)^2}=\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}+C.$

Ответ: $y=(2x+1)(\ln|2x+1|+C)+1$.

Линейные уравнения старших порядков

Определение. *Уравнение вида*

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f \qquad (П.3)$$

называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка, а

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (П.4)$$

линейным дифференциальным уравнением n-го порядка в канонической форме. Если $f(x)\equiv 0$*, то уравнение называется однородным в противном случае уравнение однородное.*

Утверждение. *Решение однородного уравнения n-го порядка сводится к подбору n линейно независимых частных решений. Часто частные решения ищут в виде суммы некоторого ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i(x)$, *особенно часто в виде степенного или обобщенного степенного ряда*.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка, с постоянными коэффициентами, называется уравнение вида* $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$.

Утверждение. *Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (П.5)$$

надо выполнить следующие действия:

1. Составить характеристическое уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \qquad (П.6)$$

2. Найти все корни $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ *характеристического уравнения.*

Общее решение уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ *есть сумма, состоящая из слагаемых вида* $C_ie^{\lambda_i x}$, *если* λ_i *простой* *корень характеристического уравнения и слагаемых вида* $\left(C_{m+1}+C_{m+2}x+\ldots+C_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\lambda_i x}$*, если* λ_i *корень кратности* k.

Если все коэффициенты уравнения вещественны, а корни λ *являются комплексными, то для каждой пары комплексных сопряженных корней* $\lambda=\alpha\pm\beta i$ *в формулу общего решения включается слагаемое вида* $C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x+C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x$*, если* λ *простой корень;*

$$\left(C_{m+1}+C_{m+2}x+\ldots+C_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x+$$
$$+\left(D_{m+1}+D_{m+2}x+\ldots+D_{m+k}x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha+\beta i$ *и* $\alpha-\beta i$ *имеет кратность* k.

Все C_i, D_i *- произвольные постоянные.*

Пример

а) Решить $y''+y'-2y=0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-2=0$. Корни характеристического уравнения - $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$. Решением дифференциального уравнения является функция $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

б) Решить $y''-2y'+y=0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$. Корни характеристического уравнения – $\lambda_1=\lambda_2=1$. Так как кратность корня равна двум, то решением дифференциального уравнения является функция $y(x)=(C_1+C_2x)e^x$.

Утверждение. *Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами* $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ *можно решить следующим методом:*

1. Решается линейное однородное уравнение $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$. *Пусть его решением является* $y_{одн}=C_1y_1+\ldots+C_ny_n$.

2. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y=C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n$, *где функции* $C_i(x)$ *определяются из системы*

$$C_1'y_1+\ldots+C_n'y_n=0$$
$$C_1'y_1'+\ldots+C_n'y_n'=0$$

$$\dots \quad \dots$$

$$C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f$$

Утверждение. *Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами* $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, *у которых функция* $f(x)$ *состоит из сумм и произведений функций* $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}, \cos\beta x, \sin\beta x$, *частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.*

№	*Характер правой части*	*Частное решение или замена*
1	$f(x) = B_m(x) e^{\gamma x}$, *где* $B_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$	$y = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$, *где* $s = 0$, *если* γ *не является корнем характеристического многочлена (П.6);* $s = k$, *если* γ *корень многочлена (П.6) кратности* k.
2	$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, *а коэффициенты уравнения вещественны*	$y = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x)$, *где* $s = 0$, *если* $\alpha + \beta i$ *не является корнем характеристического многочлена (П.6);* $s = k$, *если* γ *корень многочлена (П.6) кратности* k; $\deg(R_m(x)) = \deg(T_m(x)) = \max(\deg P(x), \deg Q(x))$.
3	$f(x)$ *содержит* $\cos\beta x$ *или* $\sin\beta x$	*заменой* $\cos\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}$ *или* $\sin\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$

получим случай 1.

Утверждение. *Частное решение линейного уравнения* $y^{(n)}+\ldots+a_n y=f_1(x)+\ldots+f_p(x)$ *равно сумме частных решений* $y^{(n)}+\ldots+a_n y=f_i(x)$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x)$ *равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.*

Пример. Решить $y''-y=2e^x-x^2$.

Рассмотрим однородное уравнение $y''-y=0$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2-1=0$. Корни характеристического уравнения - $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$. Решением однородного уравнения является функция $y_{одн}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

Рассмотрим неоднородное уравнение $y''-y=2e^x$. Частное решение будем искать в виде $y_1=Ax^s e^x$, так как $\gamma=1$ простой корень характеристического уравнения, то $y_1=Axe^x$. Подставим частное решение $y_1=Axe^x$ в уравнение $y''-y=2e^x$.В результате получим $Axe^x+2Ae^x-Axe^x=2e^x$, следовательно, $A=1$. Решение неоднородного уравнения – $y_1=xe^x$.

Рассмотрим неоднородное уравнение $y''-y=-x^2$. Частное решение будем искать в виде $y_2=x^s(Ax^2+Bx+C)e^{\gamma x}$, так как $\gamma=0$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_2=Ax^2+Bx+C$. Подставим частное решение y_2 в уравнение $y''-y=-x^2$. В результате получим $2A-Ax^2-Bx-C=-x^2$, следовательно, $A=1$, $B=0, C=2$. Решение неоднородного уравнения - $y_2=x^2+2$.

Общим решением дифференциального уравнения $y''-y=2e^x-x^2$ является функция $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$.

Уравнение Бесселя

Определение. *Уравнение вида*

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{n^2}{x^2}) y = 0 \qquad (П.7)$$

или

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \qquad (П.8)$$

называется уравнением Бесселя n-го порядка.

К уравнению Бесселя сводятся многие задачи математической физики, поэтому рассмотрим его несколько подробнее. Уравнение имеет особую точку $x = 0$, поэтому по крайне мере, одно нетривиальное решение $y(x)$ можно искать в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}$. Подставим предполагаемое решение в уравнение (П.8)

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2} +$$

$$+ x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p) x^{k+p-1} + (x^2 - n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем

$$\begin{aligned} &a_0 \left(k^2 - n^2\right) = 0, \\ &a_1 \left((k+1)^2 - n^2\right) = 0, \\ &\left((k+2)^2 - n^2\right) a_2 + a_0 = 0, \\ &\left((k+3)^2 - n^2\right) a_3 + a_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left((k+p)^2 - n^2\right) a_p + a_{p-2} = 0. \end{aligned} \qquad (П.9)$$

Так как мы можем предположить, что $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения (П.9) следует, что

$$k^2 - n^2 = 0 \text{ или } k = \pm n.$$

• Для определенности будем считать $k = n \geq 0$; тогда из второго уравнения (П.9.) получим $a_1 = 0$, аналогично все $a_{2p+1} = 0$. Легко заметить, что выполняются равенства:

$$a_p = -\frac{a_{p-2}}{(k+p-n)(k+p+n)} \text{ при } p > 1;$$

$$a_{2p+1} = 0;$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

• При $k = -n$ аналогично получаем:

$$a_{2p+1} = 0;$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+p)}.$$

Рассмотрим полученные частные решения:

• при $k = n$ получаем решение

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

Этому решению можно придать более удобный вид, если выбрать $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, где Γ – гамма-функция.

Тогда $y(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!\,\Gamma(n+p+1)}$ – это решение обозначают обычно как J_n, и называют функцией Бесселя первого рода порядка n.

• при $k = -n$, выбирая $a_0 = \dfrac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}$, аналогично получаем $J_{-n} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p!\,\Gamma(-n+p+1)}$ функцию Бесселя первого рода порядка $-n$.

Ряды $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ являются решениями уравнения Бесселя (П.8).

Заметим, что при n, не равном целому числу, решения $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$, очевидно, линейно независимы. Если же n равно целому числу, то функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ будут находиться в следующей линейной зависимости: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Следовательно, при целом n вместо $J_{-n}(x)$ надо искать другое решение, которое было бы линейно независимо от $J_n(x)$. Такое решение можно получать различными способами, однако чаще всего оно определяют так: $Y_n(x) = \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ и называют функцией Бесселя второго рода.

Итак, общее решение уравнения Бесселя при n, не равном целому числу, имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x),$$

а при n равном целому числу,

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Литература

1. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.

2. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – Санкт-Петербург: «Иван Федоров», 2003.

3. Филлипов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филлипов. – М.: Наука, 1992.

4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебник для физ. и физ.-мат. факультетов ун-тов. – 2-е изд., исправ. и доп. / А.Н. Тихонов, А.Л. Самарский. – М., 1977.

5. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак. – М.: Наука, 1980.

6. Годунов, С.К. Уравнения математической физики: учеб. пособие для университетов / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1979.

Содержание

Учебное издание

Составитель **Краснов** Михаил Владимирович

Уравнения математической физики

Методические указания

Редактор, корректор И.В. Бунакова
Компьютерная верстка Е.Л. Шелеховой

Подписано в печать 14.09.2007 г. Формат 60x84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 1,6.
Тираж 100 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Уравнения математической физики